

# Optimización de la sincronización de una red de autómatas de Winfree acoplados estocásticamente por medio de un algoritmo genético

## Synchronization optimization in a network of stochastically coupled Winfree automata through a genetic algorithm

José Manuel Albornoz<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Electrónica y Comunicaciones, Escuela de Ingeniería Eléctrica,  
Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

<sup>2</sup>Postgrado en Física Fundamental, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida,  
Venezuela.

\*albornoz@ula.ve

### Resumen

*Las redes de autómatas estocásticamente acoplados constituyen un ejemplo sencillo de sistemas auto-organizados: bajo ciertas condiciones aparece sincronización espontánea en este tipo de sistemas. Una motivación para estudiar la aparición de la sincronización espontánea es su posible aplicación al problema de la sincronización de símbolos en sistemas de comunicaciones. En este trabajo se emplea un algoritmo genético para optimizar la operación sincrónica espontánea en una red de autómatas de Winfree estocásticamente acoplados. En el caso estudiado se desprecian los posibles retardos asociados al acople entre elementos así como la influencia del ruido y de las interferencias.*

**Palabras clave:** sincronización, propiedades emergentes, autómatas de Winfree, algoritmos genéticos.

### Abstract

*Networks of stochastically coupled automata are a simple example of a self-organizing system: under certain conditions spontaneous synchronization can appear in this type of systems. One reason to study spontaneous synchronization is its potential application to the problem of symbol synchronization in digital communication systems. In this work a genetic algorithm is employed to optimize the spontaneous synchronous operation in a network of stochastically coupled Winfree automata. In the case under study the influences of the possible delays associated with the coupling between elements as well as those of noise and interference are neglected.*

**Key words:** synchronization, emergent properties, Winfree automata, genetic algorithms.

### 1. Introducción

En un sistema de comunicaciones digitales es necesario establecer una referencia de tiempo común en localizaciones físicamente separadas para la correcta recuperación de los símbolos transmitidos. En este tipo de sistemas, la salida del demodulador debe ser muestreada en los instantes  $t_m = mT + \tau$ , donde  $T$  es el intervalo entre símbolos y  $\tau$  es el retardo asociado a la propagación entre transmisor y receptor. Este muestreo requiere una señal de

referencia en el receptor; el proceso de recuperación de esta señal se denomina sincronización de símbolos. Nótese que no sólo debe conocerse la frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T$  sino el instante preciso en el que la muestra debe ser tomada dentro del intervalo  $T$  (Proakis, 2001).

En algunos sistemas de comunicaciones la sincronización de símbolos se logra empleando un reloj maestro que proporciona una base de tiempo muy precisa, la cual está presente tanto en el transmisor como en el

receptor; en ese caso, es necesario estimar el retardo de propagación  $\tau$ , en el receptor para poder determinar con suficiente precisión el instante de muestreo  $t_m$ . Otra técnica de sincronización de símbolos consiste en transmitir la frecuencia de reloj  $1/T$  o un múltiplo de  $1/T$  junto con la señal que contiene la información; esto tiene la desventaja de que es necesario dedicar potencia y ancho de banda para la transmisión de tal señal. Por último, la señal de reloj también puede ser extraída de la señal recibida, lo cual requiere un diseño cuidadoso de la señal a transmitir, así como técnicas especiales de demodulación (Lee y Messerschmitt, 1994).

En el presente estado del arte, las técnicas de sincronización empleadas en la actualidad no pueden duplicar la señal de reloj generada en el transmisor con una precisión arbitraria. Esto se debe al costo computacional de las técnicas de estimación de retardo y al hecho de que la presencia de interferencias y de trayectorias múltiples degrada la calidad de los estimados. Por otra parte, a medida que el ancho de banda de los sistemas de comunicaciones de la actualidad aumenta, es cada vez más difícil mantener la deriva de fase de la señal de reloj recuperada dentro de límites aceptables (Lohan et al, 2005).

