REINALDO CADENAS

# ALGUNOS TEMAS DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
MÉRIDA-VENEZUELA
2005

# ALGUNOS TEMAS DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS.

Reinaldo Cadenas
Facultad de Humanidades y Educación
**e-mail**: rcadena@ula.ve
**pág web:** http://webdelprofesor.ula.ve/humanidades/rcadena

## 1. Trinomios Cuadrados Perfectos

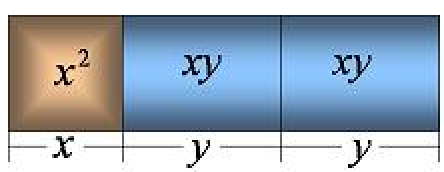
### 1.1. Trinomios de la forma: $x^2 + 2xy + y^2$.

Las antiguas civilizaciones de Babilonia, Egipto, India y China utilizaban los métodos geométricos (basándose en la noción de área) de completación de cuadrados para factorizar trinomios cuadrados perfectos, pues, esto les permitían resolver problemas prácticos que involucraban ecuaciones de segundo grado.

Veamos, queremos factorizar el polinomio:

$$P(x) = x^2 + 2xy + y^2. \tag{1}$$

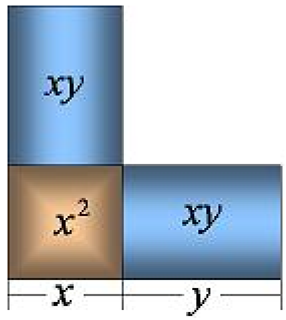
Consideremos el siguiente gráfico



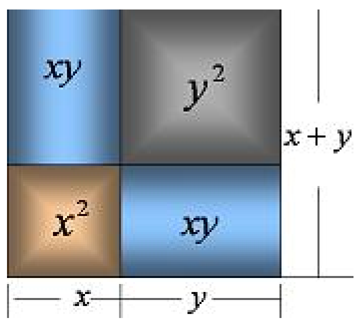

Analíticamente el gráfico nos da la expresión:

$$x^2 + 2xy \tag{2}$$

Ahora, modifiquemos el primer gráfico de la siguiente manera,




a continuación agregamos el cuadrado de área $y^2$ , para obtener un cuadrado (completamos un cuadrado), de lados $x + y$, como se muestra en la figura




como podemos ver, es claro que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2. \tag{3}$$

**NOTA:**

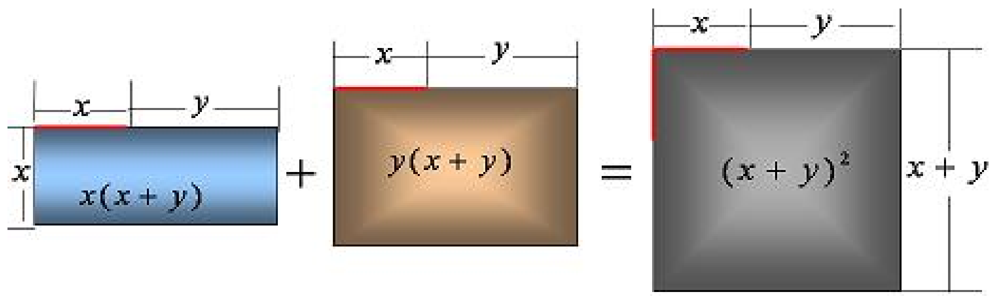
- Por múltiples experiencias, podemos destacar el error en que caen un gran cantidad de estudiantes, cuando tienen que resolver la expresión $(x + y)^2$ para aplicarla a la solución de algún ejercicio o problema, y es común ver como respuesta $x^2 + y^2$, donde el estudiante aplica la linealidad al binomio. Pensamos que el problema se debe atacar en su etapa inicial, es decir, no pasar a la fórmula sin antes hacer construcciones geométricas como la hecha al comienzo cuando el estudiante tenga que enfrentarse por primera vez con el tema, o otras propuestas donde el estudiante comprenda el significado de la expresión $(x + y)^2$.

- Si tuviéramos que resolver ecuaciones del tipo

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0. \tag{4}$$

  Entonces podemos proceder como al comienzo, y concluimos que $(x+k)^2 = 0$, de donde $x = -k$ es una raíz múltiple.

**Otra forma.** De nuevo queremos factorizar el polinomio (1), veamos gráficamente que




así, tenemos que

$$x(x+y) + y(x+y) = (x+y)^2.$$

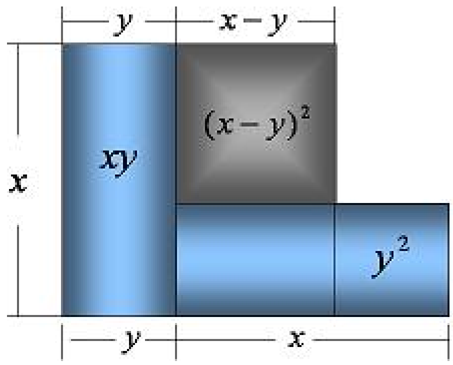
Es decir,

$$x^2 +^2 xy + y^2 = (x+y)^2. \tag{5}$$

Entonces podemos proceder como al comienzo, y concluir que $(x+k)^2 = 0$, de donde $x = -k$ es una raíz múltiple del polinomio $P(x) = x^2 - 2kx + k^2$.

## 1.2. Trinomios de la forma: $x^2 - 2xy + y^2$.

Consideremos el siguiente diagrama,




nótese que el cuadrado grande tiene área $x^2$, esta área sumada con el área $y^2$ del cuadrado pequeño nos da:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x-y)^2 + xy + xy \\ x^2 + y^2 &= (x-y)^2 + 2xy \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \end{aligned} \tag{6}$$

**NOTA**:

- Por múltiples experiencias, podemos destacar el error (muy usual) en que caen un gran cantidad de estudiantes, cuando tienen que resolver la expresión $(x-y)^2$ para aplicarla a la solución de algún ejercicio o problema, y es común ver como respuesta $x^2 - y^2$, donde el estudiante aplica la linealidad al binomio. Pensamos que el problema se debe atacar en su etapa inicial, es decir, no pasar a la fórmula sin antes hacer construcciones geométricas como la hecha al comienzo cuando el estudiante tenga que enfrentarse por primera vez con el tema, o otras propuestas donde el estudiante comprenda el significado de la expresión $(x-y)^2$.

