NÚMEROS COMPLEJOS. INTRO. (I)

Como ya se sabe, existen algunas ecuaciones de segundo grado que no tienen ninguna solución real. Tal es el caso de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Si bien esto no era un problema excesivamente grave en la época en que se observó, un ingenioso método ideado por Jerónimo Cardano (1501-1576) para la resolución de las ecuaciones de tercer grado precisaba resolver cualquier tipo de ecuaciones de segundo grado, para su aplicación.

Esto dio lugar a que se admitieran también las raíces cuadradas de los números negativos llamándolas «números imaginarios». Casi un siglo tuvo que pasar para que se hiciese un estudio completo de los mismos, llegándose a lo que hoy se llama el cuerpo de los números complejos.

El teorema más importante que existe sobre los números complejos es el «Teorema Fundamental del Álgebra», demostrado por Carl Friederich Gauss (1777-1855) que dice que cualquier polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz compleja.

Se llama *unidad imaginaria* a un ente abstracto i , al que se le atribuye la propiedad de que su cuadrado es -1: $i^2 = -1$.

Añadiendo este elemento al cuerpo de los números reales, se tiene una solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$, pero ocurre que ya no se dispone de un procedimiento para calcular la suma y el producto de dos elementos de la estructura así obtenida.

Para que se puedan hacer multiplicaciones, es preciso que dado un número real b y la unidad imaginaria i exista el producto bi .

Además para que estos números puedan sumarse con los números reales es preciso también que, dado un número real a exista el elemento $a + bi$.

Esto da lugar a un conjunto de expresiones a las que se denominará números complejos.

Un problema que vale la pena plantearse es si podrá ocurrir que dos expresiones distintas den el mismo resultado. La respuesta es negativa.

Si $a + bi = c + di$ se tendría que $a - c = (d - b)i$. Elevando al cuadrado:

$(a - c)^2 = (d - b)^2\ i^2 = -(d - b)^2$.

Como el primer miembro es mayor o igual que 0 (por ser un cuadrado) y el segundo es menor o igual que 0 (por ser un cuadrado cambiado de signo) se tiene que ambos han de ser nulos. Por tanto:

$$a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

$$d - b = 0 \Rightarrow b = d$$

Las expresiones son así las mismas.

Nótese que hasta ahora se ha hecho uso de las propiedades propias de un cuerpo para ciertas expresiones que no se ha demostrado que lo constituyan. Teniendo en cuenta que tampoco se ha dado una definición correcta de lo que son los complejos, esto podría servir para justificar el porqué de la definición.

Tampoco se ha comprobado que con las expresiones de la forma $a + bi$ se puedan hacer todas las sumas y todos los productos posibles.

Para que se verifiquen las propiedades de cuerpo es interesante observar que ha de ser:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, que es otra expresión del mismo tipo.

Para el producto sería $(a+bi) + (c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$, que de nuevo es una expresión de la forma dada.

Parece pues razonable dar la siguiente definición:

Se llama *número complejo* a cualquier expresión de la forma $a + bi$, siendo a y b números reales.

Así, por ejemplo, $2-3i$, $\frac{5}{2} + \sqrt{7}\, i$; $5i$ son números complejos.

Igualdad de números complejos

Dos *números complejos* $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si $a = c$ y $b = d$.

Parte real y parte imaginaria de un número complejo

Dado el complejo $z = a + bi$, el número a recibe el nombre de *parte real* de z y b se llama *parte imaginaria de z*. Se representan por $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente.

Si un número complejo tiene una de sus partes (real o imaginaria) igual a cero, ésta no suele escribirse. Así, se escribirá a en lugar de $a + 0i$ y también bi en lugar de escribir $0 + bi$.

Se puede considerar que los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Los números complejos cuya parte real es 0 suelen recibir el nombre de *imaginarios puros*.

