UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA
Facultad de Ciencias Forestales Y Ambientales
Departamento de Botanica y Ciencias Basicas
Matematicas II
Prof. Wilson Herrera

DERIVADAS PARCIALES

1. Sea $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$, hallar:

   a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h}$.

   b) Usando las reglas de derivación, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$.

2. Si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

   hallar $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3. Encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto (2,1,5), a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$, con el plano $y = 1$.

4. Hallar la pendiente de la recta tangente en el punto (2,2,6), a la curva de intersección de la superficie $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 36 = 0$ con el plano $x = 2$.

5. Dada $f(x,y) = \dfrac{5e^{xy^2} \sin x}{\sqrt{y^2 - 9} + 1}$, después de percatarse del dominio más amplio para dicha ley, hallar, usando la definición, el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,5)$.

6. Empleando las reglas de derivación, hallar:

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $f(x,y) = x^2 \cos y + 2x \tan y$.

   b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ si $f(x,y) = e^{x^2 y} + \arctan(xy)$.

   c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ si $f(x,y) = x \sin(x^2 y) + \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,3)$ si $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{e^{xy}+1}$.

7. Si $u(r,t)=\sin\dfrac{r}{t}+\ln\dfrac{r}{t}$, probar que: $r\dfrac{\partial u}{\partial r}+t\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$.

8. Si $z=xy+xe^{y/x}$, demostrar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-xy-z=0$.

9. Dada $z=x^4\ln\dfrac{y}{x}$, probar que: $xz_x+yz_y=4z$.

10. Sea $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$

    ¿Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$?

11. Dada $f(x,y)=\cos(x^2y)+x^3y+e^{xy^2}$, verificar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

12. Si $z=(3x+5y)^2+e^{3x+5y}+\sin(3x+5y)$, demostrar que $5z_{xx}-3z_{yx}=0$.

13. Si $f(x,y)=\sin(x-y)$, probar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

14. Dado $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, probar que $z_{xx}+z_{yy}=0$.

15. Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

    Demostrar que: $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}\neq\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$.

16. Sea $f(x,y)=x^2+8y$. Demostrar que f es diferenciable en el punto (1,2).

17. Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

    ¿Es f diferenciable en (0,0)?

18. Probar que la función del ejercicio 15, es diferenciable en (0,0).

19. Sea $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Demostrar que f es diferenciable en (0,0), a pesar de que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en (0,0).

20. Calcular aproximadamente, usando diferenciales, el valor de:

    a) $2,98 \cdot 4,04\sqrt{(2,98)^2+(4,04)^2}$.
    b) $2,97 \cdot \ln 0,98$.
    c) $4,98 \cdot e^{0,01}$.
    d) $\sqrt[5]{(3,8)^2+2\cdot(2,1)^3}$.
    e) $1,02^{3,01}$.

21. El período T de oscilación del péndulo viene dado por: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, donde L es la longitud del péndulo y g, la aceleración de la gravedad. Al medir L y g, se cometen los errores ΔL y Δg, respectivamente. Probar que el error cometido al determinar T, viene, entonces , dado por: $\pi\dfrac{g\Delta L - L\Delta g}{g\sqrt{Lg}}$, aproximadamente.

22. En cada caso, obtener, utilizando la regla de la cadena, las derivadas parciales indicadas:

    a) $z = x^2 - y^2$; $\quad x = r\cos\theta$; $\quad y = r\sin\theta$; hallar: $\dfrac{\partial z}{\partial r}$.
    b) $u = e^{xyz}\cos xyz$; $\quad x = r^2+t^2$; $\quad y = t^2+r$; $\quad z = r+t$; hallar: $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
    c) $u = xe^{-y}$; $\quad x = \arctan(est)$; $\quad y = \ln(ers+4st)$; hallar: $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
    d) $z = e^{xy^2}$; $\quad x = t\cos t$; $\quad y = t\sin t$; hallar $\dfrac{dz}{dt}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
    e) $u = 2x^2 - yz + xz^2$; $\quad x = 2\sin t$; $\quad y = t^2-t+1$; $\quad z = 3e^{-t}$; hallar $\dfrac{du}{dt}(0)$.
    f) Si $z = u^3+2u-3$; $\quad u = s^2+t^2-4$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ para $s=2$, $t=1$.
    g) Si $z = \frac{2x+y}{y-2x}$; $\quad x = 2u-3t$; $\quad y = u+2t$, hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial t}$ para $u=2$, $t=1$.

