## 0.1. Problemas y ejercicios del Capítulo I.

**Ejercicio 1** *Utilizar el Método de Reducción al Absurdo para probar*

1. Existen infinitos números primos. (Se dice que Euclides fue el primero den una prueba de este enunciado y que fue la primera prueba por reducción al absurdo.)
2. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, si $m \cdot n = 0$ entonces $m = 0$ o $n = 0$.
3. Si $n^2$ es un número par, entonces $n$ es par, $n \in \mathbb{Z}$.
4. Si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, entonces $r \cdot i \notin \mathbb{Q}$, para todo $i$ número irracional.
5. La suma de dos números naturales pares da un número par.
6. Si $p$ es número entero par entonces $p^2$ es un número par.
7. Si $A$ y $B$ son conjuntos tales que $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.
8. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < \frac{a+b}{2}$.
9. Si $n$ es un número entero divisible por 4, entonces $n$ es un número par.
10. Sea $p$ un número entero. Si $p^2$ es un número par, pruebe que $p$ es par.

**Ejercicio 2** *Utilizar el Principio de Inducción para demostrar*

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1(2n+1))}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$
3. $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1$
4. $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
5. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 2^n, \quad n \geq 4$
6. $(1 + x)^n \geq 1 + nx; \qquad x > -1$
7. $1^2 + 2^3 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
8. $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
9. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \qquad n > 1$.
10. $(n!)^2 \leq n^n$
11. $4^n > n^4, \quad n > 4$.
12. $(\frac{a}{b})^{n+1} < (\frac{a}{b})^n, \qquad 0 < a < b$.

13. $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

14. Si $n$ es un entero positivo, entonces $n(n+1)$ es divisible por 2.

15. Si $n$ es un entero positivo, entonces $32n + 7$ es divisible por 8.

16. $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$.

17. $a^{2n} - b^2 n$ es divisible por $a + b$.

18. $a^{2n-1} - b^{2n-1}$ es divisible por $a + b$.

19. $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.

20. 2 es factor de $n^2 + n$.

21. Los números combinatorios $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, con $n, k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$ se definen como:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pruebe que,

*a*) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$.

*b*) $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$.

*c*) Use las partes a), b) y el método de inducción para probar que el binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} \cdot b^k.$$

## 0.2. Problemas y ejercicios del Capítulo II.

**Ejercicio 3** *En cada caso hacer los cálculos indicados y simplificar a la mínima expresión.*

[1] $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 15 \cdot (-2)^3 - (-2)^3$

[2] $2^3 + (-3)^3 + (-1)^5$

[3] $x^3 + 2x^2 - 3x - (-x)^3 + 3(-x)^3 + 3(-x)^2 - 5x + 2$

[4] $(3 \cdot 4)^{-2} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4)^{-3}$

[5] $2xy(-4xyz)^3$

[6] $(-a)^2(2ab)^{-2}$

[7] $(-2x^2)^3(-3xy^2)^{-2}$

[8] $(-\frac{1}{3})^{-3}(2ab)^{-2}$

[9] $(\frac{a}{2b})^n(\frac{b}{3c})^n(\frac{2c}{a})^n$

[10] $\frac{(x^2-y^2)^n(c+d)^n(c-d)^n}{(c^2-d^2)(x-y)(x+y)}$

[11] $(\frac{a+b}{c-d})^3(\frac{1}{a+b})^2(\frac{c-d}{a+b})^{-4}$

[12] $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}}$

[13] $\sqrt[3]{\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b^2}}$

[14] $(\frac{a+1}{a-1})\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$

[15] $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a-b}}$

[16] $\sqrt{1-x^2} + (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2(1+x)$

[17] $\sqrt{\frac{1}{a-b}} - \frac{1}{a}\sqrt{a^3 - a^2b} + \frac{1}{b}\sqrt{ab^2 - b^3}$

[18] $\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$

[19] $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{2}$

[20] $\sqrt{a}\,\sqrt[4]{4a^3}$

[21] $\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{4 * 5}$

[22] $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}}{2\sqrt{5}}$

[23] $\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}\sqrt{a^2-b}$

[24] $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

[25] $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\,\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}$

[26] $(\sqrt{\frac{a}{b}})^4$

[27] $(a-b\sqrt{x})^{-2}$

[28] $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2$

[29] $(\sqrt{x+y}) + \sqrt{x-y})^2$

[30] $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$

[31] $(\sqrt[n]{p^2-q^2})^{2n}$

[32] $(\sqrt[n]{2^3})^{mn}$

[33] $\sqrt{\sqrt{18}}$

[34] $\sqrt[3]{\frac{4}{9}\sqrt{\frac{4}{9}}}$

[35] $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

[36] $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + (36)^{-\frac{1}{5}}(37)(125)^{\frac{2}{3}}$

[37] $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}} + (\frac{1}{8})^{-\frac{2}{3}}$

[38] $(125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 143^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

[39] $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2$

[40] $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} - \frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2(xy^{-1}+1)^2}\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}}$

[41] $\{[(\frac{2\sqrt[4]{xy}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}})^{-2}+1]/[\frac{4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y+2\sqrt{xy}}]\}^{\frac{1}{2}}$

[42] $\sqrt{[\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^{-\frac{1}{2}}]^{-2}+1}$

[43] $\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}[a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^{-1} - (\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}})^{-1}]$

[44] $\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1} + \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1} - \frac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$

**Ejercicio 4** ***Factorizar***

[1] $m^2 + 2mx + x^2$

[2] $a^2 + a - ab - b$

[3] $ax^2 - 6xy + y^2$

[4] $27a^3 - 1$

[5] $x^5 + m^5$

[6] $a^3 - 3a^2b - 5ab^2$

[7] $2xy - 6y + xz - 3z$

[8] $1 - 4b + 4b^2$

[9] $1 + a^7$

[10] $x^4 + 4x^2 - 21$

[11] $x^5 - x^4 + x - 1$

[12] $8a^2b + 16a^3b - 24a^2b^2$

[13] $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

[14] $a(x+1) - b(x+1) + c(x+1)$

[15] $4 + 4(x-y) + (x-y)^2$

[16] $1 - a^2b^4$

[17] $x^6 + 4x^3 - 77$

[18] $1 + (a-3b)^3$

[19] $a^8 + 28a^4 + 36$

[20] $81a^6 - 4b^2c^8$

[21] $1 + 216x^9$

[22] $(x+1)^2 - 81$

[23] $a^2 - (b+c)^2$

[24] $(m+n)^2 - 6(m+n) + 9$

[25] $ax + a - x - 1$

[26] $c^4 - 4d^4$

[27] $15x^4 - 15x^3 + 20x^2$ [28] $2x^2 + 2$

[29] $7a(x + y - 1) - 3b(x + y - 1)$ [30] $4a^6 - 1$

[31] $x^6 4x^3 - 480$ [32] $ax - bx + b - a - by + ay$

[33] $a^{10}a^8 + a^6 + a^4$ [34] $a^2 - b^2 + a^3 - b^3$

[35] $x^3 - y^3 + x - y$ [36] $4 - (a^2 + b^2)2ab$

[37] $16x^2 + 8\frac{xy}{5} + \frac{y^2}{25}$ [38] $x^7 - 20x^5 - 2x^4 + 64x^3 + 40x^2 128$

