Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

1) Programa del curso

2) Bibliografía

3) Plan de evaluación del curso

4) Reglas en el curso

5) Delegado del curso

6) Horas de consulta

Pueden descargar este material de la página web.

Modelado de Sistemas Físicos

1) ¿Por qué es importante estudiar Modelado de Sistemas Físicos?

2) ¿Cuáles son los objetivos de este curso?

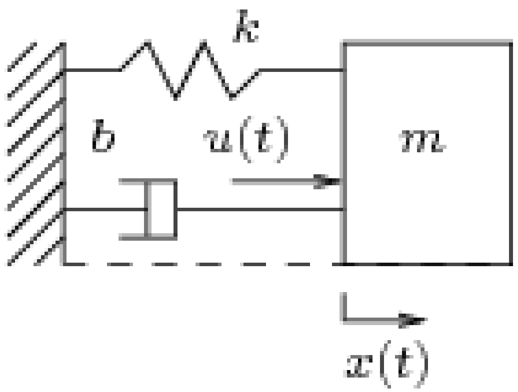
3) ¿Qué conocimientos debo haber obtenido una vez aprobado este curso?

4) ¿De qué me servirá este curso en las materias futuras y en general?

Sistemas Mecánicos

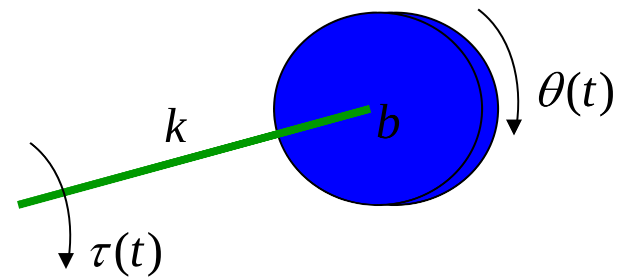
- Segunda Ley de Newton

$$\sum F = ma$$



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

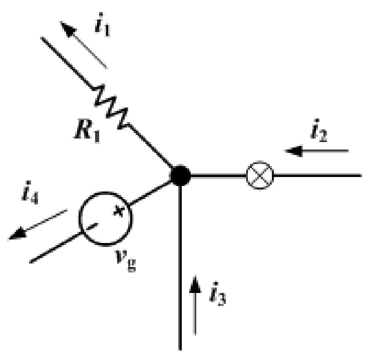
$$\sum \tau = J\alpha$$



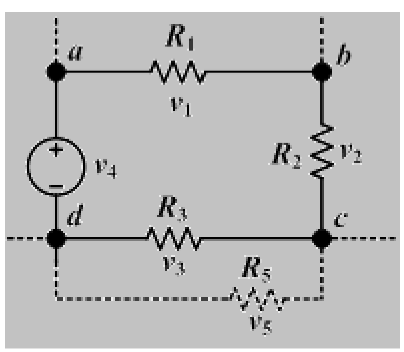
$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = \tau(t)$$

Sistemas Eléctricos

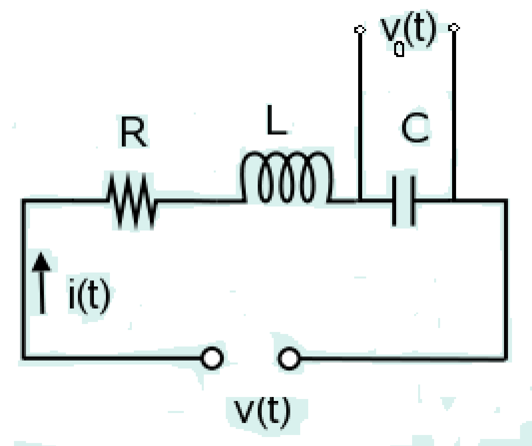
- Leyes de corriente y voltaje de Kirchoff



