Facultad de Ciencias Forestales Y Ambientales
Departamento de Botanica y Ciencias Basicas
Matematicas I
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES MERIDA VENEZUELA
Prof. Wilson Herrera

Vectores

1. Dados los puntos $P(1,2)$, $Q(-2,2)$ y $R(1,-6)$:

   a) Representarlos en el plano XOY.

   b) Hallar la magnitud de cada uno de los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$y $\overrightarrow{PR}$.

   c) Encontrar el vector fijo equivalente a $\overrightarrow{QP}$.

   d) ¿ Cuál es el punto S tal que $\overrightarrow{PS}$ tiene igual dirección que $\overrightarrow{PQ}$, con $\|\overrightarrow{PS}\| = 2\|\overrightarrow{PQ}\|$?

2. Considere los vectores: $\widehat{\imath} =< 1, 0 >$, $\widehat{\jmath} =< 0, 1 >$, $\overrightarrow{s} =< 3, 4 >$ y $\overrightarrow{t} =< 4, -1 >$,

   a) Expresar, como combinación lineal de $\widehat{\imath}$ y $\widehat{\jmath}$, cada uno de los vectores: $\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{t}$, $2\overrightarrow{s} + \overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{s} - \overrightarrow{t}$.

   b) Encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección de $\overrightarrow{s}$, pero que sea opuesto al mismo.

   c) Si λ es un número real entre 0 y 1, i.e, $0 < \lambda < 1$, ¿Cual de las siguientes relaciones es la correcta: $\|\lambda\overrightarrow{s}\| = \|\overrightarrow{s}\|$, $\|\lambda\overrightarrow{s}\| > \|\overrightarrow{s}\|$, $\|\overrightarrow{s}\| > \|\lambda\overrightarrow{s}\|$?

3. Dados los puntos $A(1,2,1)$ y $B(0,4,-1)$:

   a) Representarlos en $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar la longitud de $\overrightarrow{AB}$.

c) Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento AB.

4. Dado el punto $P(1,0,2)$, determinar $Q(x,y,z)$, de modo que $\overrightarrow{PQ}$ sea equivalente al vector cuyo punto inicial es $A(1,-1,-4)$ y punto final $B(2,1.-3)$.

5. Dado $\overrightarrow{A} = x\widehat{\imath} + 2\widehat{\jmath} - 3\widehat{k}$, hallar el valor negativo de x tal que $\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{38}$.

6. Hallar el valor de c, para que los vectores $\overrightarrow{u} =< 5,2 >$ y $\overrightarrow{w} =< -4,c >$, sean perpendiculares entre sí.

7. Determinar si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

   a) $< -1,3,-3 >$ y $< 3,3,2 >$

   b) $< 1,0,0 >$ y $< 0,1,0 >$

   c) $2\widehat{\imath} + 8\widehat{\jmath} + 4\widehat{k}$ y $< -1, -\frac{1}{4}, 1 >$

   d) $< 4,8,2 >$ y $< 0,0,0 >$

8. Dados los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, demostrar que:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \text{ y } \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} \text{ son perpendiculares } \Leftrightarrow \|\overrightarrow{A}\| = \|\overrightarrow{B}\|$$

9. Hallar los valores de x, para los cuales:

   a) El ángulo entre $\overrightarrow{u} =< x,1,1 >$ y $\overrightarrow{w} =< 1,x,1 >$ resulta igual a $\frac{\pi}{3}$ radianes.

   b) Los vectores $\overrightarrow{u} = x\widehat{\imath} + \widehat{\jmath} - 3\widehat{k}$ y $\overrightarrow{w} = 2x\widehat{\imath} - 10x\overrightarrow{\jmath} - 4\widehat{k}$, son perpendiculares.

