Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte mecánica) Componentes básicos de un sistema mecánico. Leyes de Newton. Modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

Tema 2. Analogías. Ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Conceptos Básicos

Movimiento Rotacional

El par o momento de fuerza (τ) se define como cualquier causa que tienda a producir un cambio en el movimiento rotacional de un cuerpo sobre el que actúa.

El par es el producto de una fuerza y la distancia perpendicular desde un punto de rotación a la línea de acción de la fuerza.

Las unidades son el $N.m$

Conceptos Básicos

Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud escalar llamada momento de inercia (J).

El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro.

El momento de inercia de un cuerpo rígido a lo largo de un eje de rotación es una medida de su resistencia a la aceleración angular.

El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

Conceptos Básicos

Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, el momento de inercia J del mismo se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia d de cada partícula a dicho eje.

$$\boxed{J = \sum m_i \, d_i^{\,2}}$$

Conceptos Básicos

Teorema de Steiner o Teorema de los Ejes Paralelos

El momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de masa, es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes:

$$\boxed{J_{nc} = J_{cm} + m\, d_e^{\,2}}$$

Donde:

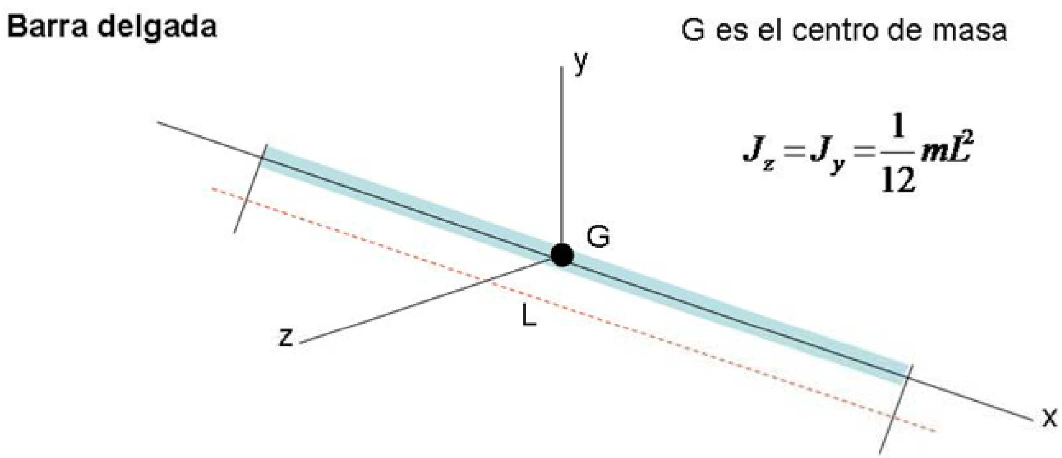
J_{nc} = es el momento de inercia respecto al eje que no pasa por el centro de masa.

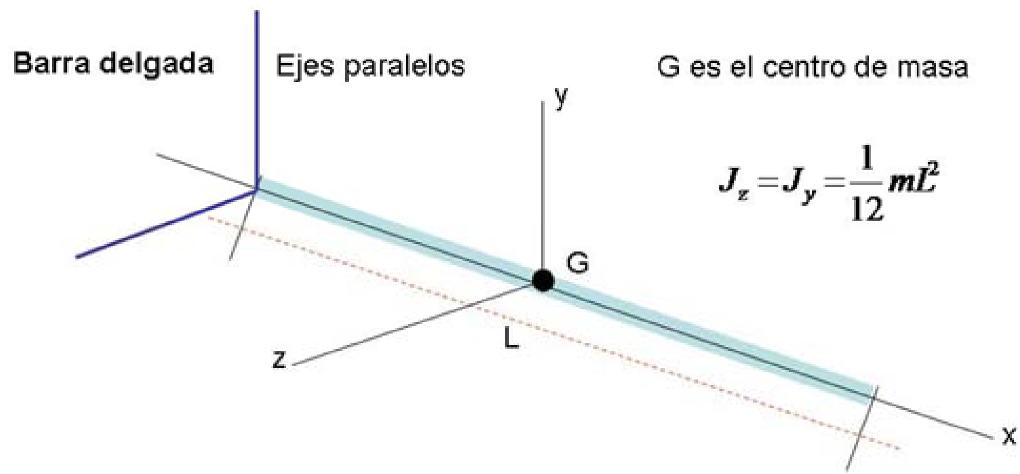
J_{cm} = es el momento de inercia para un eje paralelo al anterior que pasa por el centro de masa.

m = masa total.

d_e = distancia entre los dos ejes paralelos considerados.

