# ❶ Sistemas Numéricos

Los sistemas digitales manejan información *binaria*, es decir, disponen solamente de dos valores para representar cualquier información. Esto hace que los sistemas digitales sean más confiables que los analógicos, ya que es más fácil distinguir entre dos valores que entre una gran cantidad de ellos. Sin embargo, esto implica que si se desea diseñar o entender sistemas digitales, especialmente aquellos que manejan *información de tipo numérico* es necesario dominar el sistema de numeración binario. En este capítulo se presenta dicho sistema de numeración comenzando con una introducción general sobre sistemas de numeración y haciendo énfasis en los sistemas de numeración binario y hexadecimal, por su aplicación directa a sistemas digitales.

## 1.1.- SISTEMAS NUMÉRICOS

¿Cual es el significado numérico de la representación acostumbrada para los números?. Es decir, por ejemplo ¿qué significa la representación del número N = 1998?

Como es sabido, el número anterior significa 1 millar, más 9 centenas, más 9 decenas, más 8 unidades, es decir, N puede escribirse como

$$N = 1*10^3 + 9*10^2 + 9*10^1 + 8*10^0$$

Es decir, en general, un número cualquiera N de n dígitos escrito como

$$N = A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1A_0 \tag{1.1}$$

donde los dígitos $A_{n-1}$, … $A_1$ $A_0$ son alguno de los diez siguientes: 0, 1, 2, …, 9. También podrá escribirse como

$$N = A_{n-1}*10^{n-1} + A_{n-2}*10^{n-2} + \ldots + A_1*10^1 + A_0*10^0 \tag{1.2}$$

En este punto es conveniente introducir las siguientes definiciones:

**Sistema Numérico**
Se llama sistema numérico al conjunto ordenado de símbolos o dígitos y a las reglas con que se combinan para representar cantidades numéricas. Existen diferentes sistemas numéricos, cada uno de ellos se identifica por su base.

**Dígito**
Un dígito en un sistema numérico es un símbolo que no es combinación de otros y que representa un entero positivo.

**Bit**
Es un dígito binario (Abreviación del inglés **bi**nary digi**t**), es decir, un 0 o un 1.

**Base de un sistema numérico**

La base de un sistema numérico es el número de dígitos diferentes usados en ese sistema.

A continuación se ejemplifican estas definiciones con los sistemas numéricos más comúnmente usados que son:

| Base | Sistema | Dígitos |
|---|---|---|
| 2 | Binario | 0, 1 |
| 8 | Octal | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| 10 | Decimal | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| 16 | Hexadecimal | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F |

**Notación**

En adelante, para distinguir entre los diferentes sistemas numéricos encerraremos entre paréntesis el número y le añadiremos un subíndice, indicando la base que se está usando.

> Sin embargo, si no se usa subíndice se deberá entender que el número está en base diez, a menos que se diga lo contrario.

**Ejemplos:**

$35 = (35)_{10} =$ 35 base 10 (sistema decimal)
$(110100)_2 =$ 110100 base 2 (sistema binario)
$(34)_{16} =$ 34H = 34 base 16 (sistema hexadecimal)

**Notación**

En general cualquier número entero consta de

Parte entera . Parte Fraccionaria

Cualquier número se puede escribir de dos maneras, mediante la notación yuxtaposicional o simplemente posicional (ecuación 1.1) o la notación polinomial (ecuación 1.2).

**Notación posicional**

Al escribir un número con esta notación, la posición de cada dígito nos dice su peso relativo. En general, en la base r un número N de n dígitos en la parte entera y m dígitos en la parte fraccionaria en esta notación se escribe:

$$N = (a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_1\ a_0\ .\ a_{-1}\ \ldots\ a_{-m})_r \qquad (1.3)$$

En esta notación el dígito de más a la izquierda ($a_{n-1}$) es decir, el que “pesa” más se denomina **dígito más significativo (MSD)**, en forma similar al de más a la derecha ($a_{-m}$), es decir, el que “pesa” menos se le llama **dígito menos significativo (LSD)**

**Ejemplo:** $(218.25)_{10}$ $r = 10$, $n = 3$, $m = 2$

**Notación polinominal**

En general cualquier número N puede ser escrito como un polinomio en potencias de la base. Así, la notación polinomial para el número expresado por (1.3) será

$$N = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i r^i = a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + \ldots + a_{-m} r^{-m} \qquad \textbf{(1.4)}$$

**Ejemplo:**

N = $(218.25)_{10}$ = $2*10^2 + 1*10^1 + 8*10^0 + 2*10^{-1} + 5*10^{-2}$

## 1.2.- CONVERSIÓN ENTRE SISTEMAS NUMERICOS

El problema general de convertir un número de su representación en base r a la correspondiente en base q se puede resolver en un sólo paso si se maneja aritmética de base r o de base q, sin embargo, si se quiere usar en el proceso solamente aritmética de base 10 debemos plantearlo en dos etapas como se muestra en la figura 1.1