- Si tuviéramos que resolver ecuaciones del tipo

$$x^2 - 2kx + k^2 = 0. \tag{7}$$

  Entonces podemos proceder como lo hicimos anteriormente, y concluir que $(x-k)^2 = 0$, de donde $x = k$ es una raíz múltiple del polinomio $P(x) = x^2 - 2kx + k^2$.

- Algunas actividades se pueden aplicar en el aula de clase que nos pueden servir como una secuencia didáctica a la hora de enseñar los trinomios cuadrados perfectos. Veamos,
    - Ordenar los conceptos a utilizar como área, ancho, largo, suma, producto y diferencia de segmentos y áreas.
    - Medir las piezas (estas pueden ser de cartulina, foami, etc.) a utilizar.
    - Calcular las áreas.
    - Pegar piezas.
    - Formar las identidades entre las áreas respectivas.
    - Escribir el resultado matemáticamente.
    - Ver si existen otras formas de escribir las igualdades encontradas.
    - Calcular las áreas de al menos 2 maneras diferentes.
    - Generalizar los cálculos obtenidos anteriormente.
    - Resolver distintos tipos de ecuaciones.

## 2. Ecuaciones de segundo grado.

Siglos antes de resolver por radicales (esto significa, que podemos hallar mediante una formula dada con las operaciones básicas de suma, multiplicación y radicación la solución general) la ecuación de segundo grado, las antiguas civilizaciones de Egipto y Babilonia dieron soluciones, utilizando un método geométrico, interpretando los términos como áreas, y distinguiendo varios casos pues no se conocían los números negativos (y menos aún las áreas negativas), dando origen a las primeras nociones del Álgebra. Los antiguos babilónicos resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan.

Al-Khwarizmi matemático árabe considerado el padre del Álgebra y también se dice que introdujo en el mundo occidental el actual sistema de numeración hindú-arábigo, propuso unos métodos geométricos (muy didácticos) de completación de cuadrados basados en la noción de área, los cuales permitían resolver ecuaciones de segundo grado.

## 2.1. Análisis del método presentado por al-Khwarizmi (780-850)

**MÉTODO 1**. Consideremos la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{8}$$

En efecto, recordemos tal ecuación resulta ser resoluble por radicales. Dividiendo por $a$ la ecuación (1) obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Luego, si hacemos $k = \frac{1}{a}$, entonces obtenemos

$$x^2 + kbx = x^2 + 2\left(\frac{kb}{2}\right)x = (-c)k. \tag{9}$$

Para hacer una interpretación geométrica del primer miembro de la ecuación (9), podemos asumir que $(-c)k > 0$ y $kb > 0$.

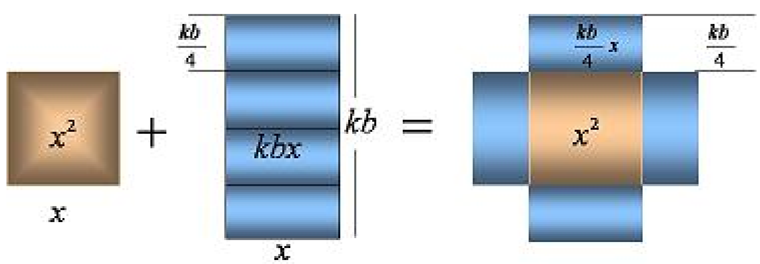



Figura 1: Interpretación geométrica de la ecuación $x^2 + kbx = x^2 + 4\left(\frac{kb}{4}\right)x$

La figura 1, sugiere que debemos completar un cuadrado agregando a la última región cuatro pequeños cuadrados, ver figura 2.

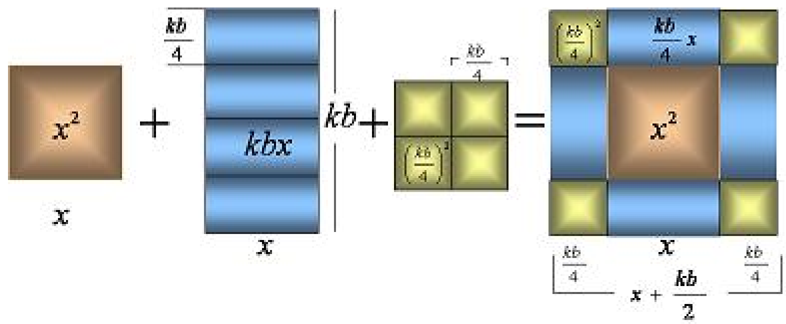



Figura 2: Interpretación de la completación de cuadrados.

Analíticamente tenemos que

$$x^2 + kbx + 4\left(\frac{kb}{4}\right)^2 = \left(\frac{kb}{4} + x + \frac{kb}{4}\right)^2,$$

es decir,

$$\underbrace{x^2 + 2\left(\frac{kb}{2}\right)x} + \left(\frac{kb}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{kb}{2}\right)^2. \tag{10}$$

La ecuación (10) es el la expresión algebraica de la completación de cuadrados. Ahora, si sustituimos (9) en (10) encontramos que

$$(-c)k + \left(\frac{kb}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{kb}{2}\right)^2. \tag{11}$$

En consecuencia,

$$\left(x + \frac{kb}{2}\right)^2 = \frac{k^2b^2 - 4ck}{4},$$

como $k = \frac{1}{a}$, entonces de la ecuación anterior obtenemos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la última ecuación se sigue que,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

así, podemos concluir con la clásica fórmula utilizada de manera casi rutinaria para resolver una ecuación de segundo grado,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{12}$$

**METÓDO 2**. De nuevo tomemos la ecuación (9), es decir

$$x^2 + kbx = x^2 + kbx = x^2 + 2\left(\frac{kb}{2}\right)x = (-c)k.$$

Para hacer una interpretación geométrica de la ecuación anterior, podemos asumir que $(-c)k > 0$ y $kb > 0$.