Conceptos Básicos



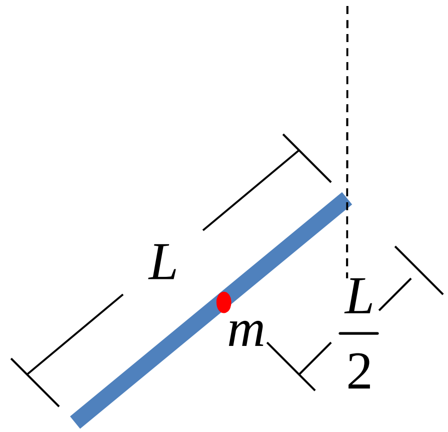


$$\Rightarrow \quad J = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m L^2$$

Conceptos Básicos

Momento de inercia (J)

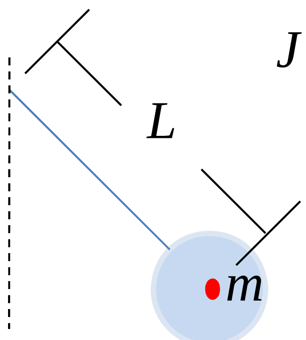
Momento de inercia de una barra delgada



Usando el Teorema de Steiner

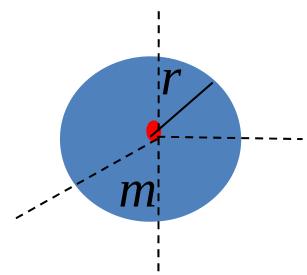
$$J = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m L^2$$

Momento de inercia de una masa concentrada



$$J = m L^2$$

Momento de inercia de una esfera

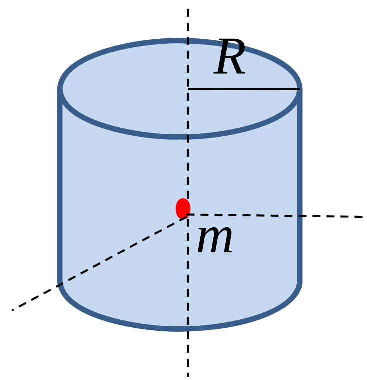


$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

Conceptos Básicos

<u>Momento de inercia</u> (J)

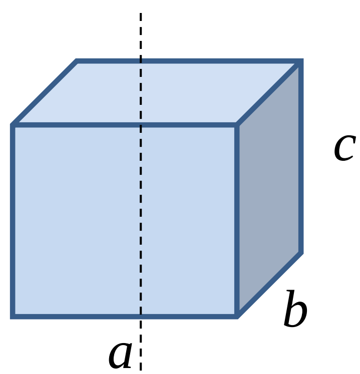
Momento de inercia
de un cilindro



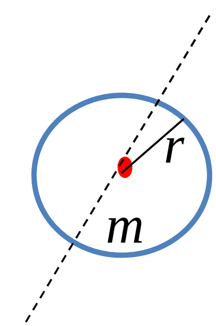
$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