Suma y producto de números complejos

Dados dos *números complejos* $a + bi$ y $c + di$ se definen su *suma* y su *producto* como sigue:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

El producto puede hacerse operando con i como si fuese un número real y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + i(ad + bc) + bd(-1) =$$

$$= ac - bd + i(ad + bc)$$

Propiedades de la suma de números complejos

La suma de números complejos tiene las siguientes propiedades:

- **Conmutativa**

Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ se tiene la igualdad:

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$$

Ejemplo:

$$(2 - 3i) + (-3 + i) = (2 - 3) + i(-3 + 1) = -1 - 2i$$
$$(-3 + i) + (2 - 3i) = (-3 + 2) + i(1 - 3) = -1 - 2i$$

- **Asociativa**

Dados tres complejos $a + bi$, $c + di$ y $e + fi$, se cumple:

$$[(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$$

Ejemplo:

$$[(5 + 2i) + (3 - 4i)] + (-9 + 8i) = (8 - 2i) + (-9 + 8i) = -1 + 6i$$
$$(5 + 2i) + [(3 - 4i) + (-9 + 8i)] = (5 + 2i) + (-6 + 4i) = -1 + 6i$$

- **Elemento neutro**

El elemento neutro es $0 + 0i$, puesto que

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + i(b + 0) = a + bi$$

El número $0 + 0i$ se escribe simplificadamente 0 y se le llama «cero».

- **Elemento simétrico**

El elemento simétrico de un número complejo cualquiera $a + bi$ es $(- a - bi)$:

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0$$

Ejemplo:

El simétrico de $2 - 3i$ es $-2 + 3i$ pues $(2 - 3i) + (-2 + 3i) = 0$

<u>Propiedades del producto de complejos</u>

- **Conmutativa**

Dados dos complejos $a + bi$ y $c + di$, se cumple que:

$$(a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi)$$

Ejemplo:

$$(7 - i)(5 + 2i) = 35 + 14i - 5i - 2i^2 = 35 + 9i - 2(-1) = 37 + 9i$$

$$(5 + 2i)(7 - i) = 35 - 5i + 14i - 2i^2 = 35 + 9i - 2(-1) = 37 + 9i$$

- **Asociativa**

Dados los complejos $a + bi$, $c + di$ y $e + fi$ se cumple que:

$$[(a + bi)(c + di)](e + fi) = (a + bi)[(c + di)(e + fi)]$$

Ejemplo:

$$\left[(2 - 3i)(5 + i)\right](4 - 7i) = (10 + 2i - 15i - 3i^2)(4 - 7i) = (13 - 13i)(4 - 7i) =$$
$$= 52 - 91i - 52i + 91i^2 = -39 - 143i$$

$$(2 - 3i)\left[(5 + i)(4 - 7i)\right] = (2 - 3i)(20 - 35i + 4i - 7i^2) = (2 - 3i)(27 - 31i) =$$
$$= 54 - 62i - 81i + 93i^2 = -39 - 143i$$

- **Elemento neutro**

El elemento neutro del producto es $1 + 0 \cdot i = 1$, puesto que para cualquier complejo $a + bi$, $(a + bi)(1 + 0 \cdot i) = (a + bi) \cdot 1 = a + bi$.

El elemento neutro es el uno.

 Distributiva del producto con respecto a la suma

Dados tres números complejos $a + bi$, $c + di$ y $e + fi$, se cumple:

$$(a + bi)\,[(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi)$$

Ejemplo:

$$(1 - 2i)\,[3i + (2 - 7i)] = (1 - 2i)(2 - 4i) = 2 - 4i - 4i + 8i^2 = -6 - 8i$$

$$(1 - 2i)\,3i + (1 - 2i)(2 - 7i) = (3i - 6i^2) + (2 - 7i - 4i + 14i^2) =$$

$$= (3i + 6) + (-12 - 11i) = -6 - 8i$$

El conjunto de los números complejos, por contar con todas las propiedades anteriores para la suma y para el producto, se dice que es un anillo conmutativo.

El conjunto de los números complejos se simboliza por **C**, o también (**C**, +, ·).

 Elemento simétrico respecto del producto

Dado un complejo cualquiera $a + bi$, distinto de $0 + 0i$, existe otro complejo que, multiplicado por él, da el elemento neutro del producto, es decir, $1 + 0i$.

Demostración:

Se intentará calcular el inverso de $a + bi$, $x + yi$.