Una posible alternativa al problema de la sincronización de símbolos sería el disponer de un esquema bajo el cual se produzca sincronización espontánea, a semejanza de algunos fenómenos de este tipo que ocurren en la naturaleza (Strogatz, 2003). En un sistema de este tipo la emergencia de una señal de reloj precisa sólo dependería de la interacción entre los elementos del sistema, lo cual eliminaría la necesidad de realizar estimación del retardo de propagación en el receptor. En este trabajo se examinará un tipo de red en la que aparece sincronización espontánea, la cual podría servir como modelo para la implementación de un sistema de comunicaciones que funcione bajo este esquema. El estudio fue realizado en ausencia de ruido e interferencia, asumiendo que el retardo de propagación es despreciable.

Los sistemas en los que se observa sincronización espontánea pueden compararse a una fábrica en las que existen máquinas que producen ciertas partes, las cuales son a su vez utilizadas por otras máquinas. Bajo este escenario existen dos posibles modos de operación: un modo asíncrono, en el que las partes son almacenadas y posteriormente recuperadas cuando se les necesita, y un modo síncrono en el que las partes son producidas a medida que otras máquinas las necesitan. Este último modo requiere una organización compleja, la cual puede emerger espontáneamente como consecuencia de la interacción entre las máquinas individuales en el sistema. Un ejemplo de este tipo de comportamiento emergente son las redes enzimáticas, en las cuales las reacciones asociadas a las reacciones bioquímicas que mantienen los

procesos vitales ocurren de manera sincronizada como resultado de la interacción entre enzimas a través de los productos de estas reacciones. Otros ejemplos son la sincronización espontánea en mapas caóticos acoplados y en arreglos de osciladores idénticos (Strogatz, 2001).

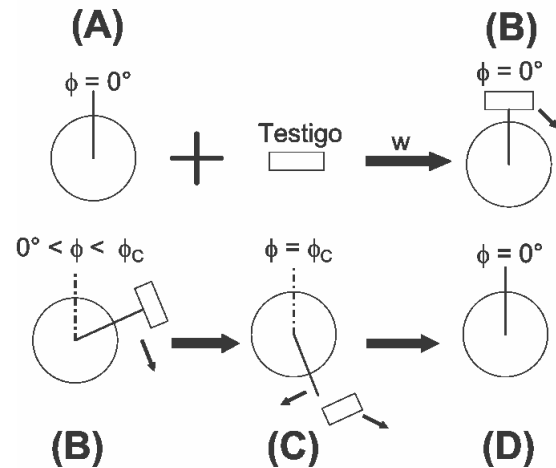


Fig. 1: Autómata de Winfree

La operación individual de las máquinas que constituyen un sistema en el que se da sincronización espontánea puede representarse por medio del llamado autómata de Winfree (Mikhailov, 2002), ilustrado en la Fig. 1. En este modelo cada máquina es representada por un “reloj” cuya dinámica representa movimiento determinístico a lo largo de una cierta coordenada interna de fase. La fase  $\Phi = 0$  corresponde al estado de reposo (A) del autómata, en la que éste espera por un “testigo” para comenzar a funcionar. El ciclo de operación comienza una vez que un testigo es tomado por el autómata (lo cual ocurre con una cierta probabilidad  $w$ ), incrementándose la fase de forma progresiva a partir de ese momento (B). Cuando un valor de fase  $\Phi_C$  es alcanzado (C), el autómata libera el testigo. Después de este evento, la fase del autómata sigue aumentando hasta que se alcanza el valor máximo de fase  $\Phi_{max}$ , retornando posteriormente a la fase inicial  $\Phi = 0$  (D) donde el autómata permanece en espera de un nuevo testigo. Una vez que un testigo es tomado, el ciclo ocurre en un tiempo fijo  $\tau$ . El testigo liberado por un autómata es a su vez utilizado por otros autómatas en el sistema.

