INTEGRACIÓN MULTIPLE

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (x^2+2y)dxdy.$

   b) $\displaystyle\int_3^4\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}dydx.$

   c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx.$

   d) $\displaystyle\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x^2}{y^2}dydx.$

   e) $\displaystyle\int_{-3}^3\int_{y^2-4}^5 (x+2y)dxdy.$

   f) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{a\sin\varphi}^a rdrd\varphi.$

   g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi drd\varphi.$

   h) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dydx.$

   i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 xydxdy.$

   j) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 (x+y)dydx.$

   k) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{4x^2}{1+y^2}dydx.$

   l) $\displaystyle\int_o^{\ln 3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^y\sin xdxdy.$

2. Escribir las ecuaciones de las líneas que limitan los recintos a que se extienden las integrales dobles que se indican más abajo y dibujar estos recintos:

   a) $\displaystyle\int_{-6}^2\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dxdy.$

   b) $\displaystyle\int_1^3\int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dydx.$

   c) $\displaystyle\int_0^4\int_y^{10-y} f(x,y)dxdy.$

   d) $\displaystyle\int_1^3\int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dxdy.$

   e) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dxdy.$

   f) $\displaystyle\int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dydx.$

3. Colocar los límites de integración, en uno y otro orden, en la integral doble $\displaystyle\iint_{(S)} f(x,y)dA$ para los recintos S que a continuación se indican.

   a) S es un rectángulo cuyos vértices son: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;1)$ y $C(0;1)$.

   b) S es un triángulo cuyos vértices son: $O(0;0)$, $A(1,0)$ y $B(1;1)$.

   c) S es un trapecio cuyos vértices son: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(1;1)$ y $C(0;1)$.

d) S es un paralelogramo cuyos vértices son:$A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(2;7)$ y $D(1;5)$.

4. Invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)f(x,y)dydx.$

c) $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dydx.$

d) $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{2ax-x^2} f(x,y)dxdy.$

e) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dydx.$

f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dxdy.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dxdy.$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)dydx.$

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \int_0^x f(x,y)dydx + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dydx.$

5. Hallar el valor de:

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^y dxdy.$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3dydx.$

c) $\displaystyle\int_1^e \int_0^y \frac{1}{x^2+y^2}dxdy.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\cos x} y\sin xdydx.$

6. Escribir una integral equivalente a la dada, pero con el orden de integración invertido:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 dxdy.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dxdy.$

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^x} dydx.$

d) $\displaystyle\int_0^3 \int_{2x^2}^{6x} x^5ydydx.$

e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} ydxdy.$

f) $\displaystyle\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx.$

7. En cada caso, dadas $f(x,y)$ y la región R, hallar $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA$:

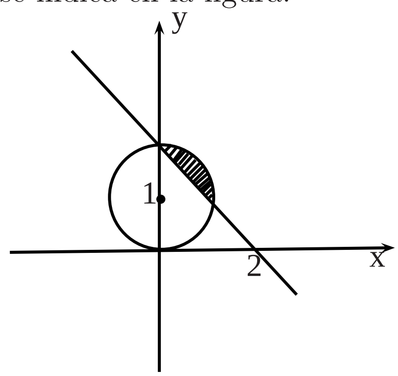
a) $f(x,y) = xy$; R está limitada por las rectas $x=0$; $y=0$; $y=1$.

b) $f(x,y) = 1$; R está limitada por las rectas $x = 0$; $\quad x = 2$; $\quad y = 1$, y la curva $y = e^x$.

c) $f(x,y) = x^2y$; R está limitada por la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y la recta $y = 2$.

d) $f(x,y) = xe^y$; R es el triángulo cuyos vértices son los puntos (0,0), (1,0) y (1,1).

e) $f(x,y) = x$; R está limitada por la circunferencia, de centro (0,1) y radio 1, y por la recta que pasa por los puntos (0,2) y (2,0), tal como se indica en la figura.



f) $f(x,y) = x + y$; R está limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = x$.

g) $f(x,y) = 2 - x$; R está limitada por la circunferencia de centro el origen y radio 2.

h) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$; R está limitada por la recta $y = 0$, y la curva de ecuación $y = \sqrt{1 - x^2}$.

i) $f(x,y) = 1$; R es la región, a la izquierda de la recta $x = 1$, entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$.

j) $f(x,y) = x$; R es la región en el primer cuadrante, limitada por la curva $y = \dfrac{16}{x}$, y las rectas $y = x$, $\quad y = 0$, $\quad x = 8$.

k) $f(x,y) = e^{x^2}$; R es la región encerrada por las rectas $y = \dfrac{x}{3}$, $y = 0$, $\quad x = 3$.