Ha de verificarse que $(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i$

$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$. Por tanto ha de ser:

$ax - by = 1$, multiplicando por a se tiene: $a^2x - aby = a$

$bx + ay = 0$, multiplicando por b se tiene: $\underline{b^2x + aby = 0}$

$$\text{Sumando } (a^2 + b^2)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Despejando y en la segunda ecuación:

$$ay = -bx \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x = -\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

El *inverso* de un *número complejo* $z = a + bi$, se suele denotar por $\frac{1}{z}$ ó z^{-1}.

Por tanto, si $z = a + bi$,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i$$

El conjunto de los números complejos es un cuerpo conmutativo con la suma y el producto definidos.

<u>División de números complejos</u>

La división es la operación inversa de la multiplicación. Esto es, dividir un número complejo entre otro es el resultado de multiplicar el primero por el inverso del segundo.

Ejercicios de aplicación

① Dividir $\frac{z}{w}$, siendo $z = 3 + 5i$ y $w = 1 - i$.

Resolución:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{1^2 + (-1)^2} - \frac{-1}{1^2 + (-1)^2}\, i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = (3 + 5i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} i + \frac{5}{2} i + \frac{5}{2} i^2 =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{8i}{2} = -1 + 4i$$

② Efectuar la operación $\frac{(5 - 3i)(1 + i)}{(1 - i) + 3i}$.

Resolución:

- $\frac{(5 - 3i)(1 + i)}{(1 - i) + 3i} = \frac{5 + 5i - 3i - 3i^2}{1 + 2i} = \frac{5 + 2i + 3}{1 + 2i} = \frac{8 + 2i}{1 + 2i}$

- $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1}{1^2+2^2} - \dfrac{2}{1^2+2^2}i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

- $\dfrac{8+2i}{1+2i} = (8+2i)\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) = \dfrac{8}{5} - \dfrac{16}{5}i + \dfrac{2}{5}i - \dfrac{4}{5}i^2 =$

$$= \frac{8}{5} - \frac{14}{5}i + \frac{4}{5} = \frac{12}{5} - \frac{14}{5}i$$

Raíces cuadradas de un número complejo

Además del método general que se verá más adelante para calcular raíces cualesquiera de un número complejo argumental, existe un procedimiento para hallar específicamente las raíces cuadradas de un complejo en su forma binómica.

El procedimiento es idéntico en todos los casos, por lo que bastará con aplicarlo una vez.

Se va a intentar hallar las raíces cuadradas del complejo $7 + 24i$.

Sea $a + bi$ una de dichas raíces cuadradas. Entonces, $7 + 24i = (a + bi)^2 =$
$= a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

Para que estos complejos sean iguales, han de tener iguales su parte real y su parte imaginaria. Por tanto:

$7 = a^2 - b^2$

$24 = 2ab \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow b = \dfrac{12}{a}$

Sustituyendo en la primera ecuación: $a^2 - \left(\dfrac{12}{a}\right)^2 = 7$

$a^2 - \dfrac{144}{a^2} = 7 \Rightarrow a^4 - 144 = 7a^2 \Rightarrow a^4 - 7a^2 - 144 = 0$, que es una ecuación bicuadrada.

Haciendo el cambio $t = a^2$ resulta la ecuación $t^2 - 7t - 144 = 0$.

Esta ecuación tiene dos soluciones, una positiva y una negativa. En este caso sólo nos interesa la positiva, ya que t es el cuadrado de un número real.

$$t = \frac{7 + \sqrt{49 + 576}}{2} = \frac{7 + 25}{2} = 16$$

Así, $a^2 = t = 16$, lo que da lugar a las soluciones $a = \pm 4$

Se tienen pues dos soluciones $a = 4 \Rightarrow b = \frac{12}{4} = 3$

$$a = -4 \Rightarrow b = \frac{12}{-4} = -3$$

Las raíces cuadradas de $7 + 24i$ son $4 + 3i$ y $-4 - 3i$: $\sqrt{7 + 24i} = \pm (4 + 3i)$

Ejercicio: cálculo de la raíz cuadrada de un número complejo

- Resolver la ecuación $z^2 + (2 + i)z - (13 - 13i) = 0$

Resolución:

- Siendo un cuerpo el conjunto de los números complejos, se puede aplicar la fórmula conocida para la resolución de la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 1$, $b = 2 + i$ y $c = -(13 - 13i)$.