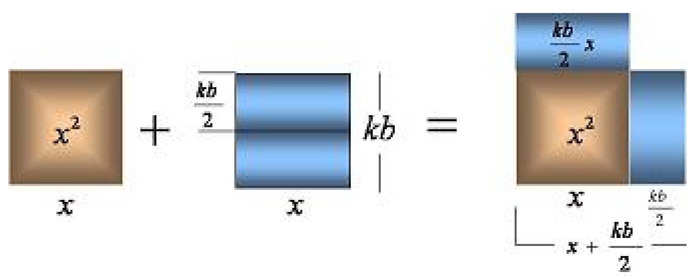



Figura 3: Interpretación geométrica de la ecuación $x^2 + kbx$

Ahora, la figura 3 nos sugiere que debemos completar cuadrados agregando un pequeño cuadrado, ver figura 4.

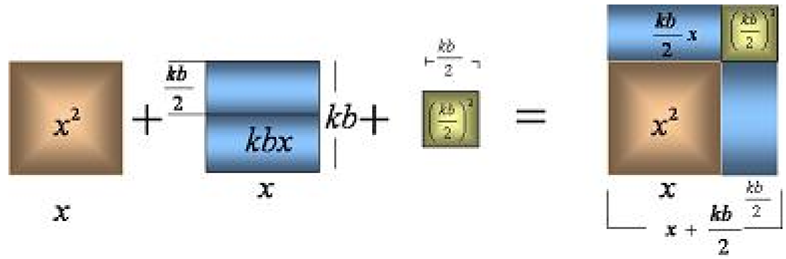



Figura 4: Interpretación de la completación de cuadrados.

Analíticamente tenemos que

$$x^2 + kbx + \left(\frac{kb}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{kb}{2}\right)^2,$$

es decir,

$$\underbrace{x^2 + 2\left(\frac{kb}{2}\right)x}_{} + \left(\frac{kb}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{kb}{2}\right)^2. \tag{13}$$

Nótese que la ecuación (13), es igual a la ecuación (10), luego, el procedimiento de aquí en adelante es el mismo utilizado en el desarrollo del método 1.

**NOTA**.

- Aún cuando hemos partido de una idea geométrica, el desarrollo analítico (es netamente algebraico) puede considerarse general, de tal manera que la fórmula (12) resuelve la ecuación de segundo grado (8), con la única limitación de que $a \neq 0$.
- Existen construcciones geométricas que al-Khwarizmi hizo y que cada uno de nosotros puede hacer y que van a depender de como completemos cuadrados.
- Algunas actividades se pueden aplicar en el aula de clase que nos pueden servir como una secuencia didáctica a la hora de enseñar los trinomios cuadrados perfectos. Veamos,
  - Ordenar los conceptos a utilizar como área, ancho, largo, suma, producto y diferencia de segmentos y áreas.

- Medir las piezas (estas pueden ser de cartulina, foami, etc.) a utilizar.
- Calcular las áreas.
- Pegar piezas.
- Formar las identidades entre las áreas respectivas.
- Escribir el resultado matemáticamente.
- Ver si existen otras formas de escribir las igualdades encontradas.
- Calcular las áreas de al menos 2 maneras diferentes.
- Resolver distintos tipos de ecuaciones.
- Generalizar los resultados hallando la fórmula general de la solución de la ecuación general de segundo grado.

## 2.2. Análisis de método presentado por René Descartes para resolver Ecuaciones de Segundo Grado

**René Descartes** (1596-1650), nació en Francia y su obra maestra *La Geometría* fue publicada en 1637, que junto con los ensayos Introducción a los Lugares Planos y Sólidos constituyen los fundamentos de la Geometría Analítica (fusión entre la Geometría y el Álgebra), de profundo impacto en el desarrollo de la Matemática de los próximos siglos, incluyendo su influencia en Isaac Newton, Descartes proveyó a la matemática de la herramienta básica para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, una de sus ramas más poderosas.

Las ideas geométricas propuestas por Descartes para resolver ecuaciones de segundo grado tienen sus fundamentos en el teorema de Pitágoras, y construcciones de circunferencias, que pueden presentarse usando regla y compás como herramienta didáctica.

De la ecuación (8), tenemos

$$x^2 = -\frac{1}{a}bx - \frac{1}{a}c.$$

Ahora, haciendo $k = -\frac{1}{a}$, obtenemos que

$$x^2 = (kb)x + (\sqrt{kc})^2, \tag{14}$$

asumiendo que $kc \geq 0$.
Ahora, formamos un triángulo rectángulo con catetos de longitud $\frac{kb}{2}$ y $\sqrt{ck}$, (ver figura 5).

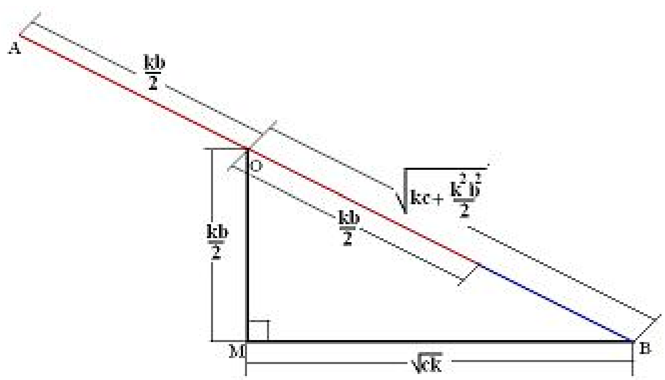



Figura 5: Interpretación geométrica de la solución de la ecuación de segundo grado.

Por el teorema de Pitágoras la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{ck + \frac{k^2b^2}{4}}$.
Ahora, proyectamos un segmento (AO) de longitud $\frac{kb}{2}$, y la longitud del segmento AB nos da una solución de la ecuación (8). En efecto,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{kb}{2} + \sqrt{kc + \frac{b^2k^2}{4}} \\ &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{15}$$

Para hallar la otra raíz, trazamos una circunferencia de radio $AO(= \frac{kb}{2})$, y cetro $O$, esta corta el segmento $AB$ en el punto $P$, (ver figura 6), luego, la otra raíz viene dada por la "distancia" algebraica $\frac{kb}{2} - \sqrt{ck + \frac{k^2b^2}{4}}$, la cual nos da

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{16}$$

En consecuencia, de (15) y (16), obtenemos la solución general de la ecuación (8), dada por la ecuación (12).