[39] $n^5 - 30n^3 - 25n^2 - 36n - 180$

**Ejercicio 5** ***Factorizar el numerador y denominador y simplificar.***

[1] $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ [2] $\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

[3] $\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$ [4] $\frac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6}$

[5] $\frac{x^4-4x+3}{x^3 3x+2}$ [6] $\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

[7] $\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$ [8] $\frac{1+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$

[9] $\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ [10] $\frac{x^m-1}{x^n-1}$

**Ejercicio 6** ***Racionalizar el numerador y denominador y simplificar***

[1] $\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ [2] $\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

[3] $\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ [4] $\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

[5] $\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ [6] $\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

[7] $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ [8] $\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

[9] $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}-(1+x)}{x}$ [10] $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| [11] | $\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$ | [12] | $\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}$ |
| [13] | $\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$ | [14] | $\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$ |

**Ejercicio 7** ***Efectuar las operaciones indicadas***

1. *Sumar* $x^2 - 3xy$ *con* $3xy - y^2$ *y el resultado restarlo con* $x^2$.
2. *¿Qué expresión hay que añadir a* $3x^2 - 5x + 6$ *para que la suma sea* $3x$*?.*
3. *Restar* $x^2 - xy + y^2$ *de* $3x^2 - 5y^2$ *y sumar la diferencia con el resultado de restar* $5xy + x^2$ *de* $2x^2 + 5xy + 6y^2$.
4. *Restar* $x^2 - 3xy + y^2$ *de* $3x^2 - 5y^2$ *y sumar la diferencia con el resultado de restar* $5xy + x^2$ *de* $2x^2 + 5xy + 6y^2$.
5. *Multiplicar* $\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{5}b^2$ *por* $\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}ab + 2b^2$.
6. *Dividr la suma* $x^5 - x^3 + 5x^2$, $-2x^4 + 2x^2 - 10x$, $6x^3 - 6x + 30$ *entre* $x^2 - 2x + 6$.
7. *Restar el cociente de* $\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{90}ab^2 + \frac{1}{15}b^3$ *entre* $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$ *de* $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{5}b^2$.
8. *Probar que* $(2+x)^2(1+x^2) - (x^2-2)(x^2+x-3) = x^2(3x+10) + 2(3x-1)$.
9. *Restar la suma de* $x^3 - 5x^2 + 4x$, $-6x^2 - 6x + 3$, $-8x^2 + 8x - 3$ *de* $2x^3 - 16x^2 + 5x + 12$ *y dividir esta diferencia entre* $x^2 - x + 3$.
10. *Restar el cociente de* $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{24}x^2y + \frac{5}{12}xy^2 + \frac{1}{3}y^3$ *entre* $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}xy + y^2$ *de* $2x + [-5x - (x - y)]$.
11. *Probar que* $[x^2 - (3x+2)][x^2 + (-x+3)] = x^2(x^2 - 4x - 4) - (7x + 6)$.
12. *¿Qué expresión hay que sumar al producto de:* $[x(x+y) - x(x-y)][2(x^2+y^2) - 3](x^2 - y^2)$ *para obtener* $2x^3y + 3xy^3$*?.*
13. *¿De cuál expresión hay que restar* $-18x^3 + 14x^2 + 84x - 45$ *para que la diferencia dividida entre* $x^2 + 7x - 5$ *de como cociente* $x^2 - a$*?.*
14. *Probar que:* $(a^2+b^2)(a+b)(a-b) = a^4 - [3a + 2(a+2) - 4(a+1) - a + b^4]$.

**Ejercicio 8** ***Desarrollar los productos notables indicados.***

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1] | $(x+y+z)^2$ | [2] | $(x^2 - 2x + 5)^2$ |
| [3] | $(x - 2 + z - 3r)^2$ | [4] | $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y^2)^3$ |
| [5] | $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^3}{3})^3$ | [6] | $(2a^2 - b)^3$ |
| [7] | $(x - y + z)^3$ | [8] | $(x+y)^5$ |
| [9] | $(x^2 - y^2)^9$ | [10] | $[(x+z)^2 - 1]^3$ |

**Ejercicio 9** ***Determinar cual de los números es el mayor***

[$a$] $2\sqrt{3}$ $y$ $\sqrt[3]{2}$ [$b$] $\sqrt{5}$ $y$ $\sqrt[3]{2}$

[$c$] $\frac{\pi}{2}$ $y$ $\frac{e}{3}$ [$d$] $1-\sqrt{2}$ $y$ $\sqrt{2}-1$

[$e$] $2\sqrt{5}$ $y$ $1-\sqrt{3}$ [$f$] $2\pi+1$ $y$ $\frac{3}{2}e$

**Ejercicio 10** ***Reducir al mínimo común índice las siguientes raíces***

[$a$] $\sqrt{3}$ $y$ $\sqrt[3]{2}$ [$b$] $\sqrt{5}$ $y$ $\sqrt[3]{2}$

[$c$] $\sqrt[3]{2}$ $y$ $\sqrt[6]{32}$ [$d$] $\sqrt{a}, \sqrt[3]{ab}$ $y$ $\sqrt{2c}$

[$e$] $\sqrt[6]{a}, \sqrt[4]{2a^2}, \sqrt[5]{b}, \sqrt[7]{c}$ $y$ $\sqrt{d}$

**Ejercicio 11** ***Sistemas Numéricos: Resolver las siguientes ecuaciones y verificar las raíces obtenidas***

[1] $\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1} = \frac{x+6}{x-1} + \frac{x+36}{x^3-1}$ [2] $\frac{x+5}{x+1} + \frac{3x+1}{x^2+3x+2} = \frac{5}{2}$

[3] $(7-4\sqrt{3})x^2 + (2-\sqrt{3})x = 2$ [4] $abx^2 + 2(a+b)\sqrt{ab}x + (a-b)^2 = 0$

[5] $\frac{a-b+1}{ax+bx} = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{a-b}{x^2}$ [6] $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$

[7] $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ [8] $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+24} = 14$

[9] $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}} = x$ [10] $y\sqrt{\frac{a}{y}-1} = \sqrt{y^2-b^2}$

[11] $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$ [12] $2x + 2\sqrt{a^2+x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

[13] $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ [14] $x^3 - 9x^2 + 54 = 0$

[15] $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ [16] $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$

[17] $|3x-2| = |5x+6|$ [18] $|\frac{x+4}{2} - \frac{5}{6}| = 4$

[19] $|x^2-2x+2| = 4$ [20] $|x| - |\frac{x}{2}| = 1$

[21] $|\frac{x}{x-1}| = 2$ [22] $|x(x+1)| + |x| = 1$

**Ejercicio 12** ***Descomponer en fracciones racionales***

[1] $\frac{2x+3}{x^2+3x-10}$ [2] $\frac{x^{10}}{x^2+x-2}$ [3] $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