- El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (2 + i)^2 + 4(13 - 13i) = 4 + i^2 + 4i + 52 - 52i = 55 - 48i$$

- Hay que calcular su raíz cuadrada. Sea $x + yi$ dicha raíz:

$$55 - 48i = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$55 = x^2 - y^2$$

$$48 = 2xy \Rightarrow x = \frac{24}{y}$$

$$55 = \left(\frac{24}{y}\right)^2 - y^2 = \frac{576}{y^2} - y^2 \Rightarrow 55y^2 = 576 - y^4 \Rightarrow y^4 + 55y^2 - 576 = 0$$

Haciendo el cambio $t = y^2$, $t^2 + 55t - 576 = 0$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{-55 \pm \sqrt{55^2 + 4 \cdot 576}}{2} = \frac{-55 \pm \sqrt{3\,025 + 2\,304}}{2} =$$

$$= \frac{-55 \pm 73}{2} = \begin{matrix} \to & 9 \\ \to & -64 \end{matrix}$$

Como t es el cuadrado de un número real y, por tanto positivo, se desprecia la solución $t = -64$

$$\text{Así } t = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \frac{24}{y} = \pm 8$$

Se tiene entonces que las raíces cuadradas de 55 - 48*i* son 8 + 3*i* y -8 - 3*i* .

Sustituyendo en la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-(2+i) \pm (8+3i)}{2} = \begin{matrix} \to & 3+1 \\ \to & -5-2i \end{matrix}$$

~

Representación gráfica de un número complejo

Puesto que cualquier número complejo se puede representar de forma única mediante dos números reales (su parte real y su parte imaginaria), se puede identificar cada complejo *a + bi* con el punto del plano (*a,b*) y viceversa.

Es más, cualquier punto del plano (*a,b*) define un vector de origen (0,0) y extremo (*a,b*).

De esta forma, cualquier número complejo puede representarse como un vector en el plano cuyo origen es el de coordenadas (0,0) y cuyo extremo es el *par ordenado asociado al complejo* (*a,b*).

Así, en el plano, el vector asociado al número complejo 2 - 3*i* tiene por coordenadas (2,-3).

Conjugado de un número complejo

Se llama *conjugado de un número complejo* al número complejo que se obtiene por simetría del dado respecto del eje de abscisas.

Representando el número complejo *a + bi* y haciendo la correspondiente simetría, se tiene que su conjugado es *a - bi* .

Dado un número complejo, su conjugado puede representarse poniendo encima del mismo una línea horizontal. Así se escribirá:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Propiedades de los conjugados

 Primera propiedad

El conjugado del conjugado de un complejo *z* es el propio *z*.

Demostración:

En efecto si $z = a + bi$ se tiene que $\bar{z} = a - bi$, de donde, $\bar{\bar{z}} = a + bi = z$

 Segunda propiedad

Dados dos números complejos cualesquiera *z* y *z'*, el conjugado de su suma es igual a la suma de sus conjugados.

Esto se expresa escribiendo que $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

Demostración:

Tomando $z = a + bi$ y $z' = c + di$, se tiene:

$\bar{z} = a + bi$ y $\bar{z}' = c - di$, con lo que $\bar{z} + \bar{z}' = (a + bi) + (c - di) = (a + c) + (-b - d)i$

Por otra parte:

$$z + z' = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow \overline{z + z'} = (a + c) - (b + d)i,$$

y es fácil ver que esta expresión coincide con la anterior.

 Tercera propiedad

El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de dichos números:

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

Demostración:

Si $z = a + bi$ y $z = c + di$ se tiene que $z \cdot z = (ac - bd) + (ad + bc)i$, cuyo conjugado es $\overline{z \cdot z'} = (ac - bd) - (ad + bc)i$.
Calculando por otro lado el producto de los conjugados, resulta que
$\overline{z} \cdot \overline{z'} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)\,i$.
El resultado es igual al anterior.