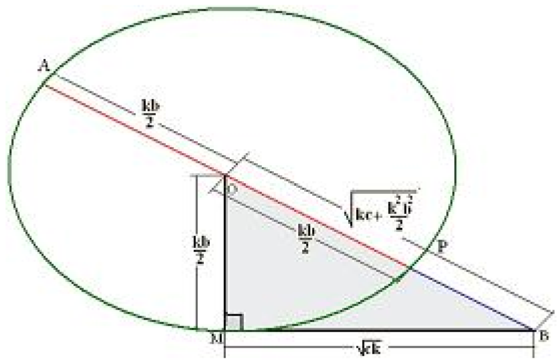



Figura 6: Interpretación geométrica de la solución de la ecuación de segundo grado.

**NOTA**.

- Existen otros aportes geométricos (con regla y compás) que Descartes construyó y cuyo soporte es de nuevo el teorema de Pitágoras. (Ver, [5]).

- Algunas actividades se pueden aplicar en el aula de clase que nos pueden servir como una secuencia didáctica a la hora de enseñar los trinomios cuadrados perfectos. Veamos,

    - Ordenar los conceptos a utilizar como longitud, triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras, circunferencia, etc.
    - Utilizar la regla y el compás.
    - Determinar la longitud de los puntos medios de segmentos, calcular longitud de segmentos.
    - Resolver ecuaciones particulares.
    - Generalizar los resultados hallando la fórmula general de la solución de la ecuación general de segundo grado.

## 2.3. Análisis de método presentado por Euclides para resolver Ecuaciones de Segundo Grado

**Euclides de Alejandría (325-265 a.C.)**, es el autor de la obra más importante realizada por los griegos: "Elementos"(Stoikheia). Esta obra consiste en una vasta síntesis de la geometría elemental griega, consta de 13 capítulos conocidos como libros y con ella la geometría alcanza su máxima perfección. Hasta la concepción de los Elementos la geometría era, en su mayoría, un conjunto de resultados empíricos, cuyo fin principal era medir y dibujar figuras. Con Euclides, la geometría pasa a ser una ciencia.

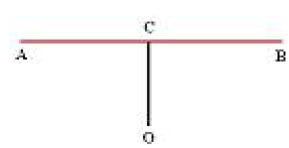
Dentro de los muchos aportes de Euclides encontramos construcciones geométricas para resolver ecuaciones de segundo grado. Veamos, de la ecuación (8), tenemos

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{a}bx - \frac{1}{a}c. \tag{17}$$

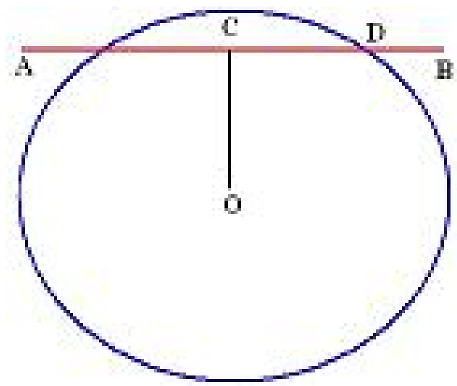
Con las restricciones del caso consideremos la longitud de los segmentos:

$$|\overline{AB}| = \frac{b}{a}.$$

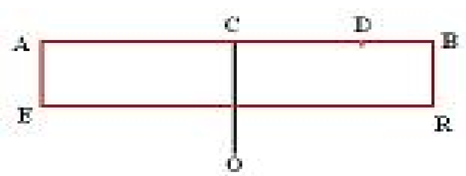
Tracemos una perpendicular desde el punto $C$ (punto medio del segmento $\overline{AB}$) al punto $O$ donde la longitud del segmento $\overline{CO}$ es $\quad y \quad |\overline{CO}| = \sqrt{\frac{c}{a}}$. (Como se muestra en la figura).



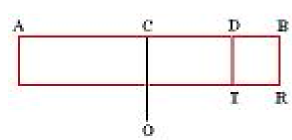
A continuación tracemos una circunferencia de centro en el punto $O$ y radio $\overline{CB}$, la cual corta al segmento $\overline{AB}$ en el punto $D$.



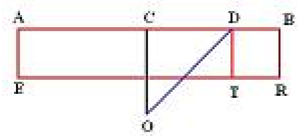

Ahora, construyamos el rectángulo $ABER$, donde $|\overline{AE}| = |\overline{BR}| = |\overline{DB}|$.




Sobre el rectángulo $ABER$ construimos el cuadrado $DBTR$, donde cada lado tiene longitud $|\overline{DB}|$.



Por último sobre el anterior rectángulo construyamos el triángulo rectángulo $OCD$.




Nótese que,

$$|\overline{CO}| = \sqrt{\frac{c}{a}}, \qquad |\overline{CB}| = \frac{|\overline{AB}|}{2} = \frac{b}{2a}, \qquad |\overline{DO}| = |\overline{CB}| = \frac{b}{2a} \;\; y \;\; |\overline{CD}| = \frac{b}{2a} - |\overline{BD}|.$$

Por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
|\overline{OP}|^2 &= |\overline{CO}|^2 + |\overline{CD}|^2 \\
\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2a} - |\overline{BD}|\right)^2 \\
\frac{b^2}{4a^2} &= \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} - |\overline{BD}|\right)^2 \\
\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= \frac{b^2 - 4ab|\overline{BD}| + 4a^2|\overline{BD}|^2}{4a^2} \\
-c &= -b|\overline{BD}| + a|\overline{BD}|^2 \\
a|\overline{BD}|^2 - b|\overline{BD}| + c &= 0 \qquad (18)
\end{aligned}$$

De la ecuación (18) se concluye que la longitud del segmento $\overline{BD}$ es una solución de la ecuación (8).

**NOTAS**.

- La construcción (con regla y compas) de Euclides para resolver ecuaciones de segundo grado, también tiene su fundamentación en el teorema de Pitágoras.