[4] $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ [5] $\frac{1}{x^4-1}$ [6] $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$

[7] $\frac{x}{x^3-1}$ [8] $\frac{1}{x(x^2+1)}$ [9] $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$

[10] $\frac{1}{x^4+1}$ [11] $\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}$ [12] $\frac{1}{x^6+1}$

**Ejercicio 13** ***Calcular y simplificar***

[$a$] $\frac{y+z}{x^2-xz-xy+yz}+\frac{x+z}{y^2-yz-xy+xz}+\frac{x+y}{xz-yz-x^2+xy}$ [$b$] $\frac{2x}{x^2-4}-\frac{x-1}{x(x+2)}-\frac{4x}{x(x^2-4)}$

[$c$] $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2x^2+1}{x(x^2-1)}$ [$d$] $\frac{1}{x}-\frac{-2x}{x-1}-\frac{4x}{x(2x-1)}$

[$e$] $\frac{10b^2ab}{a(a^2-4b^2)}-\frac{1}{a-2b}-\frac{2}{a}$ [$f$] $\frac{3x-y}{(x-y)(x+y)}-\frac{x+3y}{(x+y)(x+2y)}-\frac{1}{(x+2y)}$

[$g$] $\frac{\frac{1}{x^2+y^2}}{1-\frac{x}{x+\frac{y^2}{x-y}}}$ [$h$] $\frac{2-\frac{1}{\frac{x}{y}-1}}{\frac{2}{1+\frac{y}{x}}-\frac{3}{\frac{x}{y}+1}}$

[$i$] $\frac{\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}}{\frac{2x+3y}{3x-2y}+1}$ [$j$] $\frac{x+1+\frac{x+1}{x-1}}{x-\frac{2}{x-1}}$

[$k$] $\frac{2a-1+\frac{8a}{2a}-1}{2a+3+\frac{4}{2a-1}}$

**Ejercicio 14** ***Varios***

1. *Si* $a+b=1$ *y* $a^2+b^2=2$*, hallar el valor de* $a^4+b^4$.
2. *Si* $a$ *y* $b$ *son números positivos y* $a^2-b^2=1994$. *¿Cuál es el valor de* $a-b$*?.*
3. *Escriba la ecuación cuadrática que tiene raíz doble* $-\frac{2}{3}$.
4. *Si* $x>3$ *¿Cuál de las siguientes expresiones es la menor?*

   [$a$] $\frac{3}{x}$ [$b$] $\frac{3}{x+1}$

   [$c$] $\frac{x}{3}$ [$d$] $\frac{x+1}{3}$
5. *Completando cuadrados resuelva las siguientes ecuaciones:*

   [$a$] $3x^2-2=2x$ [$b$] $6x+3=2x^2$

   [$c$] $x^2+3=-x$ [$d$] $7x+12=10x^2$

$$[e] \quad 3x^2 + x - 4 = 0 \quad [f] \quad x^4 + 1 = 0.$$

6. *Encuéntrese dos enteros consecutivos cuyo producto exceda a la suma en 4 unidades.*

7. *Sepárese el número 42 en dos partes cuyo producto sea 341.*

8. *Si el radio de un círculo se incrementa en 4 unidades, entonces el área resulta multiplicada por 9. Encuéntrese el radio original.*

9. *El área de un triángulo es 42 metros cuadrados. Encuéntrese la base y la altura si la última excede a la primera en 5 metros.*

10. *El costo de una fiesta anual de un club se divide entre los miembros que asisten. En dos años consecutivos el costo total fue de 500.000 y 570.000 bolívares respectivamente, pero el costo por miembro fue 5000 bolívares menor el segundo año. Calcúlese el número de miembros que asistieron a cada fiesta si la asistencia en el segundo año fue de 10 miembros más que en el primero.*

11. *Encuéntrese las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 64 metros y cuya área es de 252 metros cuadrados.*

12. *El producto de un número par con el simétrico del siguiente número natural es igual al simétrico del primer natural mencionado. Encuéntrese dicho número natural.*

13. *Demostrar que la suma de dos números positivos no es menor que 2, si su producto es igual a 1.*

14. *Resolver las siguientes ecuaciones:*

$$[a] \quad \begin{cases} \frac{5}{2x+y} + \frac{4}{2x-3y} = 5 \\ \frac{15}{2x+y} + \frac{2}{2x-3y} = 5 \end{cases} \qquad [b] \quad \begin{cases} 4x + \frac{9}{y} = 21 \\ \frac{18}{y} = 17 - 3x \end{cases}$$

$$[c] \quad \begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5 \\ |x+1| - 4y = -4 \end{cases}$$

15. *Probar que si* $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1,$ *entonces* $x + y = 0$.

16. *Probar que* $n = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ *es un número entero.*

17. *¿Quien es mayor entre* $1000^{1000}$ *ó* $1001^{999}$*?.*

18. *Resolver la ecuación:* $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$.

19. $x^2 + 2ax + \frac{1}{6} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{6}}$

20. *Resolver la ecuación:* $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x + 2$

21. *Hallar el valor de a para que los polinomios* $x^2 + ax + 1$ *y* $x^2 + x + a$ *tenga al menos una raíz común.*

22. *Probar que* $n! < (\frac{n+1}{n})^n \forall n \geq 2$.

## 0.3. Problemas y ejercicios del Capítulo III.

**Ejercicio 15** *Determinar el valor que toma cada función en el punto o conjunto señalado:*

| *Función* | $f(\frac{1}{2})$ | $f(a-b)$ | $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ | $f((0,1])$ | $f([-1,0))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^3 - 4x$ | | | | | |
| $f(x) = \frac{\lvert x-2\rvert}{x+1}$ | | | | | |
| $f(x) = [x] + \frac{[x]}{x}$ | | | | | |
| $f(x) = (-1)^{[x]}$ | | | | | |
| $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ | | | | | |

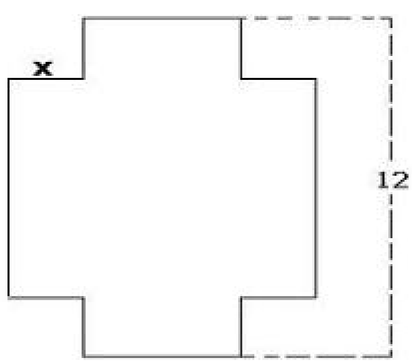
**Ejercicio 16** *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & si\ x < 0; \\ -\sqrt{2x-x^2}, & si\ 0 \leq x \leq 2; \\ 2x-3, & si\ x > 2. \end{cases}$$

*Calcular:* $f(-1)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(\frac{3}{2})$.