Momento de
inercia de un
paralelepípedo

$$J = \frac{a^2 + b^2}{12}$$



Momento de inercia
de un anillo



$$J = m r^2$$

Conceptos Básicos

La <u>distancia angular</u> (θ) es análoga a la distancia traslacional

La <u>velocidad angular</u> (ω) es análoga a la velocidad traslacional

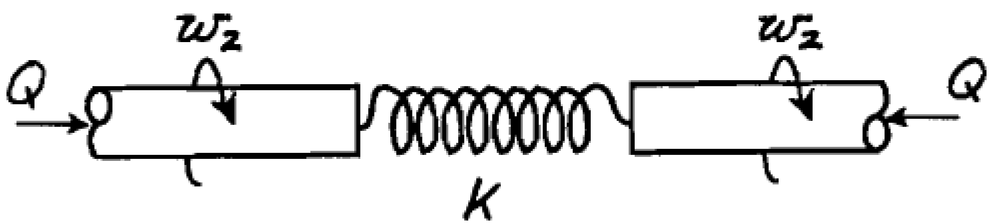
La <u>aceleración angular</u> (α) es análoga a la aceleración traslacional

Las unidades:

$$\theta = rad \qquad \omega = \frac{rad}{s} \qquad \alpha = \frac{rad}{s^2}$$

Componentes Básicos

<u>Resorte rotacional</u>:



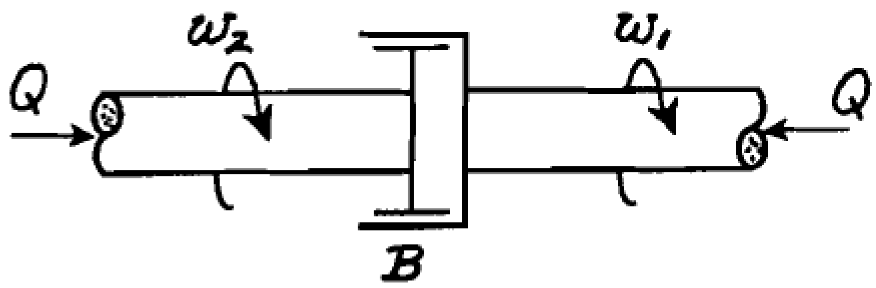
En el movimiento rotacional, el par aplicado a los extremos de un resorte rotacional y el cambio neto en el desplazamiento angular está relacionado por:

$$\tau_K = K \int \omega(t)\, dt$$

$$\boxed{\tau_K = K\,\theta(t)}$$

Componentes Básicos

Amortiguador rotacional:



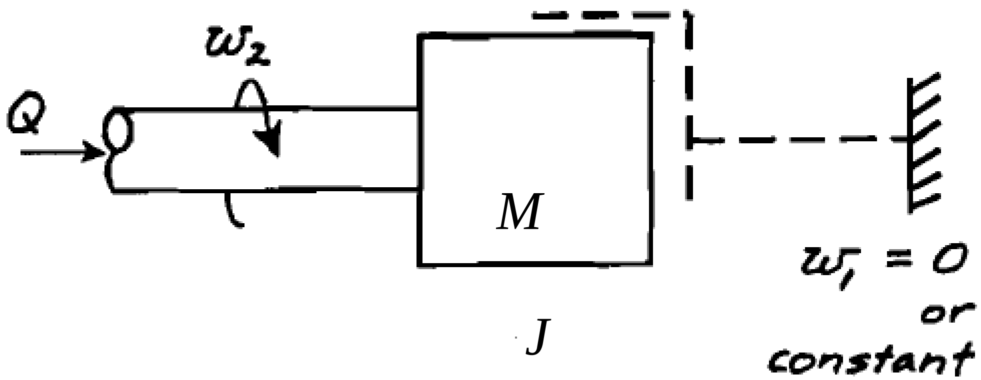
En el movimiento rotacional, el par aplicado a los extremos de un amortiguador rotacional y el cambio neto en el desplazamiento angular está relacionado por:

$$\tau_B = B\,\omega(t)$$

$$\boxed{\tau_B = B\,\dot{\theta}(t)}$$

Componentes Básicos

Masa rotacional: se asume que la masa esta concentrada en un punto, llamado centro de masa y que su movimiento es rotacional.