- Algunas actividades se pueden aplicar en el aula de clase que nos pueden servir como una secuencia didáctica a la hora de enseñar los trinomios cuadrados perfectos. Veamos,

- Ordenar los conceptos a utilizar como longitud, triángulos rectángulos,rectángulos, cuadrados, teorema de Pitágoras, circunferencia, etc.
- Determinar la longitud de los puntos medios de segmentos, calcular longitud de segmentos.
- Resolver ecuaciones particulares.
- Generalizar los resultados.

# 3. El teorema de Pitágoras

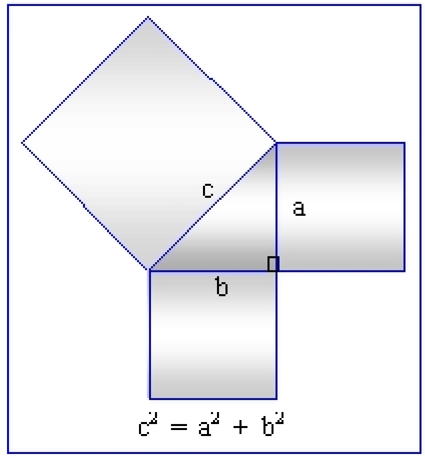
En la antigua matemática hindú en la obra Sulva-Sutra aparece un enunciado equivalente al teorema de Pitágoras, y lo aplicaban con nudos sobre cuerdas de la forma: $(3, 4, 5), (12, 16, 20)$, etc. Los Babilónicos 2000 años a.C. aplicaban el teorema para resolver problemas prácticos. Los Egipcios conocían el triángulo rectángulo de lados $(3, 4, 5)$, y también utilizaban el teorema para medir tierras cerca del rió Nilo, con una cuerda de 13 nudos formando triángulos rectángulos de lados 3,4 y 5 nudos. Los Chinos 1000 años a.C. también utilizaban el teorema de Pitágoras. Es de destacar que en todas estas civilizaciones milenarias que aplicaron el teorema de Pitágoras no se escuentra indicios de que tuvieran una demostración del mismo.

**Pitágoras de Samos (570-480 a.C.)**. Funda en Grecia la Escuela Pitagórica (una especie de secta), sus mayores aportes a la Matemática están relacionados con la demostración del Teorema de Pitágoras, establecieron la Demostración Matemática y clasificaron la Matemática en discreta y continua. Y los Pitagóricos planteaban que bastaban los números enteros (y consecuentemente los numeros racionales) para explicar la naturaleza.

Los matemáticos griegos **Euclides de Alejandría (325-265 a.C.)** y **Platón (427-348 a.C.)** también dieron una demostración del teorema de Pitágoras.

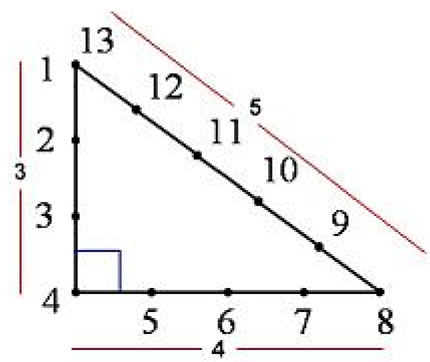
El enunciado griego pensamos que el más didáctico y debe ser presentado por primera vez a nuestros estudiantes. El cual dice:

*El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los* *catetos.*




Veamos una aplicación sencilla de como los egipcios (también los babilónicos y otros) utilizaban una cuerda de 13 nudos para formar triángulos rectángulos, lo que les permitía medir y repartir las tierras al borde del río Nilo. Consideremos una cuerda de 13 nudos (donde la longitud entre cada par de nudos es la misma) como se muestra en la figura:


ahora, sin importar como lo hagamos al unir los nudos 1 y 13, y formemos un triángulo este siempre será rectángulo, y cuyos lados tienen longitud 3, 4 y 5, donde cada dígito representa la suma de las longitudes que hay entre cada par de nudos, ver la siguiente figura.




Nótese que los números, 3,4 y 5 satisfacen la ecuación $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es decir, satisfacen el teorema de Pitágoras.

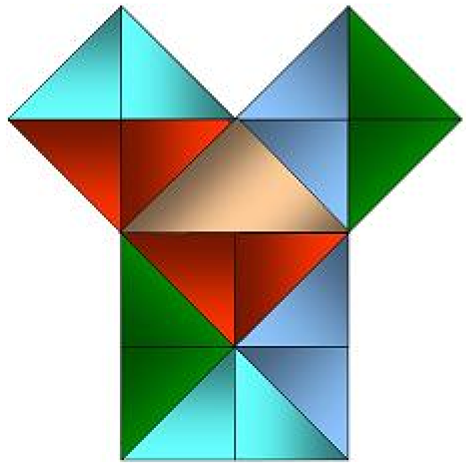
El enunciado del teorema de Pitágoras actualmente más difundido dice:

*En un triángulo rectángulo cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de cada cateto.*

# 4. Demostración de Platón del teorema de Pitágoras

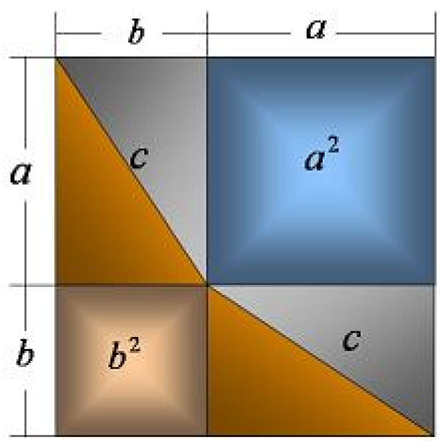
La siguiente actividad esta basa el una demostración que hecha por Platón sobre el teorema de Pitágoras, y es una especie de rompecabezas que puede ser útil para comprobar el teorema de Pitágoras.

- Dibujemos un triángulo rectángulo (isósceles) y sobre cada uno de los lados construyamos un cuadrado.
- Dividamos en triángulos determinados por las diagonales de los cuadrados construidos sobre cada cateto.
- Veamos que con los triángulos construidos anteriormente podemos llenar el cuadrado construido sobre la hipotenusa, como se muestra en la figura.