8. En cada caso, hallar el volumen del sólido descrito:

a) El sólido, en el primer octante, limitado por el cilindro $z = x^2$, y los planos: $x = 2$; $z = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 3$.

b) El sólido bajo el plano $x + y + z = 9$ y sobre la región R limitada por las rectas $y = 0$; $x = 3$; $y = \frac{2}{3}x$.

c) El sólido bajo la gráfica del cilindro $y^2 + 4z = 16$ y sobre la región $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4\}$.

d) El sólido bajo el plano $z = 4x$ y arriba de la región limitada, en el primer cuadrante, por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

e) El sólido, en el primer octante, limitado por los planos coordenados y los cilindros: $x^2 + z^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 16$.

9. Dibujar un sólido tal que su volumen venga expresado por: $\displaystyle\int_0^4 \int_0^x \sqrt{16 - x^2}\,dydx$. Calcular dicho volumen.

10. Calcular, usando coordenadas polares, $\displaystyle\iint_R e^{x^2+y^2} dA$, donde R es el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

11. Hallar $\displaystyle\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$, donde R es la región, en el primer cuadrante, limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 1$.

12. Calcular:

    a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x^2 + y^2)\,dydx.$ *b*) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy.$

13. Hallar el volumen del elipsoide $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

14. Hallar el volumen del sólido formado al cortar el cilindro macizo $x^2+y^2 \leq 1$, de la esfera maciza $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

15. Establecer una integral doble que dé el volumen del sólido limitado por el plano XOY y las superficies: $x^2 + y^2 = 3z$, $x^2 + y^2 = 9$. Calcular dicho volumen.

16. Calcular, usando integrales dobles, el área de la región limitada por:

    a) Las parábolas $y = x^2 - 4, \quad y = \dfrac{x^2}{4} - 1.$

    b) La elipse $x^2 + 4y^2 = 36.$

    c) La recta $x + y = 9$, la parábola $y^2 = 12x$ y el eje OX, sabiendo que la región está en el primer cuadrante.

    d) Las curvas $x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x$, y las rectas $y = x, \ \ y = 0.$

17. Dibujar la región cuya área viene dada por $\displaystyle\int_0^2 \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy$, y calcular ésta.

18. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy.$

19. Hallar el volumen del sólido bajo el cilindro $y^2 + 4z = 16$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 16.$

20. Encontrar el volumen del sólido, en el primer octante, limitado por los planos: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 4x + 3y = 12$, y el cilindro $x^2 + z = 4.$

21. Hallar el volumen del sólido, en el primer octante, limitado por los planos $z = 0, \quad y = x$ y los cilindros $x + z^2 = 1, \quad x = y^2.$

22. Hallar el valor de $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 yzdxdydz.$

23. Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta dr d\theta d\varphi$

24. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} xdzdydx.$

25. Hallar $\displaystyle\iiint_S 2ydv$ si S es la región limitada por el tetraedro determinado por los planos: $x = 0; \ y = 0; \ z = 0; \ 12x + 20y + 15z = 60.$

26. Calcular $\displaystyle\iiint_S (5xy+15z)dv$, si S es la región, sobre el plano XOY, limitada por los palnos $x = 0; \ z = 0; \ y = 0; \ x + y = 3$, y el cilindro $x^2 + z^2 = 9.$

27. Mediante integración triple hallar el volumen del sólido, en el primer octante, limitado inferiormente por el plano $z = y$, y lateralmente por el cilindro $x = y^2$, junto con el plano $x = 1$.

28. Calcular, usando coordenadas convenientes:

    $a)$ $\displaystyle\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydxdz$

    $b)$ $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

29. Se tiene un sólido, en el primer octante, limitado por los planos coordenados, el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y el plano $z = 4$. Hacer un dibujo del sólido y calcular su volumen, usando integrales triple, en el sistema de coordenadas más conveniente.

30. Calcular $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, donde S es la región limitada por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

31. El volumen de cierto sólido está expresado por la integral triple $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$. Dibujar dicho sólido.

32. Calcular, mediante integrales triples, el volumen de una esfera (maciza) de radio $\sqrt[3]{3}$.

33. Encontrar el volumen del sólido, limitado por el plano $z = 3$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

34. Hallar el volumen del sólido, en el primer octante, limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + 2z = 4$, y los palnos coordenados.

35. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ y el cilindro $x^2 + z = 4$.

36. Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = x$ y el plano $x = 2$.

37. Calcular el volumen encerrado por las superficies: $z = 8 - x^2 - y^2$, y $z - x^2 - 3y^2 = 0$