**Ejercicio 17**

1. *Dos números $x$ e $y$ suman 10. ¿Cómo queda expresado, en función de $x$, el producto de ellos?. ¿En función de $y$?. Justifique.*
2. *Una ventana está hecha de un rectángulo y de un triángulo equilátero. Determine la función que representa el área encerrada por la ventana si ésta debe tener un perímetro de 10 mts. ¿Cuál es el dominio de esta función?.*
3. *A un alambre de longitud $l$ mts, se le hace un corte en un punto $x$. Con un pedazo se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Determine, en términos de $x$ , la función que representa la suma de las áreas encerradas por estas figuras. ¿Cuál es su dominio?.*
4. *Si se cortan cuatro cuadrados iguales (de lado $x$ ) en las esquinas de un pedazo cuadrado de cartón cuyo lado $x$ mide 12 centímetros, y se doblan sus cuatro lados, se obtiene una caja rectangular sin tapa.[Ver figura].*




*Determine la función que representa: 12 centímetros*

*a) el área de la superficie de la caja y   b) el volumen de la caja.*

5. *Dada una esfera de radio r, determine la función que representa el volumen de un cono circular recto que puede inscribirse en ella.[Nota: La altura del cono está sobre el diámetro de la esfera].*

6. *Inscriba un rectángulo en la elipse de ecuación* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ *de manera que sus extremos estén sobre la elipse. Determine la función que representa el área de tal rectángulo. ¿Cuál es su dominio?.*

7. *Determine el área del rectángulo con un lado en el eje* $OX$*, simétrico con respecto al eje* $OY$*, e inscrito en la región limitada por la parábola* $y = 27 - x^2$ *y el eje* $OX$.

8. *Se ha fabricado un envase de lata, cilíndrico y con tapa, con capacidad para 1 litro. Determine, en función del radio basal, la cantidad de material utilizado (área de la superficie) en su fabricación.*

9. *Considere un cilindro circular recto, con tapa, cuyo radio basal mide r cm. y su altura mide h cm. Determine el volumen del cilindro, en función del radio, sabiendo que su superficie es de* $15cm2$.

**Ejercicio 18** *Determinar si cada una de las funciones definidas a continuación, son par, o impar o ninguna de las dos.*

$[a] \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \qquad [b] \quad f(x) = x - x^2$

$[c] \quad f(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \qquad [d] \quad f(x) = x - [x]$

$[e] \quad f(x) = \ln(\sqrt{|x^2 - 1|}) \qquad [f] \quad s(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

**Ejercicio 19** *Determinar el dominio de las siguientes funciones:*

$[a] \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad [b] \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$[c] \quad f(x) = \frac{1}{\log(1+x)} \qquad [d] \quad f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2}}{5\ln x}$

$[e] \quad f(x) = \sqrt{\frac{4x^4-9}{2-\sin^2 x}} \qquad [f] \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x+3)}$

$[g] \quad f(x) = \sqrt{\sqrt{x+1} - x} \qquad [h] \quad f(x) = \ln(\frac{1}{\sqrt{(x-6)(x+4)}})$

$[i] \quad f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+x}) \qquad [j] \quad f(x) = \ln(\sin(\frac{\pi}{x}))$

$[k] \quad f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x}) \qquad [l] \quad f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$

$[m] \quad f(x) = \arccos(2\sin x) \qquad [n] \quad f(x) = \ln[\cos(\ln x)]$

$[o] \quad f(x) = e^{\sqrt{\frac{1}{x}}} \qquad [p] \quad f(x) = \sqrt[4]{\ln(\tan x)}$

$[q] \quad f(x) = \arcsin(\ln(\frac{x}{10})) \qquad [r] \quad f(x) = \sqrt[7]{\ln(x-1)}$

**Ejercicio 20** *Hallar el rango de las siguientes funciones:*

[$a$] $y = \frac{2}{4-x^2}$

[$b$] $y = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

[$c$] $y = \arcsin(1-x)$

[$d$] $y = x - |x|$

[$e$] $y = \sqrt{25-x^2}$

[$f$] $y = |\sin x|$

[$g$] $y = \frac{x}{[x]}$

[$h$] $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

[$i$] $f(x) = \begin{cases} 2, & si\ x \leq -1; \\ x+3, & si\ -1 < x < 3; \\ x-1, & si\ 3 \leq x. \end{cases}$

[$j$] $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & si\ |x| \leq 2; \\ 2, & si\ |x| > 2. \end{cases}$

[$k$] $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & si\ |x| \leq 1; \\ 0, & si\ x > 1. \end{cases}$

[$l$] $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

**Ejercicio 21** *Complete la siguiente tabla:*

| *Función* | *Dominio* | *Rango* | *Gráfico* |
|---|---|---|---|
| $f(x) = [x]$ | | | |
| $f(x) = e^x$ | | | |
| $f(x) = \log x$ | | | |
| $f(c) = c$ | | | |
| $f(x) = \|x\|$ | | | |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | | | |
| $f(x) = x^3$ | | | |
| $f(x) = x^2$ | | | |
| $f(x) = \sin x$ | | | |
| $f(x) = \cos x$ | | | |
| $f(x) = \tan x$ | | | |

**Ejercicio 22** *Construir los gráficos de las funciones:*

[$a$] $f(x) = \frac{1}{x-1}$ [$b$] $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$

[$c$] $f(x) = \begin{cases} 3, & si\ 1 < x < 2; \\ 2x-1, & si\ x \geq 2; \\ 2x-4, & si\ x < 1. \end{cases}$ [$d$] $f(x) = x^2 - 4x + 2$

[$e$] $f(x) = -3x^2 + 4x + 2$ [$f$] $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

[$g$] $f(x) = 2x^2$ [$h$] $f(x) = 1 + |x|$

[$i$] $f(x) = (-1)^{[x^2]}$ [$j$] $f(x) = x - [x]$

[$o$] $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & si\ x < 1; \\ 0, & si\ 1 \leq x < 2; \\ -x, & si\ x \geq 0. \end{cases}$ [$p$] $f(x) = \begin{cases} 2, & si\ -4 \leq x < -2; \\ x, & si\ -2 \leq x \leq 4; \\ 4, & si\ 4 < x < 6. \end{cases}$

**Ejercicio 23** *Determinar si cada una de las funciones definidas a continuación, son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.*

[$a$] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ [$b$] $f : (-1, 1) \to [0, 4); f(x) = (3x^2 - 1)^2$

[$c$] $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ [$d$] $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x}$

[$e$] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 - 3x + 1.$

**Ejercicio 24** *Consideremos la función $f : [1, \infty) \to R$, dada por $f(x) = x$. Determinar si la siguientes funciones:*

[$a$] $g : R \to R$; *dada por* $g(x) = \frac{x+|x|}{2}$

[$b$] $h : R \to R$; *dada por* $h(x) = |x|$

[$c$] $m : [-1, 1] \to R$; *dada por* $m(x) = x^2$

*son extensiones de $f$.*

**Ejercicio 25** *Sea $f : R \to R$, definida por $f(x) = x^2$. Halle las restricciones de $f$ a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.*