$$\tau_M = J\,\frac{d\omega(t)}{dt}$$

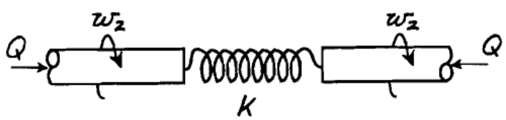
$$\boxed{\tau_M = J\,\alpha(t) = J\,\ddot{\theta}(t)}$$

Leyes de Newton

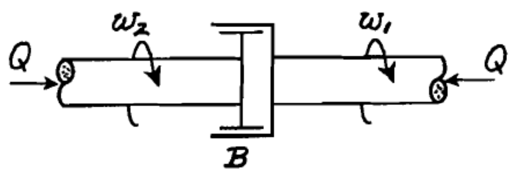
Segunda Ley: para un cuerpo rígido en rotación pura alrededor de un eje fijo, la segunda ley establece que:

$$\boxed{\sum \tau = J\,\alpha(t)}$$

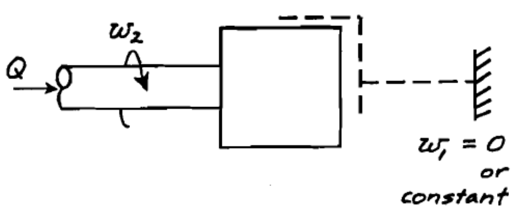
En Resumen



$$\tau_K = K\,\theta(t)$$



$$\tau_B = B\,\dot{\theta}(t)$$



$$\tau_M = J\,\ddot{\theta}(t)$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Variables y parámetros:

τ Son los torques aplicados respecto al punto de rotación.

J Es el momento de inercia del cuerpo en rotación respecto al punto de rotación

$\theta(t)$ Es el desplazamiento angular.

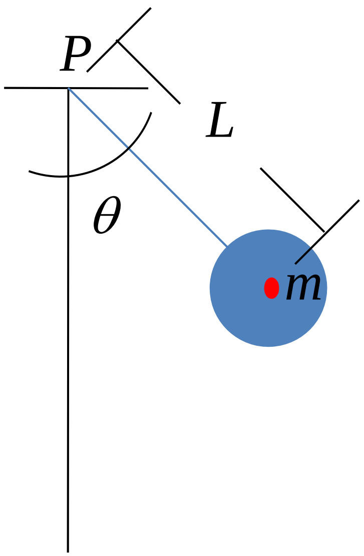
$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$$ Es la velocidad angular.

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \ddot{\theta}(t)$$ Es la aceleración angular.

Variables del sistema

Modelado de Sistemas Mecánicos

<u>Sistema péndulo simple</u>: considere que una esfera de masa m cuelga de un hilo de largo L y de masa despreciable. Que gira alrededor de un punto P en un plano, formando un ángulo θ