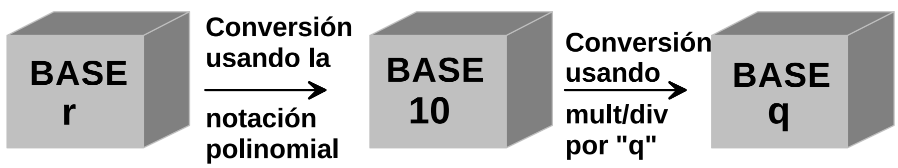


Figura 1.1 Conversión de base r a base q usando aritmética de base 10

### 1.2.1.- CONVERSIÓN DE BASE r A BASE 10

Como lo sugiere la figura 1.1 este caso puede ser tratado directamente usando la notación polinomial y aritmética de base 10. Este procedimiento consiste en usar la expresión (1.4) expresando todas las cantidades involucradas en decimal.

**Ejemplo**. Convertir $(B2A)_{16}$ a base 10.
Expresando el número en notación polinomial usando base 10 para representar cada cantidad involucrada en dicha notación:

$(B2A)_{16}$ = $(1*16^2 + 2*16^1 + 10*16^0)_{10}$
= $(11*256 + 2*16 + 10)_{10}$
= $(2858)_{10}$

**Ejemplo** Convertir $(11011)_2$, a base 10
En forma similar al ejemplo anterior

$(11011)_2$ = $1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$
= 16 + 8 + 0 + 2 + 1
= $(27)_{10}$

(en este caso y en los sucesivos se han obviado los paréntesis y el subíndice 10 para indicar decimal, excepto hasta el resultado final).

**Ejemplo** Convertir $(12101.121)_3$ a decimal

(12101.11)3 = $1*3^4 + 2*3^3 + 1*3^2 + 0*3^1 + 1*3^0 + 1*3\text{-}1 + 2*3^{-2} + 1*3^{-3}$
= 1*81 + 2*27 + 1*9 + 0 + 1 + 1/3 + 2/9 + 1/27
= $(145.592592...)_{10}$

### 1.2.2.- CONVERSIÓN DE BASE 10 A BASE q

El método para realizar esto que se presenta aquí y que se denomina ***método de divisiones sucesivas por la base*** q está basado en las siguientes consideraciones generales:

Consideremos un número entero N escrito en la base r, en la notación posicional, es decir,

$$N = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_r$$

es decir, en notación polinomial

$$N = a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \ldots + a_1r + a_0$$

factorizando r podemos reescribir

$$N = r[ (a_{n-1}r^{n-2} + a_{n-2}r^{n-3} + \ldots + a_1) + (a_0/r) ]$$

Es decir,

$$N/r = (a_{n-1}r^{n-2} + a_{n-2}r^{n-3} + \ldots + a_1) + (a_0/r)$$

Como se observa, el primer término en el segundo miembro de la igualdad anterior que denotaremos N1 se puede representar en forma posicional en base r como sigue

$$N1 = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)_r$$

con lo cual

$$N/r = N1 + (a_0/r)$$

**Conclusión**. La expresión anterior significa que al dividir $N = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_r$ entre r obtenemos como cociente N1 y como residuo de la división $a_0$. En forma similar si dividimos $N1 = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)_r$ entre r obtendremos como cociente $N2 = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2)_r$ y como residuo $a_1$ y así sucesivamente.

De esta manera, para obtener los n dígitos de N en base r se deberán obtener los n residuos de n divisiones sucesivas entre r. Obteniéndose en el orden de LSD a MSD.

**Ejemplo** Convertir $(25)_{10}$ a base 2, 8 y 16.
Para este proceso se formará el siguiente arreglo de divisiones sucesivas entre la base
Para base 2:

| | **cociente** | **Residuo** |
|---|---|---|
| **No. de división entre 2** | 25 | |
| primera | 12 | $a_0 = 1$ LSB |
| segunda | 6 | $a_1 = 0$ |
| tercera | 3 | $a_2 = 0$ |
| cuarta | 1 | $a_3 = 1$ |
| quinta | 0 | $a_4 = 1$ MSB |

Es decir, $(25)_{10} = (11001)_2$

En adelante se obviarán los comentarios de la tabla anterior y solo se mostrarán los cocientes, residuos y la base entre la cual se está dividiendo.