23. Sea $z = f(x^2y)$, donde f es una función diferenciable. Demostrar que:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

24. Sea $z = f\Big(\dfrac{x-y}{y}\Big)$, f una función diferenciable. Probar que:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

25. Sea $u = f(x+at) + g(x-at)$, donde a es una constante; f y g, funciones diferenciables dos veces. Probar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

26. Sea $u = f(x, y, z)$, donde f tiene sus derivadas parciales continuas; además: $x = \ln(s^2 + t^2 + 1)$, $\quad y = t^2 + s^2$, $\quad z = \sin(s^2 + t^2)$. Demostrar que: $s\dfrac{\partial u}{\partial t} - t\dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$.

27. Sea $z = xy + xf\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, donde f es derivable. Demostrar que:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

28. Sea f una función diferenciable y α una constante tal que: $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$x_o\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} + y_o\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = \alpha f(x_o, y_o).$$

29. Aplicar el resultado del ejercicio anterior, para verificar que si $f(x, y) = x^4y^3 \arcsin\dfrac{y}{x}$, entonces $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 7f$.

30. Si $z^3 - xz - y = 0$, hallar, por derivación implícita, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$.

31. Dada la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$, hallar un valor de c, de modo que para $y = e$ y $x = 0$, se tenga $z = 2$. luego, encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0, e)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0, e)$.

32. Sean u y w, funciones de x y y, tales que: $\begin{cases} x + y^2 + 2uw = 0 \\ x^2 - xy + y^2 + u^2 + w^2 = 0 \end{cases}$

    hallar:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ *b*) $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

33. Si $u = \dfrac{x+y}{1-xy}$ y $w = \arctan x + \arctan y$, verificar que $\dfrac{\partial(u,w)}{\partial(x,y)} = 0$.

34. Si $x = u - r + w$, $\quad y = u^2 - r^2 - w^2$, $\quad z = u^3 + r$, calcular $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,r,w)}$ en el punto (-1,2,0).

35. Sea $f(x,y) = x^2 - 8y$. Hallar:

    a) El gradiente de f, en el punto (3,0).

    b) La derivada direccional de f, en el punto (3,0), en la dirección del vector $\vec{u} = \frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}$.

    c) ¿En cuál dirección, la derivada direccional de f, en el punto (3,0), es máxima? Hallar ese máximo valor.

36. Dada $f(x,y) = 2\sqrt{4x^2 + 9y^2}$, hallar la derivada direccional de f, en el punto (3,2), en la dirección del vector $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}$.

37. Hallar el ángulo entre el gradiente de f, en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, y el gradiente de la misma f, en el punto (1,1), dado que $f(x,y) = \ln \dfrac{y}{x}$.

38. De una función $z = f(x,y)$, se sabe que, en el punto (1,2), la derivada direccional: en la dirección que va desde dicho punto al (2,3), vale $2\sqrt{2}$; mientras que en la dirección que va desde el (1,2) al (1,0), vale -3. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

39. Hallar ∇u, en el punto (3,2,1), si $u = xyz$.

40. Determinar la derivada de la función $z = \dfrac{2x^2 - 2xy - 4y^2}{\sqrt{3}}$, en el punto (1,2) y en la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 60^o.

41. Supongamos que la temperatura T, en cualquier punto (x,y,z) del espacio, viene dada por: $T(x,y,z) = \dfrac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$. Encontrar la dirección y la magnitud, de la máxima rapidez de cambio de T, en el punto (2,2,1).

42. Consideremos el elipsoide $x^2+2y^2+3z^2=21$. Hallar la ecuación de la recta normal a dicha superficie, en el punto $(1,1,\sqrt{6})$.

43. ¿Cuáles son los puntos del elipsoide del ejercicio anterior, en donde los planos tangentes son paralelos al plano $x+4y+6z=0$?