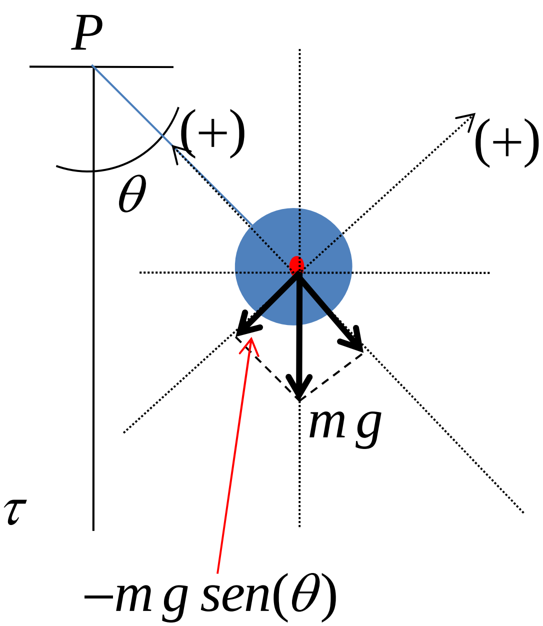


$$\sum \tau = J\,\alpha(t)$$

$$\sum \tau = J\,\ddot{\theta}(t)$$

$$J = m\,L^2$$

$$m\,L^2\,\ddot{\theta}(t) = \sum \tau$$



$$\tau = -m\,g\,sen(\theta)\,L$$

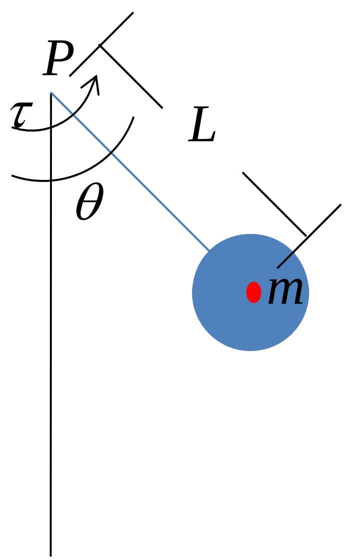
$$m\,L^2\,\ddot{\theta}(t) = -m\,g\,sen(\theta)\,L$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{m\,g\,sen(\theta)\,L}{m\,L^2}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\,sen(\theta)}$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Sistema péndulo simple: considere el mismo péndulo, con la diferencia de que ahora además se le aplica un torque en el punto P



$$\sum \tau = J\,\alpha(t)$$

$$\sum \tau = J\,\ddot{\theta}(t)$$

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$J = m\,L^2$$

$$m\,L^2\,\ddot{\theta}(t) = \sum \tau$$

$$\tau_1 = \tau$$

$$\tau_2 = -m\,g\,sen(\theta)\,L$$

$$m\,L^2\,\ddot{\theta}(t) = -m\,g\,sen(\theta(t))\,L + \tau$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{m\,g\,sen(\theta(t))\,L}{m\,L^2} + \frac{1}{m\,L^2}\tau$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}sen(\theta(t)) + \frac{1}{m\,L^2}\tau}$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Representación Interna

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} sen(\theta(t)) + \frac{1}{mL^2}\tau$$

Cambio de variable: $x_1(t) = \theta(t)$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$u(t) = \tau$$

Así: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{L} sen(x_1(t)) + \frac{1}{mL^2} u(t)$$

Si mido la posición angular, entonces: $y(t) = x_1(t)$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Representación Interna

Sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{L} sen(x_1(t)) + \frac{1}{m L^2} u(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