**Ejercicio 26** *Dadas $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2$; $\lambda(x) = e^{(f+g)(x)+1}$; $t(x) = \sqrt{x}$; $m(x) = \frac{1}{x}$ y $p(x) = 1 + x$. Hallar $p \circ m \circ t \circ \lambda \circ g \circ f$.*

**Ejercicio 27** *Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de $g, h$ y $t$ usando solamente $+, \cdot$ y $\circ$.*

[$a$] $f(x) = 2^{\sin x}$ [$b$] $f(x) = \sin(2^x)$

[$c$] $f(x) = \sin(x^2)$ [$d$] $f(x) = \sin^2 x$

[$e$] $f(y) = \sin(\sin(\sin(2^{2\sin y})))$

**Ejercicio 28** *Considere $g, f : D \subset R \to R$, definidas por:*

[$a$] $f(x) = x^3 - x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 - 1$

[$b$] $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}, \quad g(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{(1+x)^3}$

*Calcular $f + g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$.*

**Ejercicio 29** *Hallar las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ en cada caso.*

[$a$] $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$ [$b$] $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ x^2, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

[$c$] $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & \text{si } 0 \leq x \leq 2; \\ x+1, & \text{si } 2 < x < 4. \end{cases}$ [$d$] $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 2 \leq x \leq 5; \\ 4, & \text{si } 5 < x < 12. \end{cases}$

**Ejercicio 30** *Restringir (si es necesario) el dominio de cada una de las funciones que se definen a continuación para que exista la inversa y hallarlas en cada caso.*

[$a$] $f(x) = 1 + x^2$ [$b$] $f(x) = x^2 - 3x + 1$

[$c$] $f(x) = 1 + x^2$ [$d$] $f(x) = -1 + \ln(x + 2)$

[$e$] $g(x) = \sec x$ [$f$] $f(x) = \sin(3x - 1)$

[$g$] $g(x) = \arcsin(\frac{x}{3})$ [$h$] $f(x) = \arctan(\frac{x}{3})$

[$i$] $f(x) = 4\arcsin(\sqrt{1 - x^2})$ [$j$] $f(x) = x^2 - 3x + 1$

**Ejercicio 31** *Determinar el conjunto de puntos donde las funciones definidas a continuación son monótonas.*

$$[a] \quad f(x) = \sqrt{1+x} \qquad [b] \quad f(x) = -3x + 2$$

$$[c] \quad g(x) = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad [d] \quad f(x) = 1 - x^2$$

$$[e] \quad g(x) = \sqrt[3]{x} \qquad [f] \quad f(x) = 2x + x^2$$

**Ejercicio 32** *Dada la función* $f(x) = \cos(2x)$, *calcular:* $f(\frac{\pi}{2})$; $f(3\pi)$; $f(\frac{3}{2}\pi)$; $f(-\frac{2}{3}\pi)$; $f(-\pi)$.

**Ejercicio 33** *Construir los gráficos de las funciones:*

$$[a] \quad f(x) = \tfrac{1}{x-1} \qquad [b] \quad f(x) = \tfrac{1}{|x-1|}$$

$$[c] \quad f(x) = \begin{cases} 3, & si\ 1 < x < 2; \\ 2x-1, & si\ x \geq 2; \\ 2x-4, & si\ x < 1. \end{cases} \qquad [d] \quad f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$[e] \quad f(x) = -3x^2 + 4x + 2 \qquad [f] \quad f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$[g] \quad f(x) = 2x^2 \qquad [h] \quad f(x) = 1 + |x|$$

$$[i] \quad f(x) = (-1)^{[x^2]} \qquad [j] \quad f(x) = x - [x]$$

$$[k] \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & si\ -\pi \leq x \leq 0; \\ 2, & si\ 0 < x \leq 1. \\ \frac{1}{x-1}, & si\ 1 < x \leq 4. \end{cases} \qquad [l] \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & si\ x < 0; \\ 1+x, & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$[m] \quad f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}x), & si\ |x| \leq 1; \\ |x-1|, & si\ |x| > 1; \end{cases} \qquad [n] \quad f(x) = \begin{cases} \ln x, & si\ x > 1; \\ \frac{1}{x}, & si\ 0 < x \leq 1; \\ 2^x - 1, & si\ x \leq 0. \end{cases}$$

$$[o] \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & si\ x < 1; \\ 0, & si\ 1 \leq x < 2; \\ e^{-x}, & si\ x \geq 0. \end{cases} \qquad [p] \quad f(x) = \begin{cases} 2, & si\ -4 \leq x < -2; \\ x, & si\ -2 \leq x \leq 4; \\ 4, & si\ 4 < x < 6. \end{cases}$$

**Ejercicio 34** *Averiguar ¿Cuales de las funciones son periódicas?, y hallar sus períodos mínimos:*

[a] $f(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$ [b] $f(x) = \sqrt{\tan x}$

[c] $f(x) = 2\tan(\frac{x}{2}) - 3\tan(\frac{x}{3})$ [d] $f(x) = \sin^2(x)$

[e] $f(x) = \tan(\sqrt{x})$

**Ejercicio 35** *Hallar la solución de las siguientes ecuaciones:*

[1] $\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - \frac{2\log x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x.\log_a x$ [2] $\log_x 2.\log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$

[3] $\log_{3x}(\frac{3}{3x}) + \log_2^3 x = 1$ [4] $x^{\log x - 1} = 100$

[5] $\log_{2x}(\frac{2x}{x^2}) + [\log_2(\log_2 x)^4]^2 = 1$ [6] $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3$

[7] $(0,4)^{\log^2 x+1} = (6,25)^{2-\log x^3}$ [8] $x^{\log x} = 100x$

[9] $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ [10] $x^{x^2-7x+12} = 1$

[11] $[\log_{x\sqrt{5}}]\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$ [12] $7^{2x} - 6{,}7^x + 5 = 0$

[13] $\log\sqrt{7x+5} + \frac{1}{2}\log(2x+7) = \log(4,5)$ [14] $\frac{1}{5-\log x} + \frac{2}{1+\log x} = 1$

[15] $\log_2(9^{x-1}) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$ [16] $x^{3-\frac{\log x - 1}{3}} = 900$

[17] $\log_{\sin x} 2.\log_{\sin^2 x} a + 1 = 0$ [18] $\sqrt{x^{\ln\sqrt{x}}} = 10$

[19] $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} + 2\log_3(x-3)\log_3(x+2) = \log_3^2(x+2)$ [20] $2^x + x - 2 = 0$

[21] $(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{(\frac{1}{3})})^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$ [22] $\log x - \frac{x}{2} + 4 = 0$

[23] $10^{\log_a(x^2-3x+5)} = 3^{\log_a 10}$ [24] $(x^2-x-1)^{x^2-7x+2}$

[25] $x^{3\log^2 x - \frac{2}{3}\log x} = 100\sqrt[3]{10}$ [26] $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

[27] $3\log(\log x) = \log(7-2\log x) - \log 5$ [28] $4^x + 6^x - 2\cdot 9^x = 0$

[29] $\log[3+2\log(1+x)] = 0$ [30] $25^{\sqrt{x}} - 124\cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$

