UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA
Facultad de Ciencias Forestales Y Ambientales
Departamento de Botanica y Ciencias Basicas
Matematicas I
Prof. Wilson Herrera

Guía de Matrices

1. Escribir la matriz $A = [a_{ij}]_{3x3}$ si $a_{ij} = \begin{cases} 2i, & \text{para} \quad i = j \\ 3j, & \text{para} \quad i \neq j. \end{cases}$

2. Escribir la matriz $A = [a_{ij}]_{3x2}$ si $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad i < j \\ 4, & \text{para} \quad i = j \\ 1, & \text{para} \quad i > j. \end{cases}$

3. Escribir la matriz $A = [2i - j]_{4x4}$. Señalar los elementos de la diagonal principal.

4. Escribir la matriz diagonal $A = [a_{ij}]_{3x3}$ si $a_{nn} = n\lambda$.

5. Una matriz diagonal se dice *escalar*, cuando los elementos de la diagonal son todos iguales. Escribir una matriz escalar de orden 4 si $a_{ij} = -1$.

6. Escribir la matriz $A = [a_{ij}]_{3x3}$ si $a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{para} \quad i \geq j \\ 0, & \text{para} \quad i < j. \end{cases}$
   Decir que tipo de matriz es.

7. Una matriz cuadrada se dice de *banda*, cuando los únicos elementos distintos de cero están ubicados a lo largo de una banda que sigue la diagonal principal y que generalmente la tiene como centro. escribir, de manera general, la matriz de banda de orden 4 con dos líneas paralelas a la diagonal y dispuestas a ambos lados de ésta.

8. Hallar la condición que deben satisfacer X y Y para que se cumpla la igualdad
$$\begin{pmatrix} x^2 - xy \\ xy - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

Hallar:

a) $A + B$

b) $A - B$

c) La matriz X si $A + 3B - 5X = 0$

10. Resolver la ecuación

$$X - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Resolver la ecuación

$$2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

12. Dadas las matrices

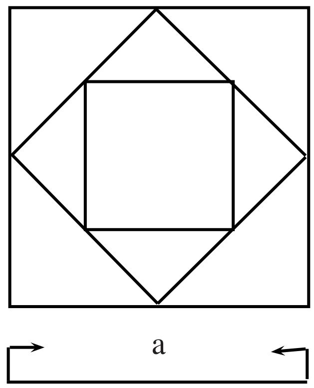
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

resolver los sistemas

a) $\begin{cases} 2X + Y = 2A \\ X + 3Y = A - B \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{X - Y + 2A}{3} = Y + B \\ \\ \dfrac{3X + 2Y}{4} = X - A. \end{cases}$

13. Los cuadrados de la figura han sido construidos uniendo los puntos medios de los lados del precedente. Este procedimiento puede continuarse indefinidamente, escribir las sumas de las áreas de los cinco primeros de manera explcita y abreviada.



14. Deducir que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

    Sugerencia. $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$

15. Deducir que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

16. Probar que si $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k + c), \;\; c \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$

17. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix},$$

    probar que $AB = 0$ y $BA = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

18. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

    mostrar que $AB = AC$. Este resultado nos dice que $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$.

19. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

    Calcular AB y BA.

20. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular $[(A + B^t)(A^t - B)]^t$.

21. Probar que $(ABC)^t = C^t B^t A^t$.

22. Calcular A^3 si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

23. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X de orden 2 tal que $AX = I$.

24. Hallar los desarrollos de

    a) $(A + B)^2$

    b) $(A - B)^2$

    c) $(A + B)^3$.

25. ¿Qué condición deben cumplir A y B para que se cumplan las igualdades

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ y } (A + B)(A - B) = A^2 - B^2?$$

26. Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

27. Entre las tres matrices siguientes hay una simétrica y una antisimétrica, identificarlas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Probar que toda matriz cuadrada A puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

29. Probar que si A y B son conmutativas, entonces A^{-1} y B^{-1} también lo son.

30. Para A y B matrices invertibles, resolver la ecuación $(AB)X = B$

31. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 2x - y + z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= -9 \\ 5x + 5y - z &= 8 \end{cases}$$

32. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= -4 \\ 3x + 2y + z &= 2 \\ 5x + y + 4z &= -2 \end{cases}$$

33. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 5 \\ 3x + y - 2z &= 2 \\ 2x - 4y + 6z &= 1 \end{cases}$$

34. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 2x + y - 3z &= -1 \\ x - 4y + 2z &= 2 \\ 5x - 2y - z &= 6 \\ 3x + 6y + 8z &= -4 \end{cases}$$

35. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 2x - y + 6z &= 5 \\ 4x - 3y + 5z &= -1 \end{cases}$$

36. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 3 + 2y + 3z &= 0 \\ 5x - 2y + z &= 0 \end{cases}$$

37. Dado el sistema
$$\begin{cases} x + 3y + mz &= 4 \\ x + 4y - mz &= 1 \\ 2x + y + mz &= 2 \end{cases}$$
decir para cuales valores de m es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado.