$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + I_3 \ldots + I_n = 0$$

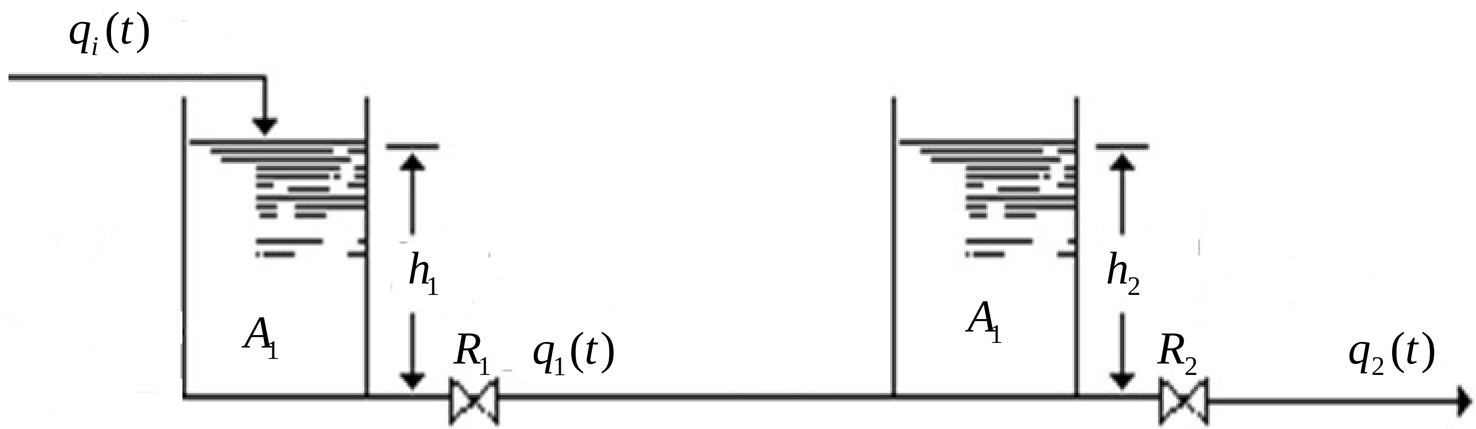


$$\sum_{k=1}^{n} V_k = V_1 + V_2 + V_3 \ldots + V_n = 0$$



$$LC\ddot{v}_0(t) + RC\dot{v}_0(t) + v_0(t) = v(t)$$

Sistemas Hidráulicos



Calculo de las velocidades de los flujos

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

Calculo del cambio en el nivel de liquido

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_i - q_1}{A_1} \qquad \frac{dh_2}{dt} = \frac{q_1 - q_2}{A_2}$$

$$A_1 A_2 R_1 R_2 \ddot{q}_2(t) + (A_1 R_1 + A_1 R_2 + A_2 R_2)\dot{q}_2(t) + q_2(t) = q_i(t)$$

Sistemas Térmicos

- Los sistemas térmicos son aquellos donde existe un intercambio de calor entre sustancias

- Estos sistemas se analizan en términos de resistencias y capacitancias

- La transferencia de calor por lo general es por conducción o convección

$$q = k\ \Delta T$$

$$R = \frac{1}{k}$$

$$C = m\ c$$

$q =$ Flujo de calor

$k =$ Coeficiente

$\Delta T =$ Diferencia de temperatura

$R =$ Resistencia térmica

$C =$ Capacitancia

$m =$ Masa de la sustancia

$c =$ Calor específico de la masa

Algunas Aplicaciones

Péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando la
plataforma Lego Mindstorms NXT®, Héctor Sánchez (Noviembre, 2009)