[31] $\sqrt[\frac{2}{9}-x]{m^{\frac{1}{3}+x}} = \sqrt[\frac{2}{9}+x]{m^{\frac{1}{3}-x}}\ \sqrt[(\frac{2}{9})^2-x^2]{m^2}, m > 0 \quad y \quad m \neq 1$

[31] $2^{\log_x(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_x(\sqrt{x}-1)}$ [32] $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$

[33] $\log(\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}}) = 0$

[34] $2\log(\sqrt{x+\frac{x}{24}} + \sqrt{\frac{x}{24}}) - 1 = \log 3 - \log 2$ [35] $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27^x$

[36] $\log^2(100x) + \log^2(10x) + \log x = 14$ [37] $3 + \log_x(\frac{x^{4x-6}+1}{2}) = 2x$

[38] $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2$ [39] $\sin(3x) = \cos(2x)$

[40] $(\sqrt[3]{x})^{\log_x(x^2+2)} = 2\log_3\sqrt{27}$

[41] $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

[42] $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$ [43] $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin(2x) = 1$

[44] $\cos(\frac{x}{2}) + \cos x + \cos(2x) = 0$

[45] $\tan(x-\frac{\pi}{4})\tan x\tan(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{4\cos^2 x}{\tan(\frac{x}{2})-\cot(\frac{x}{2})}$ [46] $\frac{\sin x\tan x}{\cos x - 1} = 1$

[47] $\sin^2(4x) - \sin^2(2x) = \sin^2 x - \sin^2(3x)$ [48] $\sin^4(\frac{x}{3}) + \cos^4(\frac{x}{3}) = \frac{5}{8}$

[49] $2[1-\sin(\frac{3\pi}{2} - x)] = \sqrt{3}\tan(\frac{\pi - x}{2})$ [50] $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 + \sin(2x)$

**Ejercicio 36** *Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:*

[1] $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

[2] $\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$

[3] $1 - \frac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \sin\alpha.\cos\alpha$

[4] $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

[5] $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha.\cot^2\alpha$

[6] $\frac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha} = \tan^2\alpha$

[7] $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = 2\sec\alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

[8] $\sin(\alpha 30^o) + \sin(\alpha + 150) = 0$

[9] $\sin\alpha(2\csc\alpha + \cot\alpha)(\csc\alpha - 2\cot\alpha) = 2\sin\alpha - 3\cot\alpha$

[10] $1 + \frac{\cos x \tan^2 x}{1+\cos x} = \sec x$

[11] $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

[12] $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$

[13] $\tan(3x) = \tan x. \tan(\frac{\pi}{3} - x). \tan(\frac{\pi}{3} + x)$

**Ejercicio 37** *Ejercicios Varios:*

1. *Hallar el valor de $x$ si* $\log x = \frac{1}{2}\log(a^2 + b^2) - \frac{1}{3}[\log(a+b) - \log(a-b)]$
2. *Logaritmizar la expresión:* $y = (\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}})$
3. *Hallar los valores de $x$ para los cuales:*

[$a$] $\log_2(|\frac{x-2}{x-5}| + 7) > 3$

[$b$] $\log_{\frac{1}{2}} |2x - 3| > 3$

[$c$] $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{a}x + \log_x \sqrt[4]{a}x} \; + \; \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = a$

[$d$] $a^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

[$e$] $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\tan x \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 x}{\tan(\frac{x}{2}) - \cot(\frac{x}{2})}$

[$f$] $\cos(7x) - \sin(5x) = \sqrt{3}(\cos(5x) - \sin(7x))$

4. *Probar que* $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2-\sin x}{3-\sin x}$*.¿Para cuales valores de $x$ esta desigualdad se transforma en igualdad?*
5. *Sean m,n números cualesquiera, entonces; probar:*

$$[a] \quad \sin(mx)\sin(nx) = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$[b] \quad \sin(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$[c] \quad \cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

6. *Demostrar por inducción que si* $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$*, entonces* $\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + ... + \cos(nx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}$

7. *Si* $t = \tan(\frac{x}{2})$*, probar que:*

$$[a] \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad [b] \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

8. *Si* $t = \tan x$*, probar que:*

$$[a] \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad [b] \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t}$$

9. *Demostrar que*

$$[a] \quad \arctan(\tfrac{1}{3}) + \arctan(\tfrac{1}{5}) + \arctan(\tfrac{1}{7}) + \arctan(\tfrac{1}{8}) = \tfrac{\pi}{4}$$

$$[b] \quad \arccos x + \arcsin x = \tfrac{\pi}{2}$$

$$[c] \quad (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \alpha\pi^3, \qquad \alpha < \tfrac{1}{32}$$

$$[d] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

10. *Resolver las siguientes desigualdades:*

$$[a] \quad \sin x > \cos^2 x \qquad [b] \quad 4\sin^2 x + 3\tan x - 2\sec^2 x > 0$$

$$[c] \quad \tan(\tfrac{x}{2}) > \frac{\tan x - 2}{\tan x + 2} \quad [d] \quad \cos x - \sin x - \cos(2x) > 0, \quad 0 < x < 2\pi$$

**Ejercicio 38** *Los siguientes problemas se resuelven usando trigonometría y fueron tomados de http://www.geocities.com/chilemat/media/electivos/probvertrig.htm.*

1. *Encuentre el ángulo de elevación del sol si un hombre de 1,75 m. de estatura, produce una sombra de 82 cm. de longitud en el suelo.*

2. *El cordel de un cometa se encuentra tenso y forma un ángulo de 48 grados con la horizontal. Encuentre la altura del cometa con respecto al suelo, si el cordel mide 87 m. y el extremo de la cuerda se sostiene a 1,3 m. del suelo.*

3. *Calcule el ancho de una calle, si un observador situado sobre un edificio, ve el otro lado de la misma bajo un ángulo de 60 grados con respecto a la horizontal.*

4. *Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8m. del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior con un ángulo de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado.*

5. *Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos P y Q de una orilla, se observa un punto R de la orilla opuesta. Si las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 40 grados y 50 grados, respectivamente, y la distancia entre los puntos P y Q es 30 metros, determine el ancho del río.*

6. *Un cuadro localizado sobre una pared es tal que su borde inferior está a una distancia de 20 cm. sobre el nivel del ojo de un observador situado a 2 metros de la pared. Si el ángulo que forman las visuales con los bordes inferior y superior, respectivamente, mide 10 grados, ¿cuál es la altura del cuadro?*

7. *Una escalera de 6 m. de longitud descansa sobre una pared vertical de tal manera que el pie de la escalera queda a 1,5 m. de la base de la pared. ¿Cuál es el ángulo que la escalera forma con la pared y hasta qué altura de la pared llega la escalera?*

8. *Las longitudes de las sombras de dos postes verticales son 22 m. y 12 m. respectivamente. El primer poste es 7,5 m. más alto que el segundo. Encuentre el ángulo de elevación del sol y la longitud de cada poste.*