- *Cuarta propiedad*

Los complejos que coinciden con sus conjugados son los números reales.

Demostración:
Sea un complejo $a + bi$ que coincida con su conjugado. Esto equivale a que

$a + bi = a - bi$

Pero esto sólo ocurre si $b = 0$, es decir si $a + bi$ es un número real.

- *Quinta propiedad*

La suma y el producto de un complejo y su conjugado son, ambos, números reales.

Demostración:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

NÚMEROS COMPL. INTRO. (II)

<u>División de números complejos</u>

Como consecuencia de este resultado, se tiene un procedimiento más sencillo que el visto para efectuar una división. Basta con multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.
Por ejemplo:

$$\frac{2+3i}{4+5i}=\frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i+12i+15}{16+25}=\frac{23+2i}{41}=\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$$

Ejercicio: división de números complejos

① Determinar k de forma que el cociente $\dfrac{(-2+ki)}{k-i}$ sea:

a) Real.
b) Imaginario puro.
c) Tenga la parte real igual a la imaginaria.

Resolución:

$$\frac{-2+ki}{k-i}=\frac{(-2+ki)(k+i)}{(k-i)(k+i)}=\frac{-2k-2i+k^2i+ki^2}{k^2+1}=$$

$$=\frac{-3k}{k^2+1}+\frac{k^2-2}{k^2+1}i$$

a) Para que este cociente sea un número real es preciso que su parte imaginaria sea 0:

$$\frac{k^2-2}{k^2+1}=0\Rightarrow k^2-2=0\Rightarrow k^2=2\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$$

b) Para que sea imaginario puro ha de tener parte real nula:

$$\frac{-3k}{k^2+1}=0\Rightarrow -3k=0\Rightarrow k=0$$

c) $\dfrac{-3k}{k^2+1}=\dfrac{k^2-2}{k^2+1}\Rightarrow -3k=k^2-2\Rightarrow k^2+3k-2=0.$

Resolviendo dicha ecuación se obtienen dos valores para k:

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

<u>**Forma trigonométrica y forma módulo-argumental de un complejo**</u>

Al representar un número complejo como un vector en la forma ya descrita, éste viene definido de manera única por dos valores: su *módulo* y el ángulo □ formado por el eje positivo de abscisas con el vector. Este ángulo recibe el nombre de *argumento* del número complejo.

Dado un complejo $z = a + bi$ en su forma binómica y llamando $|z|$ a su módulo y α a su argumento, se tienen las siguientes relaciones:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|} \text{ y } \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{|z|}$$

Despejando a y b en estas igualdades, $a = |z| \cos \alpha$ y $b = |z| \operatorname{sen} \alpha$

De ahí se tiene que:

$$a + bi = |z| \cos \alpha + |z| \operatorname{sen} \alpha\, i = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Cualquier número complejo z puede representarse así como una expresión de la forma $|z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$.
Esta manera de escribir un número complejo recibe el nombre de *forma trigonométrica*.

En muchos casos se escribe simplemente el módulo, y el argumento como subíndice. Así se podría escribir $|z|_{\alpha}$, en lugar de escribir la forma trigonométrica completa $|z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$.

Esta manera de expresar un número complejo se llama *forma módulo argumental* o *polar*.

Nótese que si al argumento de un número complejo es incrementado en 360º, al no variar el seno ni el coseno de dicho ángulo, el número complejo definido no varía.

Cálculo de módulo y argumento de un complejo

Para calcular el argumento de un número complejo $z = a + bi$, basta con tener en cuenta que:

$$a = |z| \cdot \cos \alpha$$
$$b = |z| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Dividiendo estas dos igualdades,

$$\frac{b}{a} = \frac{|z| \cdot \operatorname{sen} \alpha}{|z| \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Así, el argumento de un complejo es un ángulo cuya tangente vale $\frac{b}{a}$.

Entre 0º y 360º hay, en general, dos ángulos cuya tangente toma ese valor. Para decidirse entre ellos es preciso fijarse en qué cuadrante se encuentra el complejo en cuestión.