Se presenta a continuación una descripción formal de la dinámica de un autómata de Winfree. Se considera que el tiempo está discretizado en intervalos  $\Delta t$ , por lo que el transcurrir del tiempo estará descrito por  $t_n = n\Delta t$ . La fase  $\Phi_i$  es definida como el número de pasos de tiempo necesarios para alcanzar un estado particular en la dinámica del  $i$ -ésimo autómata. La dinámica de un autómata individual está entonces descrita por el siguiente algoritmo de evolución:

$$\Phi_i(\mathbf{n}+1) = \begin{cases} \Phi_i(\mathbf{n})+1, & \text{si } 0 < \Phi_i(\mathbf{n}) < \Phi_{\max} \\ 0, & \text{si } \Phi_i(\mathbf{n}) = \Phi_{\max} \\ 1, & \text{con probabilidad } w(\mathbf{n}), \text{ si } \Phi_i(\mathbf{n}) = 0 \\ 0, & \text{con probabilidad } 1-w(\mathbf{n}), \text{ si } \Phi_i(\mathbf{n}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La cantidad  $m$  de testigos libres en el sistema es incrementada en una unidad cada vez que un autómata pasa por el estado  $\Phi(n) = \Phi_C$ . Al mismo tiempo se considera que un testigo tiene un cierto “tiempo de vida”, y que la probabilidad de desaparición de los testigos por cada paso de tiempo es  $g$ . Por tanto, el número de testigos libres  $m(n)$  evoluciona en el tiempo de acuerdo al siguiente algoritmo:

$$m(n+1) = m(n) + \sum_{i=1}^N \delta(\Phi_i(n) - \Phi_C) - \sum_{j=1}^{m(n)} \zeta_j \quad (2)$$

El segundo término del lado derecho de la expresión describe la liberación de nuevos testigos. Aquí  $\delta(\Phi)$  es la función delta de Dirac ( $\delta(0)=1$ ,  $\delta(\Phi) = 0$  para cualquier  $\Phi \neq 0$ ) y  $N$  es el número total de autómatas en la red. El último término toma en cuenta la desaparición de los testigos debido a su tiempo de vida limitado: la variable aleatoria binaria  $\zeta$  toma valores 1 y 0 con probabilidades  $g$  y  $1-g$ , respectivamente en cada iteración  $n$ . Es de notar que este término equivale a la versión discreta de una tasa de desaparición exponencial de los testigos.

La probabilidad  $w(m)$  de que se inicie el ciclo de un autómata es el parámetro que determina el acoplamiento entre los elementos de la red; esta probabilidad depende del número total  $m(n)$  de testigos libres en un momento dado, lo cual es equivalente a tener acoplamiento global en el sistema. Cualquier testigo puede iniciar el ciclo de un autómata con una cierta probabilidad  $w_1$  por cada incremento de tiempo; más aún, existe también una pequeña probabilidad  $w_0$  de que el ciclo de los autómatas se inicie espontáneamente. La probabilidad  $w(m)$  de iniciación del ciclo será entonces

$$w(m) = w_0 + mw_1 \quad (3)$$

Las ecuaciones anteriores describen la evolución de un grupo de  $N$  autómatas estocásticamente acoplados a través de la probabilidad  $w(m)$ . La Fig. 2 muestra el histograma de las fases para un grupo de 200 autómatas con  $\Phi_{\max} = 100$ ,  $\Phi_C = 50$ ,  $g = 0.2$ ,  $w_0 = 0.01$  y  $w_1 = 0.01$ ; se observa la aparición de dos picos bien definidos en el histograma, lo cual evidencia cómo la población de autómatas se divide espontáneamente en dos grupos (“clusters”) que operan en sincronía con un desfase relativo de  $\Delta\Phi = 50$  iteraciones. Por su parte, la Fig. 3

muestra la evolución de la cantidad de testigos en el tiempo: puede observarse una secuencia de picos con un periodo correspondiente a la mitad de la duración del ciclo de los autómatas ( $\Phi_{\max} = 100$ ). Cada pico es producido por la liberación sincronizada de testigos por cada uno de los dos grupos de autómatas observados en el histograma combinada con la desaparición exponencial de los testigos una vez liberados.

