Guía de Integrales Definidas. Matemáticas II

Prof. Wilson Herrera.

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$

b) $\displaystyle\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$

c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$

d) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}dx$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{y^2}{y+2}dy$

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz$

j) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha d\alpha$

k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}}dy$

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi$

n) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

ñ) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

o) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

2. Utilizando las sustituciones que se indican, calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x=t^2$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx, \quad e^x-1=z^2$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{3+2\cos t}, \quad \tan\frac{t}{2}=z$

d) $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx, \quad x-2=z^3$

3. Valiéndose de sustituciones adecuadas, calcular las integrales:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

d) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

Áreas de figuras planas.

4. Encuentre el área de la figura limitada por $y = x^4 - 2x^3 + 2, \quad y = 0$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

5. Encuantre el área de la región limitada por $y = \dfrac{x^2}{3} - 4$, el eje x, $x = -2$ y $x = 3$

6. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de las abscisas.

7. Calcular el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$, el eje OX y la recta $x = e$.

8. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.

9. Calcular el área de la figura comprendida entre una semionda de la sinusoide $y = \sin x$ y el eje OX.

10. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la vertical $x = 8$.

11. Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y = \tan x$, el eje OX y la recta $x = \dfrac{\pi}{3}$.

12. Calcular el área del segmento de la parábola $y = x^2$, que corta la recta $y = 3 - 2x$.

13. Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

14. Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = \dfrac{x^2}{3}$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

15. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

16. Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 2x$ divide al circulo $x^2 + y^2 = 8$.

17. Calcular el área de la superficie comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la parábola $x^2 = 12(y - 1)$.

18. En los siguientes ejercicios hallar el área comprendida por las curvas dadas.

    a) $y = 3 - \frac{1}{3}x^2,\ y = 0,$ entre $x = 0$ y $x = 3$

    b) $y = 5x - x^2,\ y = 0,$ entre $x = 1$ y $x = 3$

    c) $y = (x - 4)(x + 2),\ y = 0,$ entre $x = 0$ y $x = 3$

    d) $y = x^2 - 4x - 5,\ y = 0,$ entre $x = -1$ y $x = 4$

    e) $y = \frac{1}{4}(x^2 - 7),\ y = 0,$ entre $x = 0$ y $x = 2$

    f) $y = x^3,\ y = 0,$ entre $x = -3$ y $x = 3$

    g) $y = \sqrt[3]{x},\ y = 0,$ entre $x = -2$ y $x = 2$

    h) $y = \sqrt{x} - 10,\ y = 0,$ entre $x = 0$ y $x = 9$

    i) $y = (x - 3)(x - 1),\ y = x$

    j) $y = \sqrt{x},\ y = x - 4,\ x = 0$

    k) $y = x^2 - 2x,\ y = -x^2$

    l) $y = x^2 - 9,\ y = (2x - 1)(x + 3)$

    m) $x = 8y - y^2,\ x = 0$

    n) $x = (3 - y)(y + 1),\ x = 0$

    ñ) $x = -6y^2 + 4y,\ x + 3y - 2 = 0$

    o) $x = y^2 = 2y,\ x - y - 4 = 0$

    p) $4y^2 - 2x = 0,\ 4y^2 + 4x - 12 = 0$

q) $x = 4y^4,\ x = 8 - 4y^4$

19. Hallar el área del circulo de radio r.

20. Hallar el área de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

    Volumenes de sólidos de revolución.

21. Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región R, acotada por $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

22. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje y y la recta $y = 3$ en torno al eje y.

23. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$, y $y^2 = 8x$

24. La región semicircular acotada por la curva $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y se hace girar alrededor de la recta $x = -1$. configure la integral que representa su volumen.

25. En los siguientes ejercicios halle el volumen del sólido generado al hacer girar la figura alrededor del eje x.

    a) $y = \dfrac{x^2}{\pi},\ y = 0$

    b) $y = x^3,\ x = 3,\ y = 0$

    c) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 2,\ x = 4,\ y = 0$

    d) $y = x^{3/2},\ y = 0,$ entre $x = 2$ y $x = 3$

    e) $y = \sqrt{9 - x^2},\ y = 0,$ entre $x = -2$ y $x = 3$

    f) $y = x^{2/3},\ y = 0,$ entre $x = 1$ y $x = 27$

26. En los siguientes ejercicios halle el volumen del sólido generado al hacer girar la figura alrededor del eje y.

    a) $x = y^2,\ x = 0,\ y = 3$

b) $x = \frac{2}{y},\ y = 2,\ y = 6\ x = 0$

c) $x = 2\sqrt{y},\ y = 9,\ x = 0$

d) $x = y^{2/3},\ y = 27,\ x = 0$

e) $x = \sqrt{4 - y^2},\ x = 0$

27. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje x la región acotada por la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el eje x.

28. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $y = 6x$ y la paárabola $y = 6x^2$.

29. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $y^2 = 4x$.

30. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje x y la recta $x = r - h$, $0 < h < r$, calculando así el volumen de un *casquete esférico* de altura h, de una esfera de radio r.

31. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno a la recta $y = 2$, la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $3x^2 - 6y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80 = 0$ y el eje y.

32. Encuentre el volumen del ólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $x = 4$ y el eje x:

    a) en torno a la recta $x = 4$;   *b*) en torno a la recta $y = 8$.

33. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y eje y:

a) en torno a la recta $x = 4$; *b*) en torno a la recta $y = 8$.

34. La región acotada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, el eje x, $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

35. La región acotada por la recta $y = (r/h)x$, el eje x y $x = h$ se hace girar alrededor del eje x y por ello se genera un cono. Encuentre el volumen del sólido generado.

36. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje y, la región en el primer cuadrante que estápor encima de la parábola $y = x^2$ y por debajo de la parábola $y = 2 - x^2$.

37. Encuentre el volumen del sólido generado de las regiones acotadas por las curvas dadas, alrededor del eje que se indica.

    a) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0;$ alrededor del eje y

    b) $y = x^2,\ x = 1,\ y = 0;$ alrededor del eje y

    c) $y = \sqrt{x},\ x = 3,\ y = 0;$ alrededor del eje y

    d) $y = 9 - x^2(x \geq 0),\ x = 0,\ y = 0;$ alrededor del eje y

    e) $y = \sqrt{x},\ x = 5,\ y = 0;$ alrededor de la recta $x = 5$

    f) $y = 9 - x^2(x \geq 0),\ x = 0,\ y = 0;$ alrededor de la recta $x = 3$

    g) $y = \dfrac{1}{4}x^3 + 1,\ y = 1 - x,\ x = 1;$ alrededor del eje y

38. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, alrededor del eje OX, de la superficie limitada por el eje OX y la parábola $y = ax - x^2$ $(a > 0)$.

39. Hallar el volumen del elipsoide, engendrado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OX.

Longitud de Arco.

40. Encuntre el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

41. Encuentre la longitud del segmento de recta de $A(0,1)$ a $B(5,13)$.

42. Encuentre la longitud de arco de la curva $y = x^{3/2}$, desde el punto (1,1) hasta el punto (4,8).

43. En los ejercicios siguientes encuentre la longitud de la curva que se indica.

    a) $y = 4x^{3/2}$ entre $x = 1/3$ y $x = 5$

    b) $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$

    c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 8$

    d) $y = \dfrac{x^4+3}{6x}$ entre $x = 1$ y $x = 3$

    e) $x = \dfrac{y^4}{16} + \dfrac{1}{2y^2}$ entre $y = -3$ y $y = -2$

    f) $30xy^3 - y^8 = 15$ entre $y = 1$ y $y = 3$

44. Hallar la longitud de arco de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

45. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ desde el origen de coordenadas hasta el punto cuyas coordenadas son $x = 4$, $y = 8$.

46. Hallar la longitud de la catenaria $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ desde el vértice $A(0,a)$ hasta el punto $B(b,h)$.

47. Calcular la longitud de arco de la parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Coordenadas polares

48. Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$.

49. Hallar el área comprendida entre la primera y segunda espira de la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$.

50. Hallar el área limitada por la curva $r^2 = a^2 \sin 4\varphi$.

51. Hallar el área limitada por el caracol de Pascal $r = 2 + \cos\varphi$.

52. Hallar el área limitada por la parábola $r = a\sec^2 \frac{\varphi}{2}$ y las semirrectas $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ y $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

53. Hallar el área de la figura limitada por la curva $r = 2a\cos 3\varphi$, que está fuera del circulo $r = a$.

54. *Continuara*