Para calcular el módulo se suman los cuadrados de las dos igualdades obtenidas:

$$a^2 + b^2 = |z|\ \cos \alpha + |z|^2\ sen\ \alpha =$$
$$= |z|^2\ (\cos \alpha + sen\ \alpha) = |z|^2\ \alpha$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio: formas de escribir un número complejo

- Escribir en forma módulo-argumental los complejos $3 + 2i$, $1 - i$, $-2 - 5i$.

Resolución:

a) $|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$tg\ \alpha = \frac{2}{3} = 0{,}66$. Haciendo uso de la calculadora, $\alpha = 33º\ 41'\ 24''$

Teniendo en cuenta que dos ángulos que difieren en 180º tienen la misma tangente, podría aceptarse $\alpha = 213º\ 41'\ 24''$.

Pero el complejo dado se encuentra en el primer cuadrante.

Así, $3 + 2i = (\sqrt{13})_{33º\ 41'\ 24''}$

b) $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$tg\ \alpha = -\frac{1}{1} = -1$

Los ángulos que tienen tangente -1 son los ángulos de 135º y 315º. Como el complejo dado pertenece al cuarto cuadrante, el argumento es 315º.

Así $1 - i = (\sqrt{2})_{315º}$

c) $|-2 - 5i| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

$tg\ \alpha = \frac{-5}{-2} = 2{,}5$

Los ángulos cuya tangente es 2,5 son 68º 11 54 y 248º 11 54. El complejo dado pertenece al tercer cuadrante, por lo que el argumento es el segundo valor.

Por tanto $-2-5i = (\sqrt{29})_{248^\circ\ 11'\ 54''}$.

 Representar en forma binómica los complejos 3_{50°, 2_{180°, y 1_{220°

Resolución:

$$3_{50^\circ} = 3(\cos 50^\circ + i\cdot \text{sen } 50^\circ) = 3(\ 0{,}643 + 0{,}766\ i\ ) = 1{,}929 + 2{,}298i$$

$$2_{180^\circ} = 2(\cos 180^\circ + i\cdot \text{sen } 180^\circ) = 2\ (\ -1 + 0i\ ) = -\ 2$$

$$1_{220^\circ} = 1(\cos 220^\circ + i\cdot \text{sen } 220^\circ) = -\ 0{,}766 - 0{,}643\ i$$

Producto de complejos en forma módulo-argumental

Aunque ya se dispone de un método para calcular el producto de dos números complejos cualesquiera, cuando ambos números vienen dados en su forma módulo-argumenal existe un procedimiento mucho más sencillo. Este método consiste en multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos.

Para ver que esto es correcto, basta con efectuar la multiplicación:

$$R_\alpha \cdot R'_{\alpha'} = R\ (\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha) \cdot R'\ (\cos \alpha' + i\text{sen } \alpha'\ ) =$$
$$= RR'\ \{\ (\cos \alpha \cdot \cos \alpha' - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha'\ ) + i\ (\ \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha'\ )\}$$

Pero las expresiones que se encuentran entre paréntesis son precisamente las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + \alpha'$. Así se tiene que

$$R_\alpha \cdot R'_{\alpha'} = RR'\ \{\cos\ (\alpha + \alpha' + i \text{ sen } (\ \alpha + \alpha'\ )\} = (RR'\ )_{\alpha\ +\ \alpha'}$$

Ejercicios de aplicación

 Demostrar que para dividir dos números complejos se dividen sus módulos y se restan sus argumentos.

Resolución:

Supóngase que se quieren dividir los complejos $R_\alpha \cdot R'_{\alpha'}$. Llmando R'' al módulo del cociente y α'' a su argumento,

$$\frac{R_\alpha}{R'_{\alpha'}} = R''_{\alpha''} \Rightarrow R_\alpha = R'_{\alpha'} \cdot R''_{\alpha''} = (R' \cdot R'')_{\alpha'+\alpha''}.$$

Se tiene, pues, que $R = R' \cdot R'' \Rightarrow R'' = \dfrac{R}{R'}$ y que $\alpha = \alpha' + \alpha'' \Rightarrow \alpha'' = \alpha - \alpha'$

- Comprobar la fórmula vista para el producto multiplicando por dos métodos distintos los complejos $3i$ y $2 - 2i$.