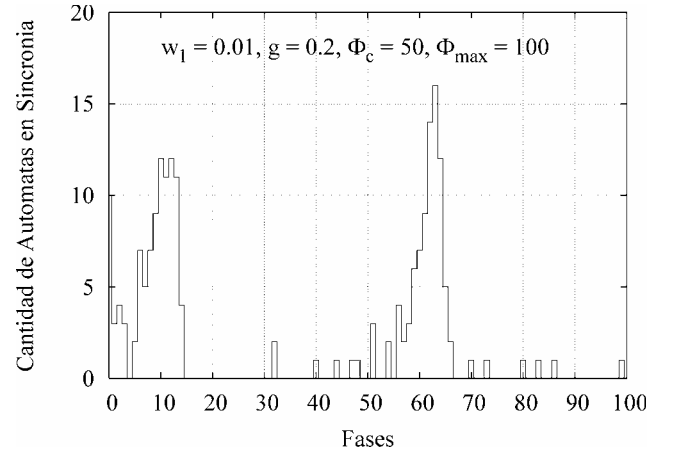


Fig. 2: Histograma de fases

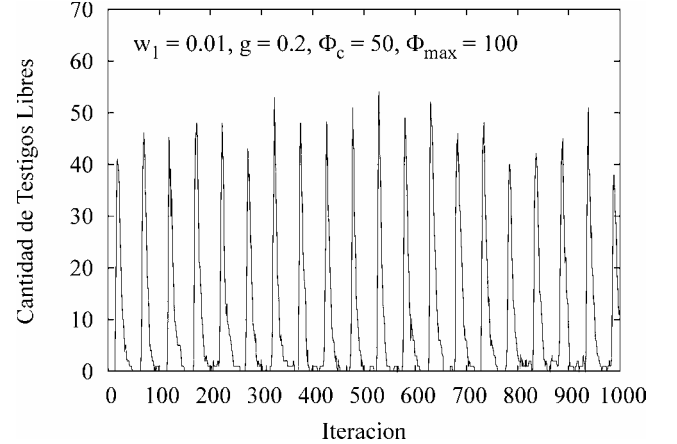


Fig. 3: Evolución temporal de la cantidad de testigos libres

## 2. Optimización de la red

Las propiedades de sincronización de una red de autómatas estocásticamente acoplados dependen de la fase máxima de sus ciclos  $\Phi_{\max}$ , la fase  $\Phi_C$  para la cual se libera un testigo, la probabilidad  $g$  de desaparición de los testigos, y las probabilidades  $w_0$ ,  $w_1$ . Es de interés encontrar la combinación de estos parámetros que hace que la mayor cantidad posible de autómatas operen de forma sincronizada.

Un posible criterio de optimización del funcionamiento del sistema sería maximizar la razón entre el valor máximo alcanzado por  $m(n)$  y el valor promedio de tal cantidad. Esto implicaría que la evolución temporal de la cantidad de testigos  $m(n)$  estaría conformada por una secuencia de picos agudos y estrechos; en consecuencia el histograma de fases mostraría clusters muy bien definidos. En estas condiciones se tendría un sistema en el que la gran mayoría de los autómatas estarían funcionando en sincronía espontánea.

A fines de lograr tal optimización se empleó un algoritmo genético para realizar una búsqueda en el espacio definido por las probabilidades de desaparición de los testigos  $g$  y de inicio del ciclo de un autómata  $w_l$ . La escogencia de un algoritmo genético se debió al hecho de que esta técnica es particularmente efectiva cuando no se tiene conocimiento de la naturaleza del espacio de las soluciones en el sistema a optimizar (Johnson y Rahmat-Samii, 1997). Una importante ventaja de los algoritmos genéticos sobre otros métodos de optimización es su naturaleza adaptiva, lo que los hace candidatos ideales en problemas que evolucionan en el tiempo, tal como en el caso de la sincronía en una red de comunicaciones. Por otra parte, un algoritmo genético es intrínsecamente paralelo, pudiendo explorar el espacio de soluciones en múltiples direcciones al mismo tiempo; adicionalmente, es fácil extender un algoritmo genético para realizar una búsqueda sobre un gran número de variables.