9. *¿Cuál es la altura de una colina, si su ángulo de elevación, tomado desde su base, es 46 grados, y tomado desde una distancia de 81 m. es de 31 grados.?*

10. *Sobre un arrecife hay un faro cuya altura es de 7,5 m. Desde un punto situado en la playa se observa que los ángulos de elevación a la parte superior y a la parte inferior del faro son 47 grados y 45 grados. Calcule la altura del arrecife.*

11. *. Un topógrafo situado en C, localiza dos puntos A y B en los lados opuestos de un lago. Si C está a 5.000 m. de A y a 7.500 m. de B y el ángulo ACB mide 35 grados. ¿Cuál es el ancho del lago?*

12. *Dos guardabosques descubren la misma fogata clandestina en dirección N 52º O y N 55º E, de sus posiciones respectivas. El segundo guardabosque estaba a 1,93 km. al Oeste del primero. Si el guardabosque más cercano al fuego es el que debe acudir. ¿Cuál de ellos tiene que ir y cuánto tendrá que caminar?*

13. *Un terreno tiene la forma de un triángulo isósceles. La base está frente a un camino y tiene una longitud de 562 m. Calcule la longitud de los lados si estos forman un ángulo de 23 grados.*

14. *Un barco sale de un puerto y viaja hacia el Oeste. En cierto punto gira 30 grados Norte respecto del Oeste y viaja 42 km. adicionales hasta un punto que dista 63 km. del puerto. ¿Qué distancia hay del puerto al punto donde giró el barco?*

15. *Desde lo alto de una torre de 300 m. de altura se observa un avión con un ángulo de elevación de 15 grados y un automóvil en la carretera, en el mismo lado que el avión, con un ángulo de depresión de 30 grados. En ese mismo instante, el conductor del automóvil ve al avión bajo un ángulo de elevación de 65 grados. Si el avión, el auto y el observador se encuentran en un mismo plano vertical: calcule la distancia entre el avión y el automóvil , también calcule la altura a la que vuela el avión en ese instante.*

16. *Un terreno triangular está demarcado por una pared de piedra de 134 m., un frente de 205 m. hacia la carretera y una cerca de 147 m. ¿Qué ángulo forma la cerca con la carretera?*

17. *Una escalera de mano, cuyo pie está en la calle, forma un ángulo de 30 grados con el suelo, cuando su extremo superior se apoya en un edificio situado en uno de los lados de la calle, y forma un ángulo de 40 grados cuando se apoya en un edificio situado en el otro lado de la calle. Si la longitud de la escalera es de 50 m., ¿cuál es el ancho de calle?*

18. *Un árbol ha sido roto por el viento de tal manera que sus dos partes forman con la tierra un triángulo rectángulo. La parte superior forma un ángulo de 35 grados con el piso, y la distancia, medida sobre el piso, desde el tronco hasta la cúspide caída es de 5 m.. halle la altura que tenía el árbol.*

19. *El ángulo de una de las esquinas de un terreno en forma triangular, mide 73 grados. Si los lados, entre los cuales se encuentra dicho ángulo, tiene una longitud de 175 pies y 150 pies, determine la longitud del tercer de los lados*

## 0.4. Problemas y ejercicios del Capítulo IV.

**Ejercicio 39** *Calcular:*

$[a]$ $1+4i-(-1-4i)$ $[b]$ $-6+3i-(6+3i)$ $[c]$ $(5+3i)-(5-3i)$

$[d]$ $(0,25-i)-(0,75+i)$ $[e]$ $(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)-(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i)$ $[f]$ $(a+bi)-i$

**Ejercicio 40** *Calcular:*

$[a]$ $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$ $[b]$ $(a+mi)(2a-mi)$ $[c]$ $(x-i\sqrt{-y})(-x-2i\sqrt{y})$

**Ejercicio 41** *Calcular:*

$[a]$ $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$ $[b]$ $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

**Ejercicio 42** *Elevar a potencia:*

$[a]$ $(-0,5-0,5i\sqrt{3})^2$ $[b]$ $(\frac{-1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3})^3$

$[c]$ $(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^4+(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^4$

**Ejercicio 43** *Extraer la raíz:*

$[a]$ $\sqrt{15+8i}$ $[b]$ $\sqrt{-77+36i}$

$[c]$ $\sqrt{3,75+2i}$ $[d]$ $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$

**Ejercicio 44** *Representar en forma trigonométrica los números:*

$[a]$ $i$ $[b]$ $-i$ $[c]-3$ $[d]$ $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

$[d]$ $2-7i$ $[e]$ $4-3i$

**Ejercicio 45** *Calcular:*

$[a]$ $\sqrt{i}$ $[b]$ $\sqrt[5]{1}$ $[c]$ $\sqrt[6]{1}$

**Ejercicio 46** *Representar en forma exponecial los siguientes números complejos:*

$[a]$ $2+3i$ $[b]$ $1-i$ $[c]$ $2i$

$[d]$ $-\sqrt{3}+i$ $[e]$ $-2$ $[f]$ $i$

**Ejercicio 47** *Transformar en la forma algebraica:*

$$[a] \quad 2e^{\frac{\pi}{8}i} \quad [b] \quad e^2 + i \quad [c] \quad 2e^{1-\frac{\pi}{4}i}$$

**Ejercicio 48** *Determine analítica y gráficamente los complejos $z = (x, y)$, que verifican las siguientes relaciones: (a) $Re(z) = -2$, y (b) $-2 \leq Im(z) < 3$.*

**Ejercicio 49** *Simplifique totalmente la expresión: $(-i)^{30} - (-i)^{31} - (i)^3$.*

Encuentre los valores de x e y para los cuales se verifica la siguiente igualdad: $x + y + 1 + (x - y + 3)i = 1 + 7i$.

**Ejercicio 50**

1. *Demuestre que $|z| \geq Re(z)$ y $|z| \geq Im(z)$, para cualquier $z \in \mathcal{C}$.*
2. *Demuestre que $|z + w| \leq |z| + |w|$, para cualesquiera $w, z \in \mathcal{C}$.*
3. *Pruebe que si z y w son dos números complejos ,entonces $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|w| + |z|)^2$.*

**Ejercicio 51** *Determine analítica y gráficamente los complejos z que verifican:*

1. $1 \leq |z| \leq 3$.
2. $|z - 1 + i| = 1$.

**Ejercicio 52** *Determine los complejos $z = x + yi$ que verifican las siguientes relaciones:*

1. $|z - 2 + i| < 1$.
2. $|2z + 3| \geq 4$.
3. $|Im(z)| \geq 1$.
4. $|z - 4| \geq |z|$.