Para la base 8:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 25 | |
| | 3 | 1 |
| | 0 | 3 |

Es decir, $(25)_{10} = (31)_8$

para la base 16

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 25 | |
| | 1 | 9 |
| | 0 | 1 |

Es decir, $(25)_{10} = (19)_{16}$

**Números fraccionarios**

La parte fraccionaria de un número de base 10 puede convertirse a base r en forma similar a lo descrito para la parte entera, pero en este caso, en lugar de realizar divisiones se realizan multiplicaciones sucesivas, y en lugar de ir tomando residuos se toman las partes enteras resultantes de dichas multiplicaciones, obteniéndose los dígitos del número en base r en el orden de MSD a LSD. Esto se justifica de manera similar a lo mostrado para el caso de las divisiones sucesivas, ya que si un número N se representa en notación posicional en base r como

$$N = (0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots)_r$$

es fácil ver que

$$N*r = (a_{-1}.a_{-2}a_{-3}a_{-4}\ldots)_r$$

es decir que la parte entera de N*r es $a_{-1}$.

**Ejemplo** convertir $(0.27)_{10}$ a base 2

| No. de multiplicación por 2 | 0.27 | Parte entera del resultado |
|---|---|---|
| primera | 0.54 | 0 MSB |
| segunda | 1.08 | 1 |
| tercera | 0.16 | 0 |
| cuarta | 0.32 | 0 |
| quinta | 0.64 | 0 |
| sexta | 1.28 | 1 |
| séptima | 0.56 | 0 |
| octava | 1.12 | 1 LSB |
| … | … | … |

Es decir, $(0.27)_2 = (0.01000101\ldots)_2$

En adelante se obviarán detalles en este procedimiento.

### 1.2.3.- CASO PARTICULAR. CONVERSIÓN ENTRE BASES $r^k$ y r

Cuando una de las bases involucradas en la conversión es una potencia entera de la otra la conversión se vuelve muy sencilla, ya que se puede realizar en un sólo paso expresando cada dígito del número en base $r^k$ usando k dígitos de base r. Además, este procedimiento no requiere aritmética de ningún tipo.

**Ejemplo** Convertir $N = (10111011110)_2$ a base 8 y a base 16

**para base 8:** Como $8 = 2^3$, bastará con representar cada 3 dígitos del número binario en octal como se muestra a continuación

$$N = \underbrace{10}_{2},\underbrace{111}_{7},\underbrace{011}_{3},\underbrace{110}_{6}$$

Es decir, $N = (2736)_8$

**para base 16**: como $16 = 2^4$ , en forma similar al caso anterior

$$N = \underbrace{101}_{5},\underbrace{1101}_{D},\underbrace{1110}_{E}$$

Es decir, $N = (5DE)_{16}$

**Ejemplo** Convertir $N = (3F45)_{16}$ a base 4 y a base 2

**para base 4** como $16 = 4^2$, se convertirá cada dígito del número usando 2 dígitos de base 4 como se muestra a continuación

$$N = \underbrace{\ 3\ }_{03},\underbrace{\ F\ }_{33},\underbrace{\ 4\ }_{10},\underbrace{\ 5\ }_{32}$$

Es decir, $N = (03331032)_4$

**para base 2** en forma similar, como $16 = 2^4$

$$N = \underbrace{\ 3\ }_{0011},\underbrace{\ F\ }_{1111},\underbrace{\ 4\ }_{0100},\underbrace{\ 5\ }_{0101}$$

Es decir, $N = (0011111101000101)_2$

Por la importancia del caso a continuación se tratará de manera especial el caso de base dos o sistema binario, ya que la información manejada por los sistemas digitales es información de tipo binaria.

### 1.2.4 LOS SISTEMAS OCTAL Y HEXADECIMAL

Como se puede observar del caso de conversión descrito en la sección anterior, el sistema octal (base 8) y hexadecimal (base 16) pueden ser considerados como *"binario abreviado"*, en el sentido de que la conversión de éstos a binario y viceversa es prácticamente inmediata a simple vista, es por ello que estos sistemas tradicionalmente han sido utilizados para representar de manera compacta información binaria en los sistemas digitales.

Obsérvese que para realizar la conversión octal-binario o hexadecimal-binario, basta tener presente la conversión de los 8 dígitos del octal o de los 16 dígitos del hexadecimal:

| **decimal/hexadecimal/octal** | binario |
|---|---|
| 0 | 0 0 0 |
| 1 | 0 0 1 |
| 2 | 0 1 0 |
| 3 | 0 1 1 |
| 4 | 1 0 0 |
| 5 | 1 0 1 |
| 6 | 1 1 0 |
| 7 | 1 1 1 |

| **decimal/hexadecimal** | binario |
|---|---|
| 8 | 1 0 0 0 |
| 9 | 1 0 0 1 |
| A | 1 0 1 0 |
| B | 1 0 1 1 |
| C | 1 1 0 0 |
| D | 1 1 0 1 |
| E | 1 1 1 0 |
| F | 1 1 1 1 |

## 1.3.- EL SISTEMA BINARIO

El sistema binario (r = 2) requiere únicamente dos dígitos, 0 y 1. Este sistema es ideal para uso en sistemas digitales, ya que éstos están construidos de dispositivos de dos estados (relevadores, transistores, etc.).