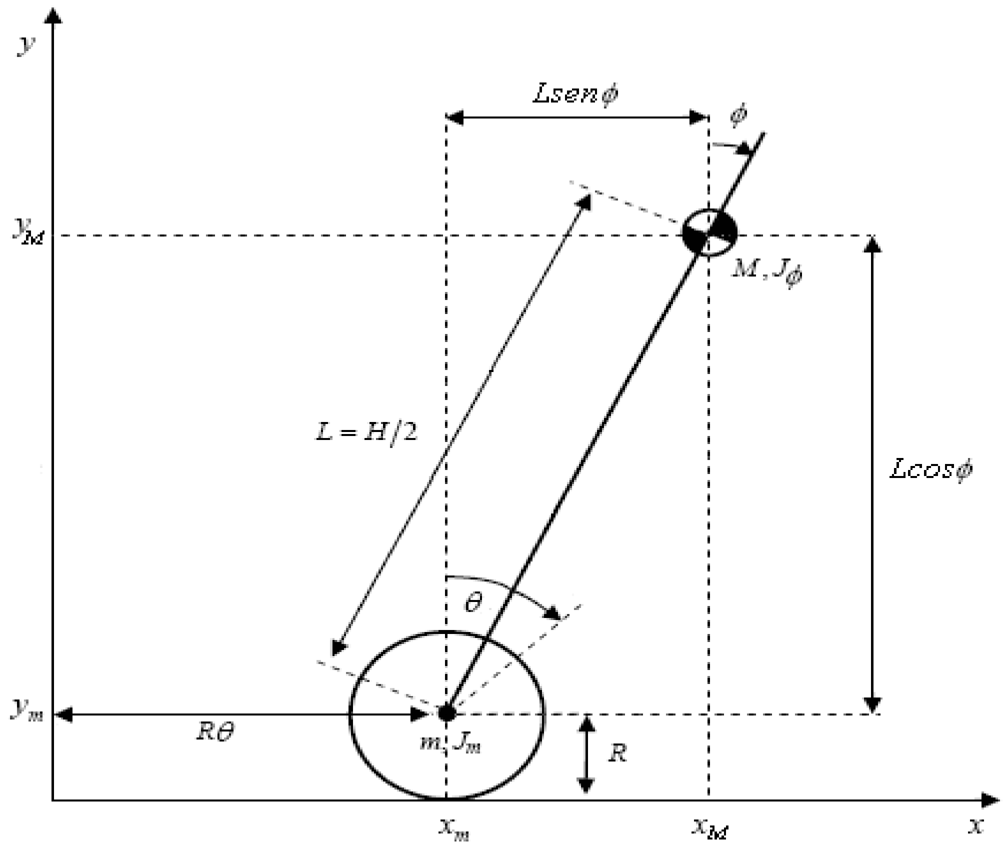
Ing. Héctor Sánchez

Prof. Iñaki Aguirre

Prof. Anna Patete

Péndulo invertido

Algunas Aplicaciones



θ:Ángulo de rotación de las ruedas $\quad$ ϕ :Ángulo de inclinación del cuerpo del péndulo

Algunas Aplicaciones

Usando Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial Lag}{\partial \theta}=F_{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Lag}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial Lag}{\partial \phi}=F_{\phi}$$

Se tiene:

$$\ddot{\theta}=\frac{(ML^2+J_{\phi})(u+MLR\sin\phi\,\dot{\phi}^2-(ML)^2Rg\ \sin\phi\ \cos\phi}{[(2m+M)R^2+2J_m](ML^2+J_{\phi})-(MLR\cos\phi)^2},$$

$$\ddot{\phi}=\frac{-(MLR\cos\phi)(u+MLR\dot{\phi}^2\sin\phi)+MgL\sin\phi\,[(2m+M)R^2+2J_m]}{[(2m+M)R^2+2J_m](ML^2+J_{\phi})-(MLR\cos\phi)^2}.$$

Algunas Aplicaciones

Modelo no Lineal de 4to Orden en Variables de Estado

Sean las variables de estado:

$$x_1 = \phi \qquad x_2 = \dot{\phi} \qquad x_3 = \theta \qquad x_4 = \dot{\theta}$$

Representación de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\dfrac{(MLR\cos x_1)(u + MLRx_2^2 \sin x_1)}{[(2m+M)R^2 + 2J_m]} + MgL\sin x_1}{(ML^2 + J_\phi) - \dfrac{(MLR\cos x_1)^2}{[(2m+M)R^2 + 2J_m]}}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(ML^2 + J_\phi)(u + MLR\sin x_1 x_2^2) - (ML)^2 Rg\sin x_1 \cos x_1}{[(2m+M)R^2 + 2J_m](ML^2 + J_\phi) - (MLR\cos x_1)^2}$$

Algunas Aplicaciones

Obtención del Modelo de 2do Orden

Desacoplando el sistema se tiene que: $\dot{x}_4 = \ddot{x}_3.$

De la representación de primer orden se obtiene:

$$u = \left[(2m+M)R^2 + 2J_m - \frac{(MLR\cos x_1)^2}{ML^2 + J_\phi} \right] \dot{x}_4 - MLR\sin x_1 (x_2)^2 + \frac{(ML)^2 Rg \sin x_1 \cos x_1}{ML^2 + J_\phi}.$$

Sustituyendo *u* en la expresión que define a $\dot{x}_2$

$$\dot{x}_2 = \frac{-MLR\cos x_1}{ML^2 + J_\phi}\dot{x}_4 + \frac{MgL\sin x_1}{ML^2 + J_\phi}.$$

Algunas Aplicaciones

Tomando la variable $\dot{x}_4$, que representa la aceleración de las ruedas, como la dinámica de control del péndulo invertido y denotando a esta variable como la nueva señal de control v, se tiene que:

$$\dot{x}_2 = \frac{-MLR\cos x_1}{ML^2 + J_\phi} v + \frac{MgL\sin x_1}{ML^2 + J_\phi}.$$

El nuevo sistema de 2do orden es:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{MgL}{ML^2 + J_\phi}\sin x_1 - \frac{MLR}{ML^2 + J_\phi}\cos x_1\, v.$$

Video

Péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando la
plataforma Lego Mindstorms NXT®, Héctor Sánchez (Noviembre, 2009)

