Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

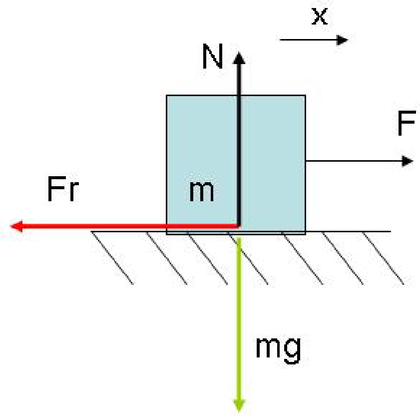
Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte mecánica) Componentes básicos de un sistema mecánico. Leyes de Newton. Modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

Tema 2. Analogías. Ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Modelado de Sistemas Mecánicos

La fuerza de fricción es paralela a la superficie de deslizamiento y directamente proporcional, en magnitud, a la fuerza normal (perpendicular a la superficie de deslizamiento) y actúa en sentido contrario al movimiento.



$$F_r = \mu N$$

Donde μ es el coeficiente de fricción y es una magnitud adimensional.

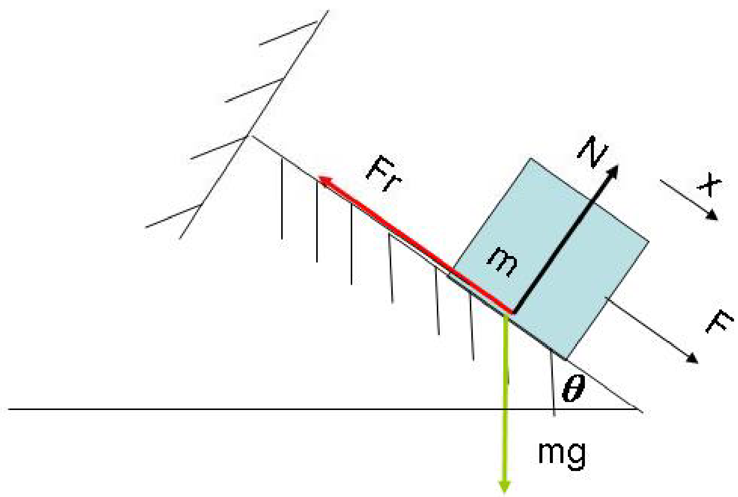
Coeficiente de fricción
$$\begin{cases} \text{Estático} & \mu_s \\ \text{Dinámico} & \mu_d \end{cases}$$

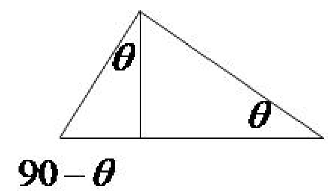
$\mu_s \rangle \mu_d \implies F_s \rangle F_d$

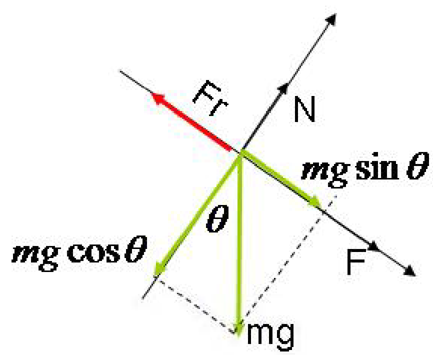
En el planteamiento de la ecuación de movimiento, sólo se considera la fuerza de fricción dinámica.

Modelado de Sistemas Mecánicos

<u>Sistema con fricción en seco:</u>

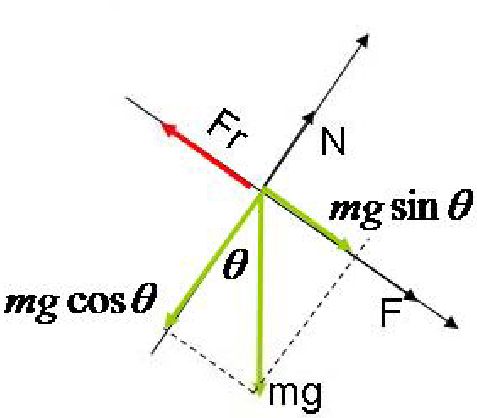






Modelado de Sistemas Mecánicos

Sistema con fricción en seco:



$$m\,a = F + mg\sin\theta - F_r$$

$$N - m\,g\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad N = m\,g\cos\theta$$

$$F_r = \mu_d\,N$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m\,\ddot{x} = F + m\,g\sin\theta - \mu_d\,m\,g\cos\theta}$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