**Notación**: Se acostumbra representar los dígitos binarios (bits) de diversas maneras, dependiendo del contexto, por ejemplo:

1 = encendido = ON = alto = H
0 = apagado = OFF = bajo = L

Cuando se conectan varios dispositivos que pueden almacenar cada uno de ellos un bit, al arreglo así formado se le llama registro, de esta manera, diferentes combinaciones de valores de los bits guardados en un registro se pueden interpretar como un número binario. Así, un registro de 8 bits se representará como sigue:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Registro de 8 bits

Dependiendo de la longitud (medida en número de bits) del registro, este se denomina de acuerdo a la siguiente tabla

| No. de bits | Nombre |
|---|---|
| 1 | bit |
| 4 | nibble |
| 8 | byte |
| 16 | word (palabra) |
| 32 | double word |
| 64 | quadruple word |

El uso del término "*palabra*" es más genérico y algunos autores hablan de palabras de 8 de 16, de 32 bits, etc.

### 1.3.1 CONTAR EN BINARIO

Un buen dominio de la electrónica digital y ramas afines exige saber de memoria por lo menos algunos números en binario, especialmente los primeros. por ello es conveniente saber contar en binario, o en cualquier otro sistema. Para ello repasemos la manera en que contamos en decimal:

1. Se enlistan de manera ordenada los dígitos desde el 0 hasta el 9 (es opcional anotar a la izquierda de estos números tantos dígitos cero como se desee)
2. Al agotar los dígitos (después de llegar al 9) se repite el paso 1 pero incrementando en uno el dígito en la columna de la izquierda cada vez que se llegue al 9. Se hace esto hasta agotar otra vez los dígitos en esta posición (hasta llegar al 99).
3. Se repiten los pasos 1 y 2 incrementando en uno el dígito de la izquierda cada vez que se alcance en las primeras dos columnas el 99, hasta llegar al 999, etc...

Este proceso se ilustra en la siguiente tabla para el sistema binario:

| Decimal | Binario | Comentarios |
|---|---|---|
| 0 | 0 | Se enlistan los dígitos del 0 al 1 |
| 1 | 1 | Se agotan los dígitos para la primera columna |
| 2 | 10 | Se incrementa la segunda |
| 3 | 11 | Se agotan los dígitos para la primera y segunda columnas |
| 4 | 100 | Se incrementa la tercera |
| 5 | 101 | |
| 6 | 110 | |
| 7 | 111 | Se agotan los dígitos para la primera, segunda y tercera columnas |
| 8 | 1000 | Se incrementa la cuarta |
| 9 | 1001 | |
| 10 | 1010 | |
| ... | ... | |

**Ejemplos** ¿Cual es el número en binario que sigue de N1 = $(110110110)_2$, y de N2 = (1011111)?

Para N1 no se han agotado los dígitos de la columna menos significativa (la de más a la derecha), por lo tanto sólo se incrementará esta posición: N1 + 1 = $(110110111)_2$.

Para N2 se han agotado las 5 posiciones menos significativas, por lo tanto habrá que incrementar la siguiente posición a la izquierda de éstas y reiniciar las 5 posiciones: N2 + 1 = $(1100000)_2$.

## 1.3.2 CONVERSIÓN DE BINARIO A DECIMAL

En la sección 1.2.1 fue tratado el caso general de conversión de cualquier base a decimal usando la representación polinomial. Es conveniente tratar el caso particular de convertir un número binario a decimal por ser una caso muy utilizado en sistemas digitales y porque el método puede ser simplificado de la siguiente manera:

Anote (de ser posible mentalmente) los “pesos” o potencias de 2 correspondientes a las posiciones de los bits del número a convertir. Luego, simplemente, sume los pesos correspondientes a las posiciones de los bits 1.

Para ello es conveniente memorizar algunas potencias de 2:

| **Posición** | ... | 11 | 10 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | **punto** | -1 | -2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **peso** | ... | $2^{10}$ | $2^9$ | $2^8$ | $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | . | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | … |
| **valor** | ... | 1,024 | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | . | 0.5 | 0.25 | … |

**Ejemplo** Convertir los siguientes números de binario a decimal: $N1 = (101101)_2$, $N2 = (1010110.11)_2$

Para N1:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{pesos:} & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ N1 = ( & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\ )_2 \end{array}$$

Sumando los pesos correspondientes a los bits 1, $N1 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45_{10}$

Para N2:

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{pesos:} & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & -1 & -2 \\ N1 = ( & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & 1 & 1\ )_2 \end{array}$$

Entonces $N1 = 64 + 16 + 4 + 2 + 0.5 + 0.25 = 86.75_{10}$