Algunas Aplicaciones

Capsubot construido por
Jormany Quintero (Noviembre, 2009)

Ing. Jormany Quintero

Capsubot

Prof. Anna Patete

Prof. Iñaki Aguirre

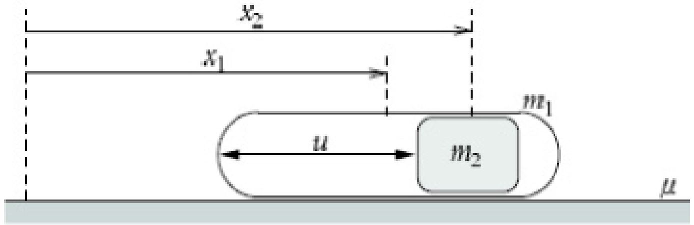
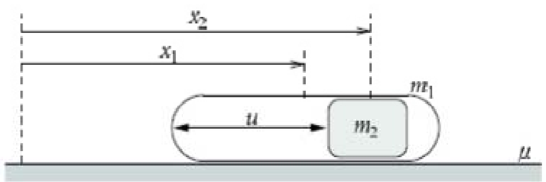


Diagrama del Capsubot

Algunas Aplicaciones

Modelado usando Leyes de Newton



Relaciones

$$\sum F_1 = m_1 \ddot{x}_1 \qquad \sum F_2 = m_2 \ddot{x}_2$$

$$u - sign(\dot{x}_1)\,\mu\, N = m_1\, \ddot{x}_1$$
$$-u = m_2 \ddot{x}_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + sign(\dot{x}_1)\mu(m_1 + m_2)g = u$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -u$$

Movimiento relativo

$$\bar{x}_2 = x_2 - x_1$$

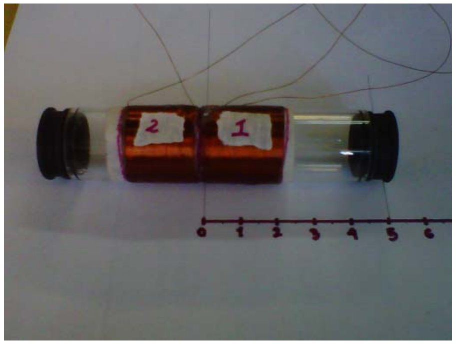
$$m_1 \ddot{x}_1 + sign(\dot{x}_1)\mu(m_1 + m_2)g = u$$
$$m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{\bar{x}}_2) = -u$$

Modelo del Sistema

$$m_1 \ddot{x}_1 + sign(\dot{x}_1)\mu(m_1 + m_2)g = u$$
$$m_1 m_2 \ddot{\bar{x}}_2 - sign(\dot{x}_1) m_2 \mu (m_1 + m_2) g = -(m_1 + m_2)u$$

Video

Capsubot construido por
Jormany Quintero (Noviembre, 2009)



Capsubot construido por
Jessica Barrera (2010)

Algunas Aplicaciones

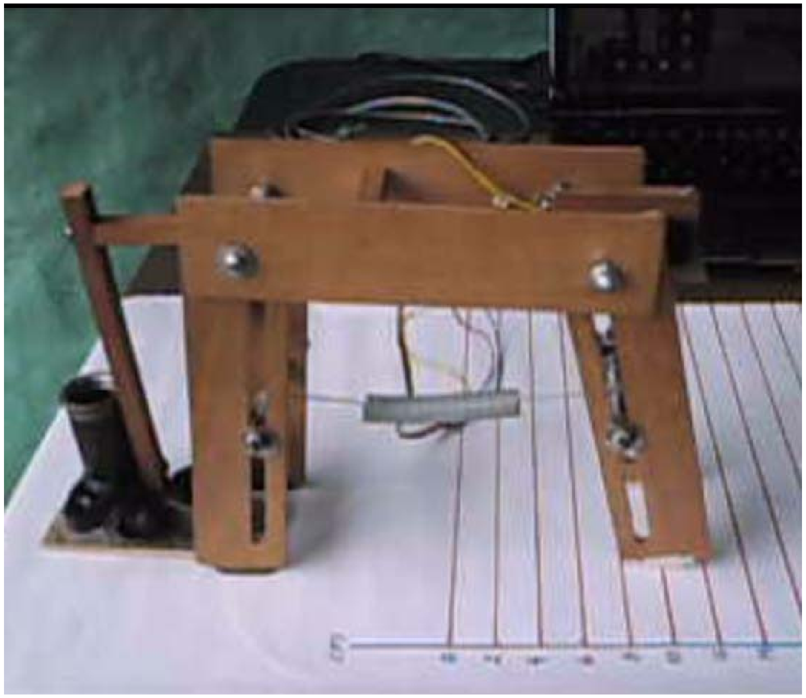
Prototipo SIR (*Spring Inchworm Robot*),
Andreina Zambrano (Julio, 2011), Juan Carlos Rivas (Octubre, 2012)