<u>Representación Interna</u>

$$m\,\ddot{x} = F + m\,g\sin\theta - \mu_d\,m\,g\cos\theta$$

Cambio de variable: $x_1(t) = x(t)$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

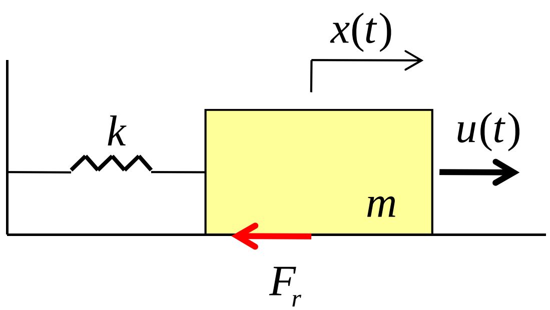
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}F + g\sin\theta - \mu_d\,g\cos\theta$$

Llamamos, $u(t) = \frac{1}{m}F + g\sin\theta - \mu_d\,g\cos\theta$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Sistema con fricción viscosa:



Donde

$$F_r = \mu\,\dot{x}(t)$$

$$m\,a = -F_k - F_r + u(t)$$

$$m\,\ddot{x}(t) = -F_k - F_r + u(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{\mu}{m}\dot{x}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Cambio de variable

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t),$$

Analogías

Voltaje – Velocidad
Corriente - Fuerza

	Sistema Eléctrico	Sistema Mecánico	
Resistencia	$V = Ri$	$v = \frac{1}{b} F$	Amortiguador
Capacitor	$i = C \frac{dV}{dt}$	$F = m \frac{dv}{dt}$	Masa
Inductancia	$V = L \frac{di}{dt}$	$v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	Resorte

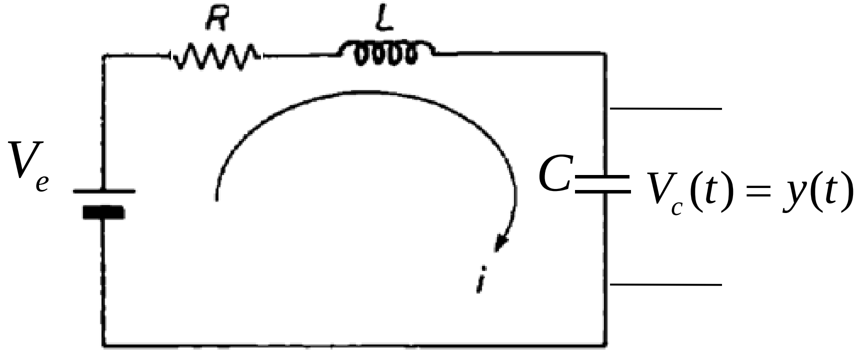
Analogías

Voltaje – Fuerza
Corriente - Velocidad

	Sistema Eléctrico	Sistema Mecánico	
Resistencia	$V_{21} = Ri$	$F = bv_{21}$	Amortiguador
Capacitor	$i = C\dfrac{dV_{21}}{dt}$	$v_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dF}{dt}$	Resorte
Inductancia	$V_{21} = L\dfrac{di}{dt}$	$F = m\dfrac{dv_{21}}{dt}$	Masa