44. Demostrar que todo plano tangente al cono $z^2=x^2+y^2$, pasa por el origen.

45. Hallar en la superficie $x^2+y^2-z^2-2y=0$, los puntos en que las rectas normales son paralelas al eje OY.

46. Determinar la ecuación de la recta tangente, en el punto (1,1,1), a la curva de intersección del plano $x+y+z=3$, con el hiperboloide $x^2-y^2+2z^2=2$.

47. ¿Qué ángulo forman, al cortarse, el cilindro $x^2+y^2=4$ y la esfera $(x-2)^2+y^2+z^2=4$, en el punto $(1,\sqrt{3},0)$?

48. Desarrollar, por la formula de Taylor, la función $f(x,y)=2x^2+3xy+4y^2-7x-11y+10$, alrededor del punto (1,1).

49. Desarrollar, por la formula de Taylor, hasta los términos de tercer orden, inclusives, la función $f(x,y)=e^y\sin x$, en un entorno del origen.

50. Desarrollar $\ln(x+y)$, en potencias de $x-1$ y $y-2$, hasta los términos de segundo grado, inclusives.

51. Sea $f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\arctan\dfrac{y}{x}$, donde $x>0$. Verificar que $f_x(1,1)=f_y(1,1)=0$. Clasificar el punto crítico (1,1).

52. Dada $f(x,y)=2x^4-x^2+y^2-2y$, determinar los extremos relativos de f.

53. Demostrar que los únicos máximos y mínimos, posibles, de $z=x^3+y^3-9xy+27$, se producen en (0,0) ó (3,3). Comprobar que (0,0) no es punto de máximo ni de mínimo. Clasificar el punto crítico (3,3).

54. Hallar y clasificar los puntos críticos de:

a) $z = e^{-x^2-y^2}$.

b) $z = x^4 - y^4$.

c) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

d) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

e) $z = x^2 - 2xy + y^2$.

f) $z = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

g) $z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

h) $z = \ln(x^2 + 2x + y^2 + 5)$.

55. Consideremos la superficie definida por $z = xye^{-2x-3y}$.

    a) Hallar el punto, (x_o, y_o), del primer cuadrante, que hace máximo el valor de z.

    b) Determinar el plano, tangente a la superficie en el punto de máximo, (x_o, y_o, z_o), hallado en *a*).

56. Dividir el número 60, en tres sumandos no negativos, de modo que el producto de dichos sumandos sea máximo.

57. Hallar las dimensiones del paralelepipedo rectángular, de volumen máximo, que se puede inscribir en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

58. Encuentre todos los paralelepípedos rectangulares de volumen igual a 27 cm^3, hallar aquél cuya superficie total sea la menor posible.

59. Hallar la distancia mínima del origen al cono $z^2 = x^2 + (y - \sqrt{2})^2$.

60. Encontrar la distancia mínima del punto (5,5,0) al plano $-2x+2y-z-5 = 0$.

61. Los cursos de dos ríos representan, aproximadamente, una parábola, $y = \frac{1}{4}x^2$, y una recta, $x - y = 3$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por cuáles puntos habrá que trazarlo?

62. *a*) Hallar la mínima distancia, del punto (0,5), a la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$.

    b) Luego, hallar la mínima distancia, del punto (0,-5), a la misma parábola.

63. Encontrar y clasificar los puntos críticos de $z = x^2 + 24xy + 8y^2$, con la condición $x^2 + y^2 = 25$.

64. Encontrar, en la curva $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \end{cases}$ el punto más cercano al origen.

65. La temperatura T, en un punto (x, y, z) del espacio, viene dada, supongamos, por $T(x, y, z) = 400xyz^2$. Calcular la temperatura máxima de la esfera unitaria: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

66. Usando multiplicadores de Lagrange, resolver el siguiente ejercicio: Una caja rectángular, sin tapa, debe tener un volumen de 32 dm^3. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones, de manera que su superficie total sea mínima?

67. Demostrar que la mínima distancia, del origen a la curva de intersección de las superficies: $xyz = a$ y $y = bx$, donde $a > 0,\ \ b > 0$, es $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{a(b^2+1)}{2b}}$.