Ing. Andreina Zambrano

Ing. Juan Carlos Rivas

Prof. Anna Patete

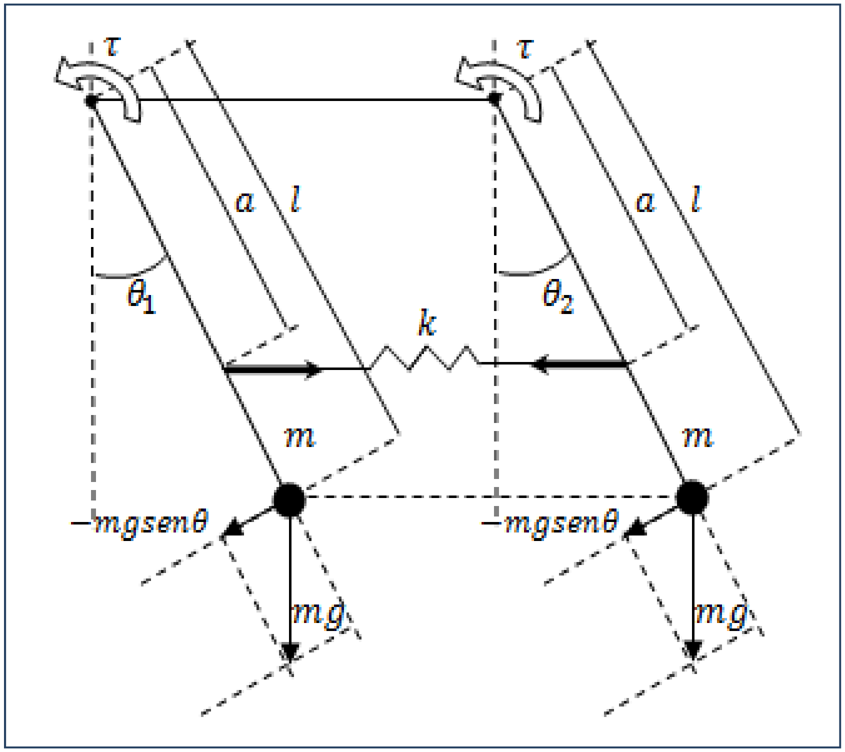
Prof. Iñaki Aguirre



Prototipo SIR

Algunas Aplicaciones

Modelado usando Leyes de Newton



Doble péndulo con un resorte

$$J\ddot{\theta}_1 = -lmgsen\theta_1 - k(x_1 - x_2)acos\theta_1$$

$$J\ddot{\theta}_1 = -lmgsen\theta_1 - k(asen\theta_1 - asen\theta_2)acos\theta_1$$

$$J\ddot{\theta}_1 = -lmgsen\theta_1 - ka^2(sen\theta_1 - sen\theta_2)cos\theta_1$$

$$J\ddot{\theta}_2 = -lmgsen\theta_2 - k(x_2 - x_1)acos\theta_2$$

$$J\ddot{\theta}_2 = -lmgsen\theta_2 - k(asen\theta_2 - asen\theta_1)acos\theta_2$$

$$J\ddot{\theta}_2 = -lmgsen\theta_2 - ka^2(sen\theta_2 - sen\theta_1)cos\theta_2$$