**Ejercicio 53** *Determine los números reales a y b, sabiendo que: $(-1 + i)a + (1 + 2i)b = 1$.*

**Ejercicio 54** *Sean w y z dos complejos no nulos, demuestre que $|z|^{-1}|w - z||z|^{-1} = |w^{-1} - z^{-1}|$.*

**Ejercicio 55** *6. Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Comprueba la igualdad $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$.*

**Ejercicio 56** *Calcular el valor de k en cada caso.*

1. $z = \frac{3-ki}{1-i}$, *donde* $arg(z) = \frac{\pi}{4}$.
2. $z = (3 - 6i)(4 - ki)$, *donde z debe ser un imaginario puro.*
3. $z = (3 - 6i)(4 - ki)$, *donde z debe ser un número real.*
4. $z = \frac{3-ki}{1-i}$ *donde* $|z| = \sqrt{2}$.

**Ejercicio 57** *1. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es* $2 - 3i$.

*2. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es* $z = 3 - i$.

**Ejercicio 58** *1. Utilizando la Fórmula de Moivre halla las expresiones de* $sin(3x)$ *y* $\cos(3x)$ *en función de* $senx$ *y* $cosx$.

*2. Utilizando la Fórmula de Moivre halla las expresiones de* $sin(5x)$ *y* $\cos(5x)$ *en función de* $senx$ *y* $cosx$.

**Ejercicio 59** *¿Es posible dividir un segmento de longitud 10 en dos cuyas longitudes tengan su producto igual a 40?*

**Ejercicio 60** *1. Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son* $z = 2 + i$ *y* $w = 5 + 3i$ *, hallar los otros dos vértices.*

*2. Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en (0,0) y (4,1). Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está en el primer cuadrante.*

*3. De un pentágono regular centrado en el origen conocemos un vértice que es el punto* $(1, -\sqrt{3})$ *. Calcula los restantes vértices.*

**Ejercicio 61** *1. Probar que la suma de los ángulos de un triángulo es* $\pi$.

*2. Probar que los lados y los ángulos opuestos de un paralelogramo son respectivamente iguales y que las diagonales se bisecan entre sí.*

*3. Demostrar que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.*

## 0.5. Problemas y ejercicios usando el programa MAPLE.

**Ejercicios resueltos**

1) Resolver la desigualdad $|3x-5| < 3$.

**Solución**

Usamos el comando **solve (resolver)**, con su sintaxis correspondiente, es decir, indicando cuál es la incógnita:

```
> solve(abs(3*x-5)<3,x);
```

$$RealRange\left(Open\left(\frac{2}{3}\right), Open\left(\frac{8}{3}\right)\right)$$

Si queremos que exprese la solución como intervalo, debemos poner la desigualdad entre llaves:

```
> solve({abs(3*x-5)<3},x);
```

$$\left\{x < \frac{8}{3}, \frac{2}{3} < x\right\}$$

La solución es el intervalo abierto ( 2/3, 8/3 ).

2) Resolver la ecuación: $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

**Solución**

```
>
```

Usamos el comando **solve** (resolver), con su sintaxis correspondiente

```
> solve({abs(x^3+3*x^2-4)},x);
```

$$\{x = 1\}, \{x = -2\}, \{x = -2\}$$

3) Descomponer en fracciones racionales la expresión: $\dfrac{x^5+1}{x^4-x^2}$

```
>
```

Escribimos la fracción dada,

```
> (x^5+1)/(x^4-x^2);
```

$$\frac{x^5+1}{x^4-x^2}$$

```
> convert(%,parfrac,x);
```

$$x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2}$$

4) Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\ln\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}x^2\right)$ en su dominio de definición.

**Solución**

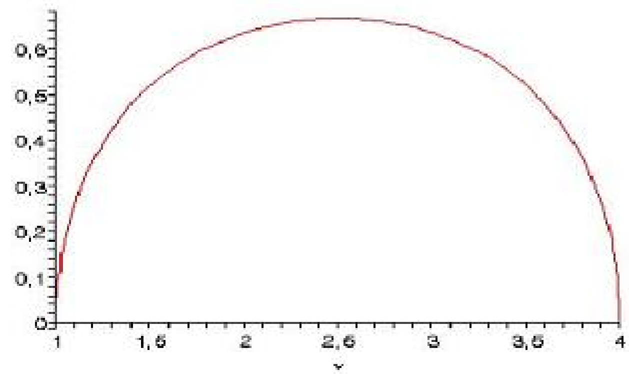
En primer lugar calculamos el dominio resolviendo una desigualdad:

```
> solve({ln(5/4*x-x^2/4)>=0},x);
```

$$\{1 \le x,\ x \le 4\}$$

El dominio es el intervalo cerrado [1, 4]. Para dibujar la curva usamos el comando plot con sus especificaciones correspondientes

```
> plot(sqrt(log((5*x-x^2)/4)),x=1..4);
```




3) Definir la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2}$, hallar su dominio de definición y simplificarla, si es posible.

**Solución**

Definir la función $g(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6}\right)$ ; y hallar su dominio de definición. Introducir a su vez la función $h(x) = \ln(x - 2) + \ln(x - 3) - \ln(x^2 + 4x + 6)$ ; y hallar su dominio de definición. ¿Son iguales las funciones g; y h;?

Veamos cuál es el dominio de la función g;:

```
> solve({(x^2-5*x+6)/(x^2+4*x+6)>0});
```

$$\{x < 2\},\ \{3 < x\}$$

El dominio de la función g, es (-oo;,2) U (3,oo;).

Ahora, el dominio de h; es:

```
> solve({x-2>0,x-3>0,x^2+4*x+6>0});
```

$$\{3 < x\}$$

El dominnio de la función h es, (3,oo).

Desde luego, los dominios de definición de h(x); y g(x); son diferentes luego, en rigor, no son funciones iguales.

Una sencilla operación en el papel que si 3 < x;, ambas funciones coinciden.

4) Hallar los números que verifican simultáneamente las desigualdades: (x-1)/(3x) < 1; , (|x|+2)/x < 1; .

**Solución**

Con la orden **solve** se pueden resolver sistemas de ecuaciones:

```
> solve({(x-1)/(3*x)<1,(abs(x)+2)/x<1},x);
```

$$\left\{ x < \frac{-1}{2} \right\}$$

El conjunto de soluciones es el intervalo abierto (-oo,-1/2; ).

**Ejercicios propuestos**

1) Resolver la ecuación: $(7 - 4\sqrt{3})\,x^2 + (2 - \sqrt{3})\,x = 2$

**Solución**

2) Estudiar para qué números reales $x$ se cumplen simultáneamente las desigualdades $\frac{|x| + 1}{x} < 1$ y $\frac{-2\,|x| + 1}{x} < 1$

**Solución**

3) Resolver la desigualdad $1 \le \frac{2x^2 + 9x + 6}{x + 2}$

**Solución**

4) Resolver la desigualdad $\frac{2x - 1}{3x + 2} \le 1$

**Solución**

5) Descomponer en fracciones racionales: $\frac{4x^3 - 6x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 - 2x + 4}$

**Solución**

6) Sea la función $f(x) = \log\left(\frac{x}{2 - x}\right)$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica. ¿Tiene alguna simetria?

**Solución**

7) Estudiar el dominio de definición de la función $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. Dibujar la gráfica en el intervalo (-5,5).

**Solución**