Resolución:

- En primer lugar se multiplican directamente los dos números:

$$3i\,(2 - 2i) = 6i - 6i^2 = 6 + 6i$$

- Ahora se calcula el módulo y el argumento de cada uno de los factores:

$$|3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$tg\ \alpha = \frac{3}{0}, \text{ con lo que } \alpha = 90^\circ \text{ ó } \alpha = 270^\circ.$$

Por ser positiva la ordenada,
$\alpha = 90^\circ \Rightarrow 3i = 3_{90^\circ}$.

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$tg\ \alpha' = \frac{-2}{2} = -1, \text{ con lo que } \alpha' = 135^\circ \text{ ó } \alpha' = 315^\circ.$$

Como el complejo dado está en el cuarto cuadrante, será
$\alpha' = 315^\circ \Rightarrow 2 - 2i = \sqrt{8}_{315^\circ}$.

Multiplicando en forma módulo-argumental:

$$3i \cdot (2 - i) = 3_{90^\circ}\,(\sqrt{8})_{315^\circ} = (3\sqrt{8})_{405^\circ} = (3\sqrt{8})_{45^\circ} \quad (405^\circ = 45^\circ + 360^\circ)$$

Transformando dicho número a su forma binómica:

$$(3\sqrt{8})_{45^\circ} = 3\sqrt{8}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 3\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{16}}{2} + \frac{3\sqrt{16}}{2}i = 6 + 6i$$

 Demostrar que el producto de un complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

Resolución:

Se van a dar dos demostraciones:

a) Si $z = a + bi$ se tiene $\bar{z} = a - bi$, de donde

$$z \cdot \bar{z} = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

b) Si se considera el complejo dado en la forma módulo-argumental, cuyo módulo es R y cuyo argumento es , en la figura adjunta se ve que su conjugado tiene también módulo *R*, pero que su argumento es $360° - \alpha$.

Multiplicando:

$$R_{\alpha} \cdot R_{360° - \alpha} = (R.R)_{360°} = R^2 (\cos 360° + i \operatorname{sen} 360°) = R^2 (1 + 0i) = R^2$$

Fórmula de Moivre

El módulo de una potencia cuya base es un número complejo, es otro complejo cuyo módulo se obtiene elevando el módulo al exponente correspondiente y cuyo argumento se obtiene multiplicando el argumento por el exponente. Es decir, $(R_{\alpha})^n = R^n_{n\alpha}$

Demostración:

$$(R_{\alpha})^n = R_{\alpha} \cdot R_{\alpha} \ldots\ldots R_{\alpha} = (R \cdot R \ldots R)_{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha} = (R^n)_{n\alpha}$$

Esta igualdad recibe el nombre de *fórmula de Moivre*, en honor del matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754).

Ejercicio: aplicación de la fórmula de Moivre

 Aplicar la fórmula de Moivre para hallar la expresión de *sen* 4*x* y de *cos* 4*x* en función de las razones trigonométricas de *x*.

Resolución:

Se considera el complejo 1_x. Calculando su cuarta potencia:

$$(1_x)^4 = 1_{4x} = \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x$$

Pero $1_x = cos\ x + i\ \ sen\ x$, con lo que $(1_x)^4 = (cos\ x + i\ sen\ x)^4$.

Aplicando el binomio de Newton a esta expresión:

$$(cos\ x + i\ sen\ x)^4 = cos^4x + 4i\ cos^3x \cdot sen\ x + 6\ cos^2x(i\ sen\ x)^2 + \\ + 4\ cos\ x \cdot (i\ sen\ x)^3 + (i\ sen\ x)^4$$

Pero $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ e $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\ (-1) = 1$

Así:

$(cos\ x + i\ sen\ x)^4 = cos^4x + 4i\ cos^3x \cdot sen\ x - 6\ cos^2x \cdot sen^2x - 4\ cos\ x \cdot sen^3x\ i + sen^4x$

La parte real de este número es:

$$cos\ 4x = cos^4x - 6cos^2x \cdot sen^2x + sen^4x$$

Y la parte imaginaria es:

$$sen\ 4x = 4cos^3x \cdot sen\ x - 4cos\ x \cdot sen^3x$$

Raíces de un número complejo

Para hallar las raíces de un número complejo se aplica la fórmula de Moivre, teniendo en cuenta que para que dos complejos coincidan han de tener el mismo módulo y la diferencia de sus argumentos ha de ser un múltiplo entero de 360º.