$$J = ml^2$$

Algunas Aplicaciones

Primera etapa del movimiento

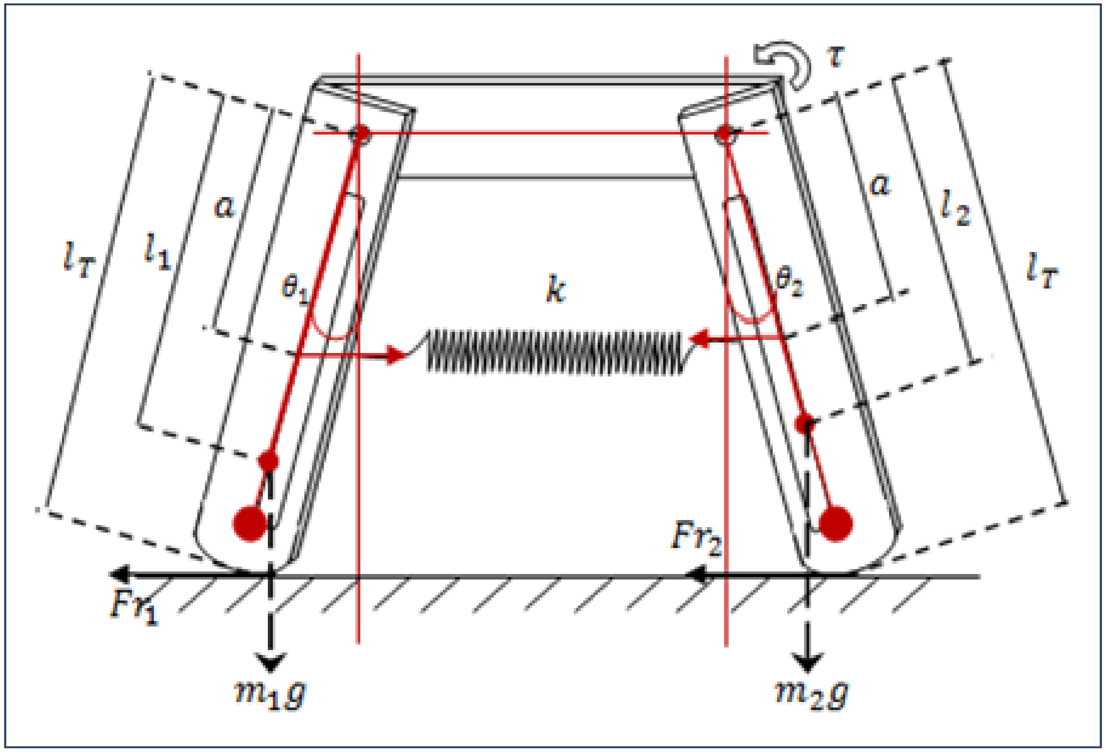


Diagrama de la primera etapa del movimiento

Algunas Aplicaciones

Para el apéndice trasero

$$J\ddot{\theta}_1 = F_g + F_{r1} + F_k$$

Donde:

$$F_g = l_1 m_1 g sen\theta_1$$

$$F_{r1} = -\mu_1 N_1 \dot{d}_1 = -\mu_1 N_1 \left(l_T cos\theta_1 \dot{\theta}_1\right)$$

$$F_k = -k(x_1 - x_2) a cos\theta_1 = -ka^2 cos\theta_1 (sen\theta_1 - sen\theta_2)$$

Sustituyendo

$$J\ddot{\theta}_1 = l_1 m_1 g sen\theta_1 - \mu_1 N_1 \left(l_T cos\theta_1 \dot{\theta}_1\right) - ka^2 cos\theta_1 (sen\theta_1 - sen\theta_2)$$

Sabiendo que: $J = {l_1}^2 m_1$ $N_1 = P = m_1 g$

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 = \frac{g}{l_1} sen\theta_1 - \frac{ka^2 cos\theta_1}{m_1 {l_1}^2}(sen\theta_1 - sen\theta_2) - \mu_1 m_1 g (l_T cos\theta_1)\dot{\theta}_1}$$

Algunas Aplicaciones

Para el apéndice delantero

$$J\ddot{\theta}_2 = F_g + F_{r2} + F_k + \tau$$

Donde:

$$F_g = -l_2 m_2 g sen\theta_2$$

$$F_{r2} = -\mu_2 N_2 \dot{d}_2 = -\mu_2 N_2 \frac{\partial}{\partial t}(d_2) = -\mu_2 N_2 \frac{\partial}{\partial t}(l_T sen\theta_2) = -\mu_2 N_2 \left(l_T cos\theta_2 \dot{\theta}_2\right)$$

$$F_k = -k(x_2 - x_1) a cos\theta_2 = -ka^2 cos\theta_2 (sen\theta_2 - sen\theta_1)$$

Sustituyendo

$$J\ddot{\theta}_2 = -l_2 m_2 g sen\theta_2 - \mu_2 N_2 \left(l_T cos\theta_2 \dot{\theta}_2\right) - ka^2 cos\theta_2 (sen\theta_2 - sen\theta_1) + \tau$$

Sabiendo que: $J = l_2{}^2 m_2$ $N_2 = P = m_2 g$

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2} sen\theta_2 - \frac{ka^2 cos\theta_2}{m_2 l_2{}^2}(sen\theta_2 - sen\theta_1) - \mu_2 m_2 g (l_T cos\theta_1)\dot{\theta}_2 + \frac{\tau}{m_2 l_2{}^2}}$$