10. Hallar el ángulo β entre $\overrightarrow{OA}$ y el eje OY, donde $\overrightarrow{A} =< 1, \sqrt{2}, 1 >$

11. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

12. En cada caso, encuentre los cosenos directores del vector dado:

a) $\overrightarrow{u} =< -6, 8 >$ b) $\overrightarrow{v} = \widehat{\imath} + \widehat{\jmath} + \sqrt{2}\widehat{k}$

13. ¿Existe algún vector, en $\mathbb{R}^3$, cuyos ángulos directores sean: $\alpha = 45^o$, $\beta = 30^o$, $\gamma = 120^o$

14. Igual pregunta que en el ejercicio anterior, pero con: $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

15. Encontrar dos vectores unitarios, en $\mathbb{R}^3$, tales que cada uno de ellos: forme un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes con el vector $\widehat{\jmath}$ y sea perpendicular al vector $\overrightarrow{A} =< 0, -1, 1 >$.

16. Hallar un vector, de longitud 8, tal que: sea paralelo al plano XOY; el ángulo α, entre el eje OX y el vector buscado sea igual a 120^o, mientras que el ángulo β, con el eje OY sea 30^o.

17. En el triángulo ABC, cuyos vertices son los puntos $A(1, 0, 3)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 3)$ y $C(1, 0, \frac{7}{2})$, hallar los ángulos internos y las longitudes de los lados.

18. Dados los vectores $\overrightarrow{A} =< 1, 0, -5 >$, $\overrightarrow{B} =< -2, 1, 10 >$ y $\overrightarrow{C} = -5\widehat{\imath} - \widehat{k}$, verificar que $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{C}$

19. Hallar los vectores unitarios, perpendiculares a $\overrightarrow{P} =< 1, -1, 0 >$ y $\overrightarrow{Q} =< 1, 1, 4 >$, simultáneamente.

20. Si $\overrightarrow{OA} = 2\widehat{\imath}$ y $\overrightarrow{OB} = 4\widehat{\jmath} + 3\widehat{k}$, hallar:

    a) El área del paralelogramo de lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

    b) El área del triángulo OAB.

21. Dados los vectores: $\overrightarrow{A} =< 1, -2, 3 >$, $\overrightarrow{B} =< 3, 3, -6 >$ y $\overrightarrow{C} =< 1, -3, 4 >$, encontrar:

    a) El volumen del paralelepípedo de aristas $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$.

    b) El volumen del tetraedro con aristas $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$.

22. Sean $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, vectores en $\mathbb{R}^3$, tales que $\|\overrightarrow{A}\| = 2$ y $\|\overrightarrow{B}\| = 5$. Hallar el valor de:

$$(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})^2$$

23. Sean $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, vectores en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son paralelos, si y sólo si, $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} =< 0, 0, 0 >$.

24. Usar el resultado del ejercicio anterior, para verificar que los vectores $\overrightarrow{A} =< -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \sqrt{12} >$ y $\overrightarrow{B} =< 2, -6, -12 >$, son paralelos. Luego hallar un r tal que $\overrightarrow{B} = r\overrightarrow{A}$.

25. Sean $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$, vectores en $\mathbb{R}^3$. Probar que

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C})\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{C}$$

26. Basados en el problema anterior y en el problema 23, concluir que si $\overrightarrow{A}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{B}$ como a $\overrightarrow{C}$, entonces $\overrightarrow{A}$ es paralelo a $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}$.

27. ¿Bajo qué condiciones se cumple que

$$\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|?$$

28. Dados $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, vectores en $\mathbb{R}^3$, probar que si $\overrightarrow{C} = \lambda\overrightarrow{A} + \sigma\overrightarrow{B}$, entonces, el volumen del paralelepípedo de aristas $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$, es cero.

29. Sean $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, vectores en $\mathbb{R}^3$, tales que $\|\overrightarrow{B}\| = 1$ y $\|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\| = \sqrt{3}$. Consideremos $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}$. Hallar entonces, $\|\overrightarrow{C}\|$ y el ángulo entre el vector $\overrightarrow{B}$ y el vector $\overrightarrow{C}$.

30. Calcular el área del paralelogramo determinado por el vector $\overrightarrow{u} = \widehat{\jmath} - \widehat{k}$ y el vector $\overrightarrow{w}$, sabiendo que este último es unitario; está en el primer octante y forma ángulos iguales con los eje coordenados.