# 5. La prueba de Pitágoras sobre su teorema

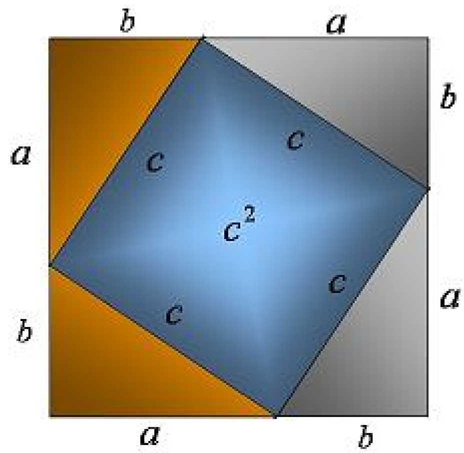
Consideremos un cuadrado de lado con longitud $a + b$ claramente su área es $(a+b)^2$, dividamos el cuadrado como se muestra en la figura,




entonces

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right). \tag{19}$$

Ahora, consideremos el mismo cuadrado de lados con longitud $a + b$, pero hagamos la construcción que muestra el dibujo,




Luego,

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right). \tag{20}$$

Como el cuadrado el mismo en ambos casos por la igualdad de las áreas (ecuaciones 19 y 20), concluimos que

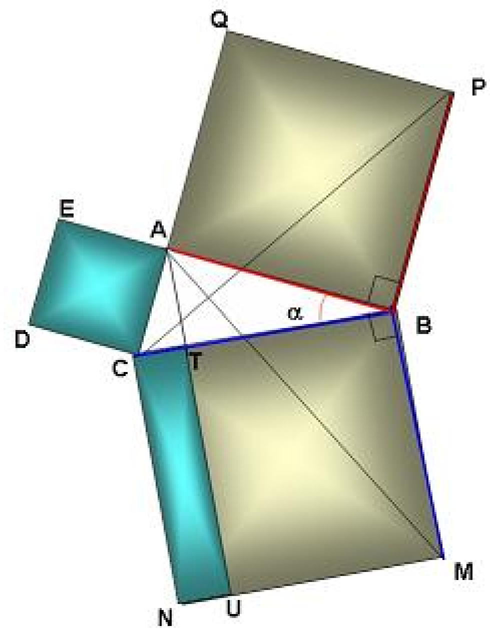
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**NOTAS**:

- Euclides, en el Libro I de los Elementos proposición 47 demuestra el teorema de Pitágoras.

  Veamos como procedió Euclides, trazó por A una perpendicular a CB hasta que corte a NM en U y que divide al cuadrado NMBC en dos rectángulos UMBT y NUTC. A continuación unió A con M y C con P, formando los triángulos AMB y CPB que tienen la propiedad de ser iguales pues, tiene el mismo ángulo que se forma en el vértice B ($=\alpha + 90^{\text{o}}$), y dos lados que los determinan: $BP = AB$ $y$ $BC = BM$.

  Ahora, el área del triángulo $AMB$ es la mitad del rectángulo UTBM, pues tiene la misma base y altura (tomando BM como base del triángulo y altura UM), recuerde que el área de un cuadrado con la misma base y la misma altura que la de un triángulo es doble del área el triángulo.




Por otro lado, el área del triángulo $CBP$ es la mitad del cuadrado ABPQ, pues tiene la misma base y altura (tomando BP como base del triángulo y como altura PQ). Como los triángulos $CPB$ y $AMB$ son iguales entonces las áreas son iguales. En consecuencia, el área del cuadrado ABPQ es igual al área del rectángulo UTBM.

Análogamente demuestra que el rectángulo del rectángulo CTNU es igual al área del cuadrado DCAE, y así queda probado el teorema.

- En la proposición 48 del Libro I de los Elementos, Euclides demuestra que: *Si el cuadrado construido sobre uno de los lados de un triángulo es equivalente a los cuadrados, juntos, de los otros dos lados, el ángulo formado por esos dos lados es recto* , es decir el recíproco de la proposición 47.

- Consideremos un triángulo cualquiera de lados $a$, $b$ y $c$, donde los dos lados de menor longitud digamos $a$ y $b$, los llamaremos catetos, y el lado de mayor longitud $c$ lo llamaremos hipotenusa. Entonces

*El ángulo formado por los catetos es recto si y sólo si $c^2 = a^2 + b^2$.*

- El teorema de Pitágoras en sin lugar a dudas el teorema de mayor aplicación en la Matemática y conocido por millones de seres humanos en el planeta. Hasta nuestros días se conocen más de mil demostraciones de este popular teorema.

- Algunas actividades se pueden aplicar en el aula de clase que nos pueden servir como una secuencia didáctica a la hora de enseñar los trinomios cuadrados perfectos. Veamos,

    - Ordenar los conceptos a utilizar como longitud, triángulos rectángulos, rectángulos, cuadrados, área, ecuaciones, trinomios cuadrados etc.
    - Mostrar con diversos ejemplos que se cumple el teorema de Pitágoras.
    - Dar demostraciones geométricas y algebraicas.
    - Aplicar el teorema de Pitágoras.

# 6. Las ternas pitagóricas

Como vimos en el estudio del teorema de Pitágoras. Las civilizaciones antiguas de Egipto, Babilonia, India y China conocían las ternas Pitagóricas (numeros enteros a, b y c que satisfacen $c^2 = a^2 + b^2$). Por ejemplo, en las tablillas babilónicas se pueden encontrar hasta 15 ternas pitagóricas.

La terna $(3, 4, 5)$ es pitagórica mientras la terna $(1, 2, 3)$ no es pitagórica. Ahora, surge una pregunta natural ¿Cómo hallar ternas Pitagóricas? Veamos algunas consideraciones:

- Nótese por ejemplo que $(6, 8, 10)$ es una terna pitagórica, pues $6^2+8^2 = 10^2$, y $(6, 8, 10) = 2(3, 4, 5)$, donde $(3, 4, 5)$ es una terna pitagórica. Así, si $(a, b, c)$ es una terna pitagórica, entonces $(ka, kb, kc)$ es también una terna pitagórica para cada $k \in \mathbb{N}$. De está forma podemos hallar infinitas ternas pitagóricas. Euclides probó que el conjunto de las ternas pitagóricas es infinito.