Algunas Aplicaciones

Haciendo el cambio

$$X_1 = \theta_1 \qquad X_3 = \theta_2$$

Podemos representar la primera etapa del movimiento en variables de estado como se muestra a continuación:

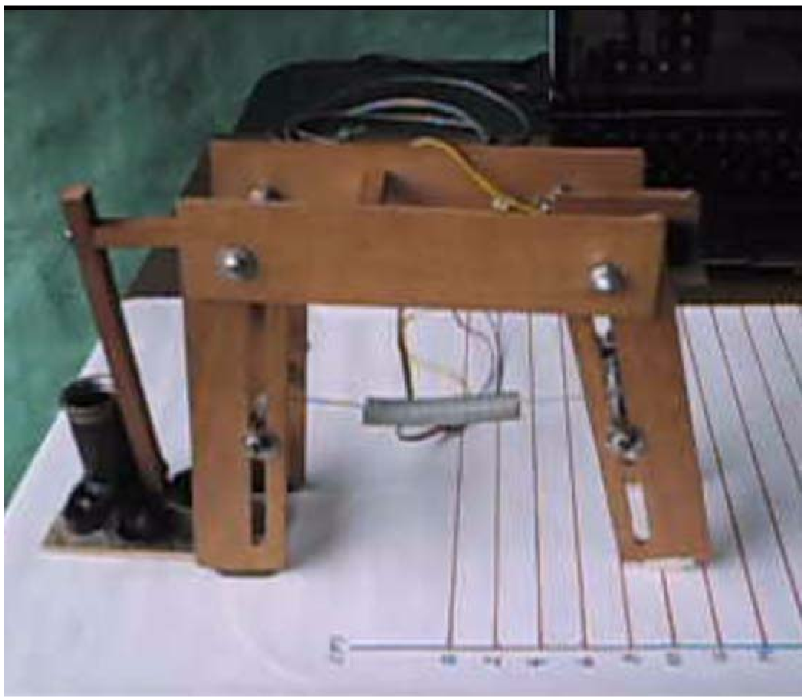
$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = \frac{g}{l_1} senX_1 - \frac{ka^2 cosX_1}{m_1 l_1^2}(senX_1 - senX_3) - \mu_1 m_1 g(l_T cosX_1)X_2$$

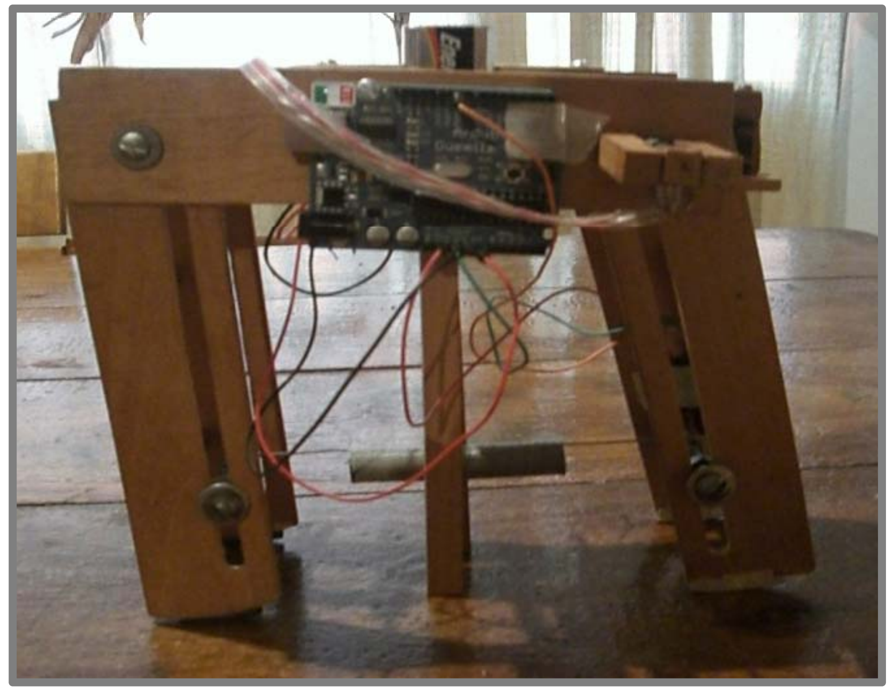
$$\dot{X}_3 = X_4$$

$$\dot{X}_4 = -\frac{g}{l_2} senX_3 - \frac{ka^2 cosX_3}{m_2 l_2^2}(senX_3 - senX_1) - \mu_2 m_2 g(l_T cosX_3)X_4 + \frac{\tau}{m_2 l_2^2}$$