### 3. Algoritmo Genético Utilizado

En la implementación del algoritmo se definieron dos “cromosomas” de 10 bits cada uno, cada uno de los cuales representa uno de 1024 posibles valores (comprendidos entre 0 y 1) de las probabilidades  $(g, w_l)$ ; a su vez, cada par de valores de los cromosomas representan un sistema de autómatas que va a ser evaluado por el algoritmo. En lo sucesivo nos referiremos a cada sistema como un individuo de una población.

La evaluación de cada sistema se llevó a cabo ejecutando 5000 iteraciones sobre la red de autómatas para el par de valores  $(g, w_l)$  que corresponde a cada individuo de la población; se registra entonces el valor máximo  $m_{max}$  alcanzado por la cantidad de testigos  $m(n)$  en las últimas 1000 iteraciones, así como el número promedio de testigos libres  $m_{prom}$  durante ese lapso. El cociente  $F = m_{max}/m_{prom}$  constituye nuestra función de adaptación (“fitness”), la cual a nuestros efectos representa una medida de la sincronía con la que opera el sistema.

El proceso de optimización comienza con una población de 20 individuos con cromosomas aleatoriamente inicializados. Para cada uno de estos individuos el índice de adaptación  $F_k$  es calculado y

posteriormente normalizado con respecto al índice de adaptación promedio  $F_{prom}$  de la población;

$$F^k_{norm} = \frac{F_k}{F_{prom}}, \quad (4)$$

luego la población es ordenada de acuerdo a los valores de su índice de adaptación normalizado  $F^k_{norm}$ , tomados en orden decreciente.

El siguiente paso en el algoritmo es la asignación de oportunidades de reproducción a cada individuo de la población. Esta asignación es realizada empleando una técnica conocida como muestreo estocástico de residuos o selección proporcional (Whitley, 2003), en la cual la oportunidad asignada a cada individuo depende del valor de su índice de adaptación normalizado  $F^k_{norm}$ . Bajo esta estrategia, el número de copias de cada individuo que estarán disponibles en la sub-población que va a reproducirse es determinado por la parte entera de  $F^k_{norm}$ . El individuo tiene una oportunidad de colocar una copia adicional de sus genes en la sub-población si la parte fraccional de  $F^k_{norm}$  es mayor que la salida proporcionada por un generador de números aleatorios invocado a efectos de determinar tal oportunidad adicional. Este último procedimiento es también utilizado si la parte entera de  $F^k_{norm}$  es cero.

Una vez seleccionada la sub-población que va a reproducirse se realiza el cruce entre los individuos de la misma a través de la traslocación, es decir, el intercambio de partes de los cromosomas de cada ‘pareja’ en un punto aleatorio de los mismos con una cierta probabilidad  $p_{tras}$ . En nuestro caso el proceso de cruce implica la sustitución de la población anterior, por lo que estamos empleando la llamada variante generacional del algoritmo genético. Adicionalmente se permite la mutación de los cromosomas con una pequeña probabilidad  $p_{mut}$  a fines de explorar partes del espacio de soluciones que no están representadas en la composición genética de la población actual.

El proceso de selección, mutación y traslocación de los genes produce una nueva “generación” de individuos. El algoritmo descrito fue repetido para un total de 100 generaciones. En cada una de estas generaciones los valores de  $(g, w_l)$  correspondientes al individuo con el más alto índice de adaptación  $F$  fueron almacenados; el resultado del proceso de optimización está dado por los valores de  $(g, w_l)$  que corresponden al individuo con el mayor índice de adaptación entre estas 100 generaciones.

El resultado del proceso fue  $w_l = 0.0224$  y  $g = 0.58887$  para una primera red con  $N = 200$ ,  $\Phi_{max} = 100$ ,  $\Phi_C = 50$  y  $w_0 = 0.01$ ; es notable el hecho de que el valor óptimo de  $g$  representa testigos con una vida media de apenas dos iteraciones. Adicionalmente, se realizó una

segunda optimización en la que se registró la aparición de un único cluster para  $w_l = 0.242188$ ,  $g = 0.998047$  en una red con  $N = 200$ ,  $\Phi_{\max} = 100$ ,  $\Phi_c = 5$  y  $w_0 = 0.01$ . En este caso el valor de  $g$  obtenido implica que los testigos desaparecen casi inmediatamente después de su liberación por los autómatas.