- La terna pitagórica $(5, 12, 13) \neq k(a, b, c)$, para cualquier $k$ natural y $(a, b, c)$ terna pitagórica. Ahora, la pregunta es ¿cómo hallar ternas pitagóricas $(a, b, c)$ donde $a, b$ y $c$ sean primos entre si. Obsérvese que: $2^2 - 1^2 = 3,\ 3^2 - 2^2 = 5,\ 4^2 - 3^2 = 7\ldots$, en general se puede verificar que la diferencia entre dos cuadrados consecutivos es siempre un número impar, es decir , siempre ocurre $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \quad \forall n\mathbb{N}$, por lo tanto podemos, decir que

  $$\{k \in \mathbb{N} :\ k = (n+1)^2 - n^2,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbf{I} \setminus \{1\}.$$

  Donde $\mathbf{I}$ es el conjunto de los números naturales impares. Ahora, cuando $2n + 1$ es un cuadrado, es decir, el numero impar es un cuadrado, hallamos una terna pitagórica.
  Por ejemplo, $13^2 - 12^2 = 25 = 5^2$, luego, $5^2 + 12^2 = 13^2$, por lo cual $(5, 12, 13)$ es una terna pitagórica.

  Nótese que el conjunto de los los números impares que son cuadrados es infinito, en consecuencia el conjunto de las ternas pitagóricas es infinito.

- Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$. Definamos

  $$a = n^2 - m^2, \qquad b = 2nm \quad y \quad c = n^2 + m^2.$$

  Obsérvese que, $a^2 + b^2 = (n^2 + m^2)^2 = c^2$. Luego, la terna $(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$ es pitagórica, y como existe una infinidad de números para escoger $(a, b, c)$ se sigue que el conjunto de las ternas pitagóricas es infinito.

- Supongamos que $(a, b, c)$ es una terna pitagórica. Entonces $a^2 + b^2 = c^2, \quad (c \neq 0)$, es decir, $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1$. Por lo tanto,

  $$x^2 + y^2 = 1, \quad x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c}. \tag{21}$$

  La ecuación (20) es la de una circunferencia de centro en el origen y radio 1. Así, para hallar una terna pitagórica basta localizar $(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ donde $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, $\ p, q, r, s \in \mathbb{N}$. Así, $(\frac{p}{q}) + (\frac{r}{s}) = 1$. Luego, $p^2s^2 + r^2q^2 = q^2s^2$. De nuevo como hay una infinidad de maneras de tomar $p, q, r$ $y$ $s$, entonces el conjunto de las ternas pitagóricas es infinito.

A mediados del año 1600, el matemático aficionado **Pierre de Fermat (1601-1665)** francés; se preguntó ¿ cuáles serán las soluciones en números enteros de la ecuación pitagórica si se cambia el exponente 2 por 3? es decir, considerar la ecuación $x^3 + y^3 = z^3$, o en general, ¿ cuáles son las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3? \tag{22}$$

Sabemos por el estudio de las ternas pitagóricas que si $n = 2$ la ecuación (21) tiene infinitas soluciones enteras. Fermat impacto al mundo matemático cuando escribió al margen de la Aritmética de Diofanto, que la ecuación no tiene solución entera (salvo la solución trivial) para $n \geq 3$, y que tenía una demostración maravillosa para tal afirmación, pero, el margen del libro era muy estrecho para escribirla.
Esta afirmación se conoce como el **Último Teorema de Fermat**. Tuvieron que pasar más de tres siglos y medio (más de 350 años), para que el 24 de octubre el matemático inglés **Andrew Wiles (1953-)** diera una prueba definitiva al teorema.

# 7. Notas sobre teoría de los números.

## 7.1. La criba de Erástostenes.

**Erástotenes (276-194 a.C.)** matemático griego construyó un ingenioso método para obtener los números primos naturales, este método consiste en ir eliminando los múltiplos de cada primo hallado en la tabla. Veamos como procedemos con los primeros 50 números naturales.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | †4 | 5 | †6 | 7 | †8 | ‡9 | †10 |
| 11 | †12 | 13 | †14 | ‡15 | †16 | 17 | †18 | 19 | †20 |
| ‡21 | †22 | 23 | †24 | §25 | †26 | ‡27 | †28 | 29 | †30 |
| 31 | †32 | ‡33 | †34 | §35 | †36 | 37 | †38 | ‡39 | †40 |
| 41 | †42 | 43 | †44 | ‡45 | †46 | 47 | †48 | ✓49 | †50 |

Con el símbolo † hemos eliminado los múltiplos de 2, con ‡ eliminamos los múltiplos de 3, los múltiplos de 5 los eliminamos con el símbolo § y los múltiplos de 7 los eliminamos con el símbolo $\checkmark$. Los números que nos quedaron con el color azul son todos los primos entre 1 y 50.

## 7.2. Los números perfectos.

Algunos números naturales tiene propiedades bien interesantes. Los divisores propios (son todos los divisores de un número sin incluir al número) de 6, son $1, 2, 3$. Ahora, resulta que 6 lo podemos escribir como la suma de sus divisores propios. Lo mismo ocurre con el número 28. Una clase de números como los dos anteriores son de estudio en la teoría de los números.

**Definición 7.1** *Un número natural $n$ se llama **perfecto** si se puede escribir como la suma de sus divisores propios.*

**Ejemplo 7.2** *Los números, 6, 28, 496, 8128 son números perfectos.*

**NOTAS:**

- El último número perfecto hallado (el 41), tiene más de siete millones (7.235.733) de dígitos y es el número

  $$2^{244036585}$$

  y fue descubierto en mayo de 2004.

- Euclides, Probó el siguiente enunciado:

  $$\textit{Si } 2^{n-1} \textit{ primo, } \quad n \in \mathbb{N}, \textit{ entonces } p = (2^n - 1)2^{n-1} \textit{ es perfecto.}$$

  Nótese por ejemplo que, $2 = 2 - 1$ es primo y $p = (2^2 - 1)2^{2-1} = 6$ es perfecto

- **Leonard Euler (1707-1783)**, probó que

  *Un número $p$ par es perfecto si y sólo si $p = (2^n - 1)2^{n-1}$, con $(2^n - 1)$ primo.*

- Existe en la actualidad algunos problemas abiertos (problemas no resueltos) como:

1. Probar si todos los números perfectos son pares, o si existe un número perfecto impar.
2. Probar si los números perfectos forman un conjunto finito o infinito.