Video



Prototipo SIR (*Spring Inchworm Robot*), Andreina Zambrano (Julio, 2011)



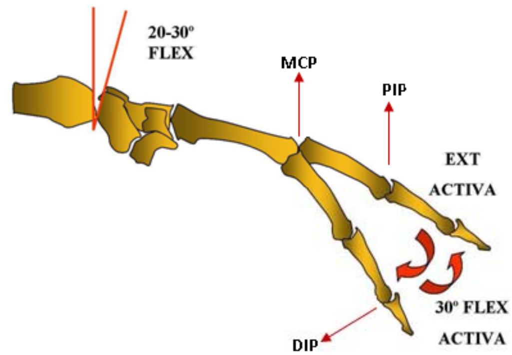
Prototipo SIR (*Spring Inchworm Robot*), Juan Carlos Rivas (Octubre, 2012)

Algunas Aplicaciones

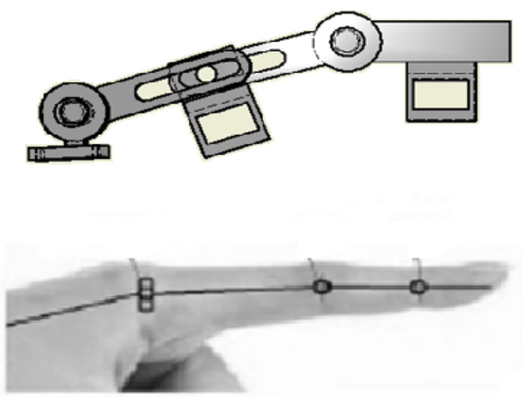
Diseño, construcción y control de un exoesqueleto orientado a la rehabilitación del dedo índice de la mano (en desarrollo)

Br. Fannia Pacheco

Prof. Mariela Cerrada



Movimiento del dedo índice



Prototipo Diseñado

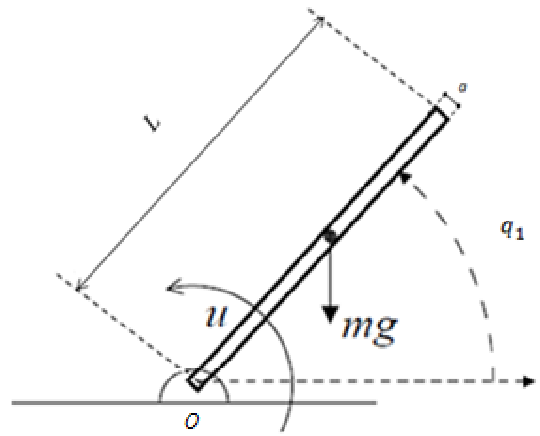


Diagrama para el modelado

Algunas Aplicaciones

Modelado usando Leyes de Newton

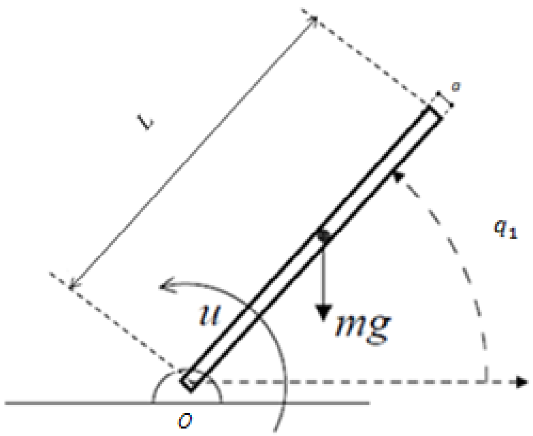


Diagrama para el modelado

$$J\,\ddot{q}_1(t) = -m\,g\,l\,Cos[q_1(t)] - b\,\dot{q}_1(t) + u(t)$$

q_1 = *Angulo del eslabón*(°)
m = *masa del eslabón* (kg)
L = *longitud del eslabón*(m)
$l = \frac{L}{2}$ (m)
g = *gravedad*(m/s^2)
b = *coeficiente de fricción*
J = *Momento de inercia de la barra respecto al punto de rotación*($Kg * m^2$),

Modelado de Sistemas Físicos

Al finalizar el curso el estudiante:

Debería estar en la capacidad de modelar todos los sistemas físicos mostrados y mas.

Debe ser capaz de entenderlos y analizarlos.

Debe ser capaz de integrar la física del sistema con la matemática que lo representa.

Saber que dispone un banco de conocimientos y herramientas que puede usar en un futuro para resolver problemas de ingeniería y de la vida diaria.

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

- Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

- Proyectos de Grado desarrollados en el Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.