#### 4. Resultados

Las Figs. 4 y 5 muestran el histograma de fases y la evolución temporal del número de testigos libres para el primer grupo de autómatas anteriormente examinado después de la optimización de  $g$  y  $w_l$ . El histograma evidencia la formación de dos “clusters” muy bien definidos, con un desfase relativo de  $\Delta\Phi = 50$ . En estas condiciones la casi totalidad de los autómatas opera de forma sincrónica: cuando un grupo de autómatas libera testigos el otro grupo lo toma 50 iteraciones más tarde. No se observa la dispersión que se verifica en los dos clusters presentes en el histograma de la Fig. 2.

La evolución temporal de la cantidad de testigos libres muestra una serie de picos estrechos y muy bien definidos; entre picos sucesivos la cantidad de producto liberado es despreciable. Tal como se deduce del histograma, transcurren 50 iteraciones entre picos sucesivos, lo cual evidencia de nuevo la operación sincrónica de los dos grupos de autómatas.

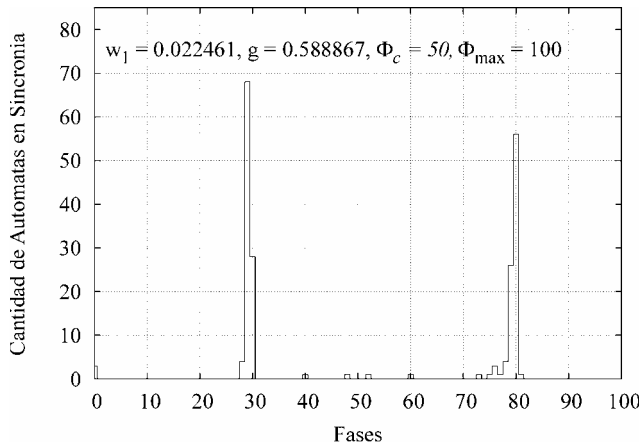


Fig. 4: Histograma de fases, red optimizada para 2 clusters.

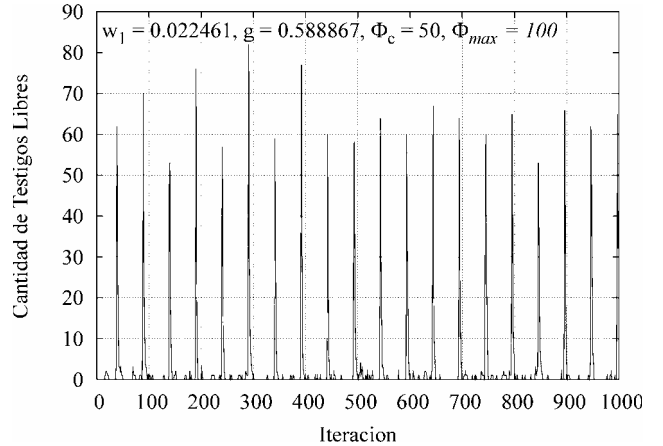


Fig. 5: Evolución temporal de la cantidad de testigos, red optimizada para 2 clusters.

Las Figs. 6 y 7 muestran el histograma de fases y la evolución temporal de la cantidad de testigos libres para el ensayo en el que se observó un único cluster. Se verifica la liberación sincronizada de testigos aproximadamente cada 100 iteraciones, así como la aparición de un cluster en el que un 80% de los autómatas operan en sincronía.