Sea $R_\square$ un número complejo y considérese otro complejo $R'_{\square'}$, tal que

$$R_\square = (R'_{\square'})^n = ((R')^n)_{n\square'}$$

Esto equivale a que $(R')^n = R$, o lo que es lo mismo, que $R' = \sqrt[n]{R}$, y que $n\alpha' = \alpha + k \cdot 360° \Leftrightarrow \alpha' = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}$, donde k es un entero arbitrario. Es decir,

$$\sqrt[n]{R_\alpha} = \left(\sqrt[n]{R}\right)_{\frac{\alpha + k \cdot 360°}{n}}$$

Aunque esto parece aportar una infinidad de soluciones, nótese que si a *k* se le suma un múltiplo de *n*, al dividir el nuevo argumento, éste aparece incrementado en un número entero de circunferencias. Por tanto, basta con dar a *k* los valores 1, 2, 3, ..., *n* - 1, lo que da un total de *n* - 1 raíces, que junto a *k* = 0 da un total de *n* raíces.

Ejercicio: cálculo de raíces de un número complejo

 Hallar las raíces cúbicas de 8.

Resolución:

El método descrito permite calcular raíces únicamente en la forma módulo-argumental. Se debe escribir el número 8 en dicha forma:

$$|8| = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$tg\ \alpha = \frac{0}{8} = 0,\ \text{con lo que}\ \alpha = 0^\circ\ \text{ó}\ \alpha = 180^\circ.$$

Como la parte real de 1 es positiva el valor adecuado es = 0º.

Calculando los valores precisos:

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ \frac{0^\circ}{3} = 0^\circ\ \text{y}\ \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Así, las raíces cúbicas son las que tienen módulo igual a 2 y argumento 0º + 120º*k*, donde *k* puede tomar los valores 0, 1 y 2.

Se tienen pues las tres raíces:

$$2_{0^\circ} = 2(\cos 0^\circ + i\ sen\ 0^\circ) = 2(1 + 0i) = 2$$

$$2_{120^\circ} = 2(\cos 120^\circ + i\ sen\ 120^\circ) = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\ i$$

$$2_{240^\circ} = 2(\cos 240^\circ + i\ sen\ 240^\circ) = 2\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}\ i$$

 Hallar las raíces cuartas de 2 + 2*i* .

Resolución:

En primer lugar se calcula el módulo y el argumento de 2 + 2*i* :

$$|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$tg\ \alpha = \dfrac{2}{2} = 1$, con lo que $\alpha = 45^\circ$, ya que ha de hallarse en el primer cuadrante.

El módulo de todas las raíces cuartas será $\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$

Para hallar los argumentos hay que calcular $\dfrac{45^\circ}{4} = 11^\circ\ 15'$ y $\dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Dando a *k* los valores 0, 1, 2 y 3 se obtienen las cuatro raíces cuartas de 2 + 2*i*, que son:

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 11^\circ 15' + i\ sen\ 11^\circ 15') = 1{,}297\ (0{,}981 + 0{,}195i) = 1{,}272 + 0{,}253i$$

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 101^\circ 15' + i\ sen\ 101^\circ 15') = 1{,}297\ (-0{,}195 + 0{,}981i) = -0{,}253 + 1{,}272i$$

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 191^\circ 15' + i\ sen\ 191^\circ 15') = 1{,}297\ (-0{,}981 - 0{,}195i) = -1{,}272 - 0{,}253i$$

$$\sqrt[8]{8}\ (cos\ 281^\circ 15' + i\ sen\ 281^\circ 15') = 1{,}297\ (0{,}195 - 0{,}981i) = 0{,}253 - 1{,}272i$$

~