FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Prof. Wilson Herrera.

1. Dada $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$, hallar:

   a) $f(0,1)$; $f(1,0)$; $f(-2,1)$; $f(1+h,0)$; $f(0,1+k)$; $f(x,x)$; $f(-y,-y)$.

   b) La expresión más sencilla para el cociente $\dfrac{f(x_o+h,y_o) - f(x_o,y_o)}{h}$, donde $h \neq 0$.

   c) Igual que en *b*), pero ahora con el cociente $\dfrac{f(x_o,y_o+k) - f(x_o,y_o)}{k}$, donde $k \neq 0$.

2. Sea $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

   a) Hallar el dominio más amplio correspondiente a dicha ley; representarlo en el plano XOY.

   b) Encontrar la expresión más simple para $\dfrac{f(2,1+k) - f(2,1)}{k}$, con $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

3. Si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

   hallar $\dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$, donde $h \neq 0$.

4. En cada caso, hallar el dominio más amplio correspondiente a la ley dada y representar aquél en el plano XOY.

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

   b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$.

   c) $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.

   d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y}$.

   e) $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$.

f) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$.

g) $f(x,y) = \sqrt{64-x^2} + \ln(y^2-25)$.

h) $f(x,y) = \arcsin x + \arccos y + \sqrt{y-x^2}$.

i) $f(x,y) = \ln(x^2-6x+y^2)$.

j) $f(x,y) = \dfrac{1}{e^{xy}-1}$.

k) $f(x,y) = \dfrac{7}{(x+4)^2+y^4}$.

l) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

m) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

n) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-x}}$.

ñ) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-x^2}}{y}$.

o) $f(x,y) = x \cdot \ln(xy-1)$.

5. Graficar aproximadamente, las siguientes funciones (los dominios se supone que son los más amplios y el conjunto de llegada, los reales):

   a) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$.

   b) $z = f(x,y) = x^2$.

   c) $z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

   d) $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

   e) $z = f(x,y) = -x-y+1$.

   f) $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$.

6. Igual que en el ejercicio 5, reconociendo que las superficies correspondientes se obtienen al girar una curva conocida, alrededor del eje OZ.

   a) $z = f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$.

   b) $z = f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

c) $z = f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

d) $z = f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

7. En cada uno de los siguientes casos, concluir que el límite indicado no existe:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{x^2+(y-1)^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x+y^2}{x^3+y^2}$.

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7y^7}{x^{14}+y^{14}}$.

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^2}$.

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cos y}$.

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{xy}$.

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y}$.

8. Utilizando la definición de límite, demostrar que:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x+2y) = 5$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^2-3y) = 4$.

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} (2x^2+y^2+1) = 3$.

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,7)} \frac{x}{1+y^2} = 0$.

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} xy = 1$.

9. Calcular, usando las propiedades correspondientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt{x^3+2y+49}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-7,1)} \sqrt[3]{\frac{1}{4x+y}}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(6,3)} \arctan\frac{2y}{x}$.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,8)} \frac{x^2}{\ln[x^2+(y-8)^2]}$.

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,e+1)} \ln(xy-1)$.

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

10. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases}$

¿Es f continua en (0,0)?

11. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$
¿Posee f alguna discontinuidad?

12. Dada la ley $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+(y-10)^2}$, notamos que el punto (0,10) no pertenece al dominio de aquella. Así que tal f no es continua en (0,10). ¿Es evitable dicha discontinuidad?

13. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0, \\ ? & \text{si } x+y = 0, \end{cases}$
Demostrar que es posible sustituir el signo de interrogación por una expresión que hace que f sea continua en todo el plano.

14. Recordando que la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$
es continua en todo $\mathbb{R}$, y que la composición de funciones continuas es una función continua, concluir que los límites siguientes existen e indicar su valor:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}.$ *b*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

15. Indicar el dominio de continuidad para la función dada por:
$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

16. Igual que en el ejercicio 13, pero ahora, con
$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(xy) & \text{si } (x,y) \neq (0,y), \\ ? & \text{si } (x,y) = (0,y). \end{cases}$