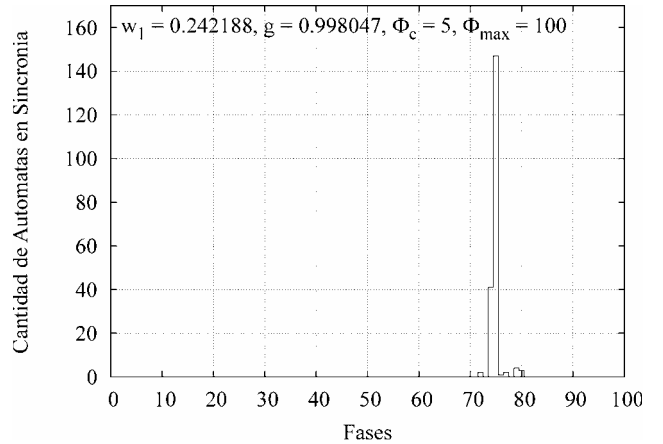


Fig. 6: Histograma de fases, red optimizada para 1 cluster

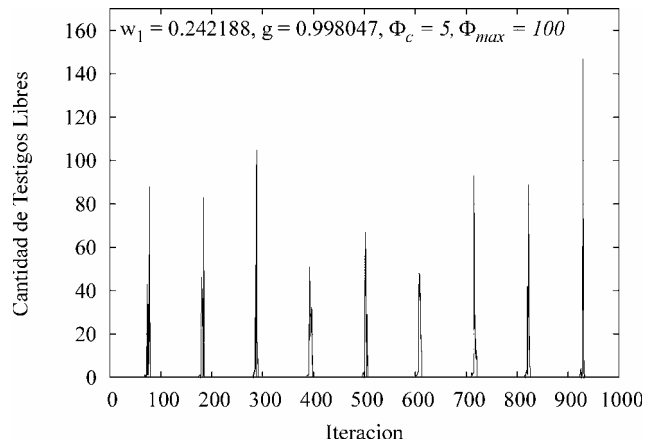


Fig. 7: Evolución temporal de la cantidad de testigos, red optimizada para 1 cluster.

Es necesario observar que en los ejemplos analizados el acople entre los autómatas no toma en cuenta posibles efectos de retardo; en otras palabras, los testigos liberados por los autómatas están disponibles de manera instantánea para otros autómatas. En sistemas reales tales como los sistemas de comunicaciones existen retardos inevitables asociados a la velocidad de propagación finita de las señales electromagnéticas, por lo que los resultados de este estudio son sólo aplicables a aquellas situaciones en la cuales tales retardos son despreciables. Por otra parte, es necesario enfatizar que el comportamiento observado aparece en ausencia de ruido e interferencia, factores éstos presentes en todo sistema de comunicaciones real. Adicionalmente, el acople entre los autómatas es global, situación que normalmente no se da en un sistema de comunicaciones ya que por lo común cada elemento sólo posee información proveniente de sus vecinos y no de la totalidad del sistema.

El proceso de sincronización es completamente espontáneo: una vez que el sistema comienza a funcionar se forman dos clusters de autómatas operando en sincronía después de un pequeño número de iteraciones. En estas condiciones, la señal de reloj necesaria para la sincronización de símbolos podría estar asociada a la evolución de la fase del autómata asociado a cada uno de los receptores.

La arquitectura del sistema estudiado obedece la configuración mostrada en la Fig. 8, en la que existe un único grupo de autómatas que toma y libera testigos. Una variación interesante que podría ser explorada se muestra en la Fig. 9, la cual representa la arquitectura de un sistema constituido por dos grupos A y B de autómatas operando simultáneamente; en este caso el primer grupo de autómatas libera un testigo  $T_A$  que es utilizado como 'materia prima' por el segundo grupo; éste a su vez libera un testigo  $T_B$  que a su vez sirve de materia prima al primer grupo. En este escenario sería necesaria la optimización simultánea de cuatro parámetros: dos probabilidades de decaimiento  $g_A$  y  $g_B$ , y dos probabilidades de inicio de ciclo  $w_{1A}$  y  $w_{1B}$ . En este caso, la utilización de un algoritmo genético sería nuevamente una opción a considerar frente al empleo de algoritmos de optimización convencionales. Otra posibilidad a explorar sería la de realizar la optimización sobre un mayor número de parámetros; por ejemplo, considerando cromosomas para  $N$ ,  $\Phi_{\max}$ ,  $\Phi_C$ ,  $g$  y  $w_I$ .