- Algunas propiedades de los números perfectos:

  1. Son triangulares, es decir, son de la forma $p = n + \frac{n(n-1)}{2}$. Por ejemplo, $6 = 3 + \frac{3(3-1)}{2}$.
  2. También son el resultado de las sumas parciales de la serie
  $$\sum_{n=1}^{\infty} n.$$
  Obsérvese que si $S_n = \sum_1^n n$; entonces, $6 = s_3$ y $28 = s_7$.
  3. Excluido el 6 son todos los números perfectos la suma parcial de la serie de los cubos de los números naturales impares. Es decir, si $p > 6$ es perfecto, entonces
  $$p = \sum_1^n (2n-1)^3, \ n \geq 2.$$

## 7.3. Los números de Mérsenne.

Ligado a los números perfectos aparecen los números de Mersenne, descubiertos por el religioso francés **Marin Mersenne (1588-1648)** que se definen a continuación.

**Definición 7.3** *Sea $p$ un número natural, $M_p = 2^p - 1$ se llama un* ***número de Mersenne****. Si además, $p$ es primo y $M_p$ es primo, entonces a $M_p$ se le llama* ***primo de Mersenne****.*

Mersenne planteó que $M_p$, con $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ $y$ 257, es primo y que no hay ningún otro primo hasta 257.
Después de 300 años años se probó que Mersenne había cometido 5 errores pues, $M_{61}$ es primo, $M_{67}$ no es primo, $M_{89}$ es primo, $M_{107}$ es primo y $M_{257}$ no es primo.
Una nota curiosa ocurrió en el año 1903, cuando el matemático Frank Cole

asombró a una multitud en una conferencia de la Sociedad Matemática Americana al probar que $M_{67}$ no era primo, después de 10 años de trabajo.

Usando calculadoras se puede comprobar algunos casos del resultado conocido por Mersennne que dice:

Si $p$ *no es primo* entonces $M_p$ no es primo.

Ahora, podemos asociar los números de Mersenne con los números perfectos, mediante el siguiente resultado:

*$p$ es un número perfecto par si y sólo si $p = 2^n \cdot M_n$, con $M_n$ un número primo de Mersenne.*

**NOTAS:**

- En la actualidad existe mucha actividad por encontrar números de Mersenne pues, además, de constituir los primnos más grandes encontrados, por cada primo de Mersenne existe un número perfecto par.

  También existen programas informáticos que sirven de "test rápido" para determinar si los números $M_n$ son primos o no. Por ejemplo, el último número perfecto hallado (el número 41) fue encontrado utilizando programas informáticos.

- Otros problemas abiertos:

  1. ¿Qué números de Mersenne son primos?
  2. Dos números naturales primos $p, q$ se llaman **primos gemelos** si $q = p+2$. Por ejemplo, 3 y 5; 5 y 7; 11 y 13; 29 y 31, son parejas de primos gemelos. El problema es ¿existen infinitos primos gemelos?
  3. Otro problema sin resolver es la famosa **conjetura (un enunciado que no se ha probado que es cierto, pero, tampoco se ha probado que no lo es) de Goldbach** que dice

     *cualquier número par mayor que 2 es la suma de dos números primos.*

     Por ejemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, etc. Hasta ahora, la conjetura se ha verificado para $n = 10^{14}$.

- ¿Existen infinitos primos de la forma $n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$?
  Por ejemplo, $1^2 + 1$, $5^2 + 1$, $17 = 4^2 + 1$, $37 = 6^2 + 1$, etc.

- ¿Existe un número primo entre $n^2$ y $(n + 1)^2$?
  Por ejemplo, 2 y 3 están entre 2 y 4.
  $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ son primos que están entre 4 y 25.

- Un número natural primo $f$ se llama **primo de Fermat** si $f = 2^n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por ejemplo son primos de Fermat $3, 5, 17$, etc. El problema es, *¿existen infinitos números primos de Fermat?*

# 8. Bibliografía


[1] **ALDAZ. J y BRAVO**. A. *Perspectivas en la teoría de los números*, [en línea]. Disponible en
URL: http://www.emis.de/proceedings/Chicho2001/Aldaz-Bravo.pdf. [Consulta 01 de diciembre de 2004].

[2] **CADENAS, R** *La ecuación de segundo grado. Un estudio Histórico-Didáctico.* V Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto-Venezuela, 2004.

[3] **CADENAS, R y RIVAS, M**. *Fundamentos de Matemática Básica en la Formación de Docentes*. En proceso de publicación, 2004.

[4] **GACETILLA MATEMÁTICA**. *El Teorema de Pitágoras*, [en línea]. Disponible en URL: http://www.arrakis.es/ mcj/teorema.htm. [Consulta 21 de febrero de 2005].

[5] **HERNÁNDEZ, V**. *La Geometría Analítica de Descartes y Fermat: ¿ Y Apolonio?*, [en línea]. Disponible en
URL: http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Victor/nageoana.pdf. [Consulta 01 de diciembre 2004].

[6] **NÁPOLES. J**. *La historia como elemento unificador en la Educación Matemática. Algunos apuntes como (pre)texto.* Universidad de la Cuenta del Plata. Argentina, 2004.

[7] **OLIVEIRA. C.** *La Historia como recurso didáctico no processo dse ensino e aprensizagem da matemática.* V Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto-Venezuela, 2004.

[8] **SIERRA, M**. *Notas de historia de las Matemáticas para el currículo de secundaria.* En: L. Rico (edit.): La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona, Horsori-ICE Universitat de Barcelona, 1997, pp.: 179-190.

[9] **SINGH, S**. *El último teorema de Fermat.* Editorial Norma S.A, 1999.

[10] **VARA, J**. *Historia del Álgebra*, [en línea]. Disponible en URL: http://www.mate.com.mx/proyectos/histalgebra0005.htm. [Consulta 01 de junio de 2004].