Analogías

Sistema Eléctrico



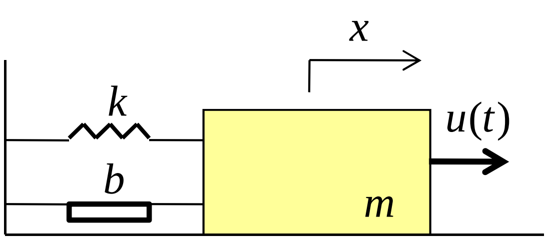
$$V_e(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0$$

$$V_e(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - V_C(t) = 0$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \rightarrow i(t) = C\dot{V}_C(t)$$

$$\ddot{V}_c(t) = -\frac{1}{LC}V_c(t) - \frac{RC}{LC}\dot{V}_c(t) + \frac{1}{LC}V_e(t)$$

Sistema Mecánico

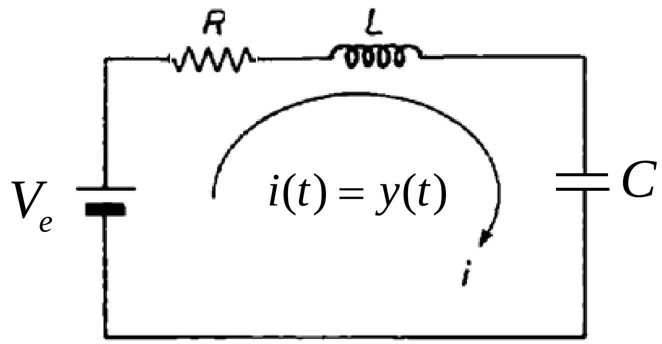


$$x(t) = y(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Analogías

Sistema Eléctrico



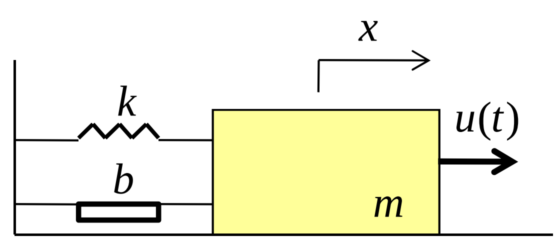
$$V_e(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0$$

$$V_e(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = 0$$

$$\frac{dV_e(t)}{dt} - R\frac{di(t)}{dt} - L\frac{d^2i(t)}{dt^2} - \frac{1}{C}i(t) = 0$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} = -\frac{1}{CL}i(t) - \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{L}\frac{dV_e(t)}{dt}$$

Sistema Mecánico

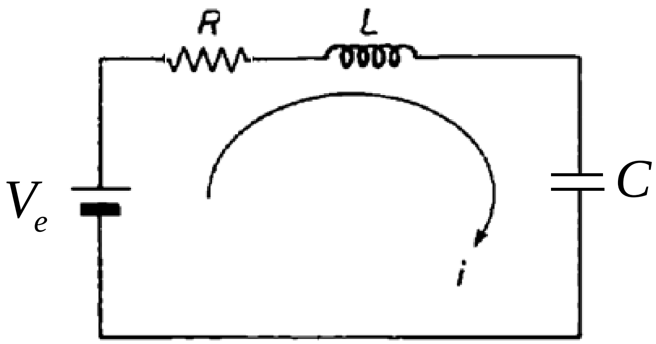


$$x(t) = y(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Analogías

Sistema Eléctrico



$$V_e(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0$$

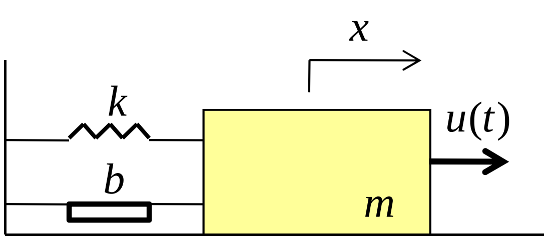
$$V_e(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = 0$$

$$i = \dot{q}$$

$$V_e(t) - R\dot{q}(t) - L\ddot{q}(t) - \frac{1}{C}q(t) = 0$$

$$\ddot{q}(t) = -\frac{1}{CL}q(t) - \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{L}V_e(t)$$

Sistema Mecánico



$$x(t) = y(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Analogías: Voltaje - Fuerza

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.