38. Discutir el sistema respecto a a
$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ x + 3y + az &= 5 \\ 2x + y - az &= 3 \end{cases}$$

39. Estudiar el sistema

$$\begin{cases} x + ay &= a \\ ax + y &= a \end{cases}$$

En los ejercicios 40 al 45 decir si las matrices dadas son linealmente dependientes o linealmente independientes.

40.

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

41.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

42.

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

43.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

44.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

45.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

46. Probar que si las matrices $A_1, A_2, \cdots, A_n$, son linealmente independientes, entonces k de ellas también lo serán.

47. Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. Decir por qué las matrices A, B y $2A - B + C$ son linealmente independientes y verificarlo.

48. Probar que las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

constituyen una base de V_3 y expresar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{como combinación lineal de ellas.}$$

49. Sin resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 3z &= 4 \\ 2x + y - 4z &= 0 \\ 5x - 2y + z &= 3 \end{cases}, \text{probar que tiene solución única.}$$

50. Sin resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z &= 4 \\ x + y - 3z &= 1 \\ 4x + 2y + 8z &= 3 \end{cases}, \text{probar que no tiene solución única.}$$

51. Hallar la característica de las matrices

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$d)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

52. Sin resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z + t &= -2 \\ 3x - 2y + 5z - 8t &= -3 \\ x + 3y - 2z + t &= -1 \end{cases}, \text{probar que tiene solución.}$$

53. Sin resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 3 \\ 4x - 3y + 5z &= 2 \\ 2x + y + 5z &= 3 \\ y + z &= 5 \end{cases}, \text{decir si tiene o no solución.}$$

54. Sin resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 5y - 4z &= 0 \\ 4x + 2y + 6z &= 0 \end{cases}, \text{decir si tiene solución no trivial.}$$

55. Dadas las matrices

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

decir cuales son invertibles y hallar la inversa.

Escribir los sistemas de los ejercicios 56 al 58, en las formas.

$X_1A_1 + X_2A_2 + \cdots + X_nA_n$ y $AX = B$.

56. $\begin{cases} 2u + v + 5w &= 3 \\ u - 3v + 2w &= 2 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x - 2y - 5z &= 1 \\ 4x + y - 6z &= 4 \\ 3x + 5y + z &= 2 \end{cases}$

58. $\begin{cases} 3x + y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 6x - 5y - 4z &= 2 \\ y + z &= 4 \end{cases}$

En los ejercicios 59 al 61 calcular los determinantes

59. $\begin{vmatrix} x & 2 & 4+x \\ y & 1 & 2+y \\ z & 3 & 6+z \end{vmatrix}$

60. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

61. $\begin{vmatrix} a & a & b+c \\ b & a+c & b \\ a+b & c & c \end{vmatrix}$

Los ejercicios 62 al 65, se refieren al determinante

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Llamado de *Vandermonde*.

62. Probar que si dos elementos de la n-upla $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son iguales, el determinante es nulo.

63. Probar que si un elemento de la n-upla $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es nulo, el determinante es igual a un determinante de Vandermonde de orden $n-1$ multiplicado por un factor.

64. Calcular

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

65. Calcular

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 2a & 4a^2 \\ 1 & 3a & 9a^2 \end{vmatrix}$$

66. Sin calcular los determinantes, probar la igualdad

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a & -a & a \\ a^2 & -a^2 & -a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

67. Probar que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ x & x & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

68. Sin calcular el determinante, probar que es múltiplo de 6

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

69. Probar que

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}, \text{ es un cuadrado perfecto.}$$

70. Determinar la relación entre a y b para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a+b \\ a & a+b & b \\ a+b & b & b \end{pmatrix}, \text{ sea invertible.}$$

71. Mostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+x \end{pmatrix}, \text{ es invertible si } \ x \neq -1.$$

72. Escribir la matriz inversa de la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ a_{ii} \neq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

73. Una matriz cuadrada A se dice *ortogonal* si $A^tA = AA^t = I$ o equivalentemente si $A^t = A^{-1}$. Probar que el determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.

74. Determinar las matrices ortogonales de segundo orden.

75. Probar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ es ortogonal.}$$

76. Probar que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Usando la regla de Cramer, resolver los sistemas propuestos en los ejercicios 77 al 79.

77.

$$\begin{cases} 2x + 5y - 6z &= 1 \\ x - 2y + z &= 5 \\ 4x + y + z &= 1 \end{cases}$$

78.

$$\begin{cases} A + B + C & = & 1 \\ A + 3B - C & = & 0 \\ -15A + 5B - 3C & = & 3 \end{cases}$$

79.

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta & = & 6 \\ \alpha - 2\beta + \gamma & = & -5 \\ 3\beta - \gamma & = & 8 \end{cases}$$