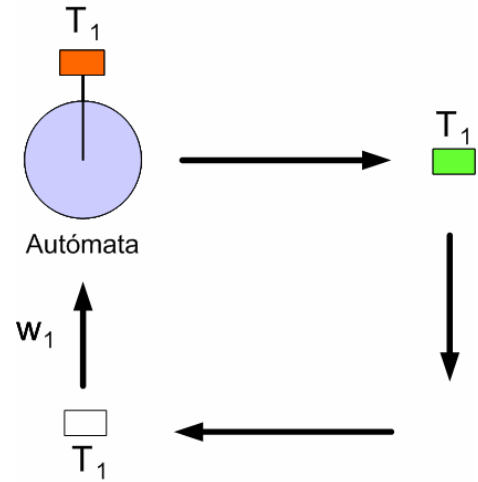


Fig. 8: Configuración de la red estudiada

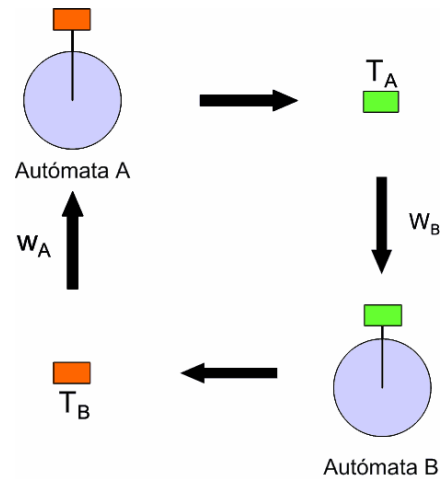


Fig. 9: Otra posible configuración de la red

## 5. Conclusiones

Se empleó un algoritmo genético para optimizar la operación síncrona de un sistema de autómatas de Winfree estocásticamente acoplados; la operación de este tipo de red se basa en la toma y liberación de testigos por cada uno de los autómatas. La motivación para el estudio de estos sistemas es la búsqueda de alternativas para lograr la sincronización de símbolos en un sistema de comunicaciones. El funcionamiento de la red fue optimizado utilizando un algoritmo genético para lograr que la máxima cantidad de autómatas operen de manera síncrona. El criterio de optimización utilizado fue el de maximizar el cociente entre el máximo valor del número de testigos libres y el valor promedio de dicha cantidad. Se verificó que la optimización produce un sistema en el que casi la totalidad de los autómatas opera de forma síncrona, lo cual se evidencia a través del histograma de fases de los autómatas y de la evolución temporal de la cantidad de

testigos. Los resultados apuntan a que la utilización de algoritmos genéticos es una alternativa a ser considerada para llevar a cabo la optimización de un sistema de autómatas con una configuración más complicada. Este tipo de sincronización podría tener potencial para ser utilizada en sistemas de comunicación, sin embargo el análisis desarrollado en este trabajo no toma en cuenta el efecto de los retardos en el acople ni los efectos del ruido y la interferencia; adicionalmente el acople entre los autómatas es global, lo que no siempre puede darse en una red de comunicaciones real. El estudio fue realizado para una configuración particular de la red de autómatas; otras configuraciones son posibles, las cuales podrían representar distintas topologías en un sistema de comunicaciones.

## Referencias

- Proakis, J, 2001. Digital Communications, McGraw-Hill, Boston.
- Lee E y Messerschmitt D, 1994. Digital Communication, 2<sup>da</sup> edición. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Lohan, E.S. Hamila, R. Lakhzouri, A. Renfors, M, 2005. [Highly efficient techniques for mitigating the effects of multipath propagation in DS-CDMA delay estimation.](#) IEEE Transactions on Wireless Communications. Vol 4, No. 1, pp 149-162.
- Strogatz S, 2003. Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. Hyperion Books, New York.
- Strogatz, S, 2001. Exploring Complex Networks. Nature, Vol 410, No. 8, Marzo, pp. 268-276.
- Mikhailov A y Calenbuhr V, 2002. From Cells to Societies, Springer Verlag, New York.
- Johnson J y Rahmat-Samii Y, 1997. Genetic Algorithms in Engineering Electromagnetics. IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol 39, No. 4, pp 7-21.
- D. Whitley. A Genetic Algorithm Tutorial, 2003. Computer Science Department, Colorado State University, USA.