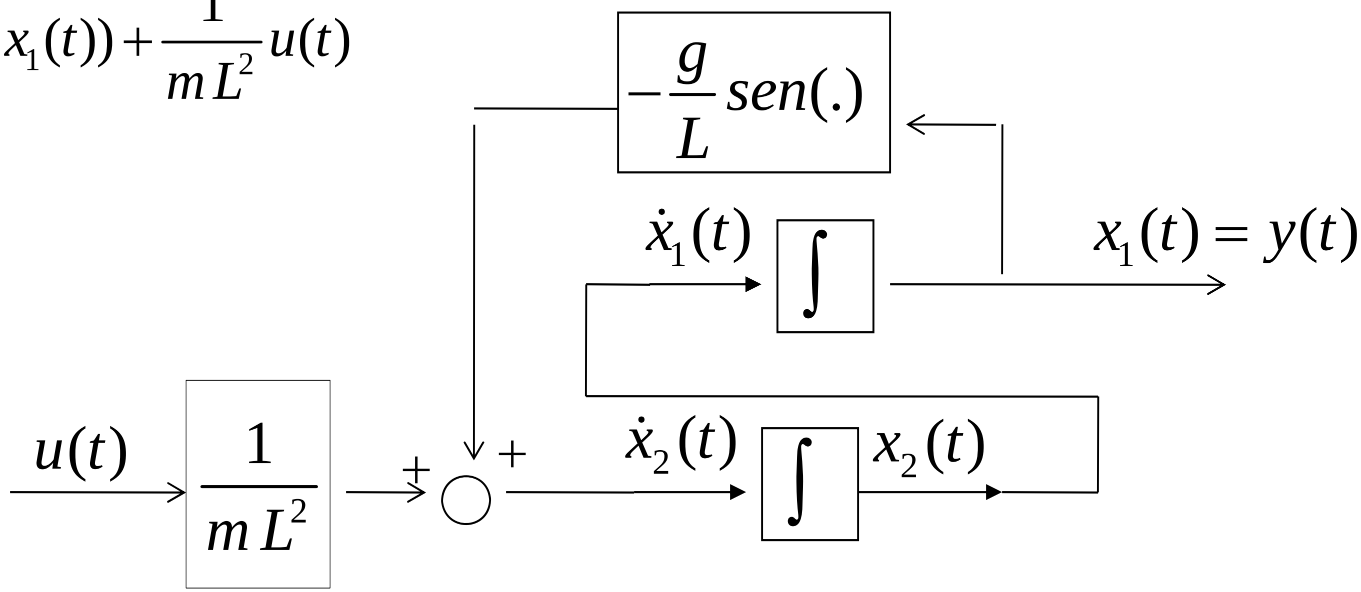
Modelado de Sistemas Mecánicos

Diagrama de Bloques Detallado

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

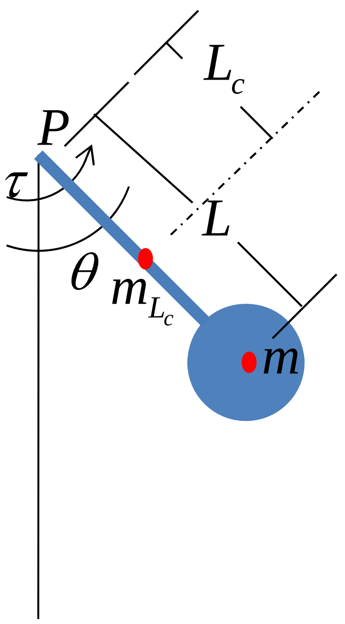
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{L} sen(x_1(t)) + \frac{1}{mL^2} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



Modelado de Sistemas Mecánicos

Sistema péndulo simple: considere el mismo péndulo, con la diferencia de que en este caso el largo del péndulo esta compuesto por una barra de masa m_L



$$\sum \tau = J\,\ddot{\theta}(t)$$

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

$$J = J_1 + J_2$$

$$J_1 = m\,L^2$$

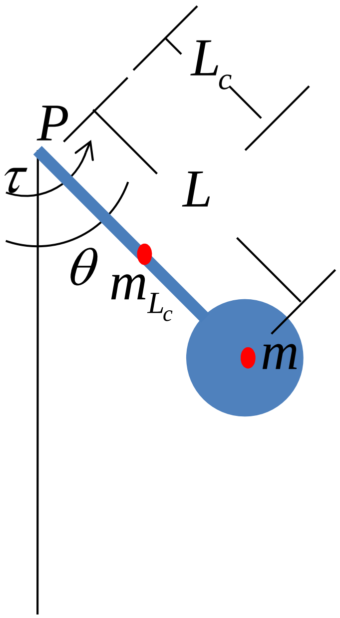
$$J_2 = \frac{1}{3} m_{L_c}\, L_c^{\;2}$$

$$\tau_1 = \tau$$

$$\tau_2 = -m\,g\,sen(\theta)\,L$$

$$\tau_3 = -m_{L_c}\;g\,sen(\theta)\,L_c$$

Modelado de Sistemas Mecánicos



$$J\,\ddot{\theta}(t) = \sum \tau$$

$$\left(m\,L^2 + \frac{1}{3} m_{L_c}\,L_c^{\;2} \right) \ddot{\theta}(t) = \tau - m\,g\,sen(\theta)\,L - m_{L_c}\,g\,sen(\theta)\,L_c$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\frac{m\,g\,sen(\theta(t))\,L}{\left(m\,L^2 + \frac{1}{3} m_{L_c}\,L_c^{\;2} \right)} - \frac{m_{L_c}\,g\,sen(\theta)\,L}{\left(m\,L^2 + \frac{1}{3} m_{L_c}\,L_c^{\;2} \right)_c} + \frac{1}{\left(m\,L^2 + \frac{1}{3} m_{L_c}\,L_c^{\;2} \right)}\tau}$$

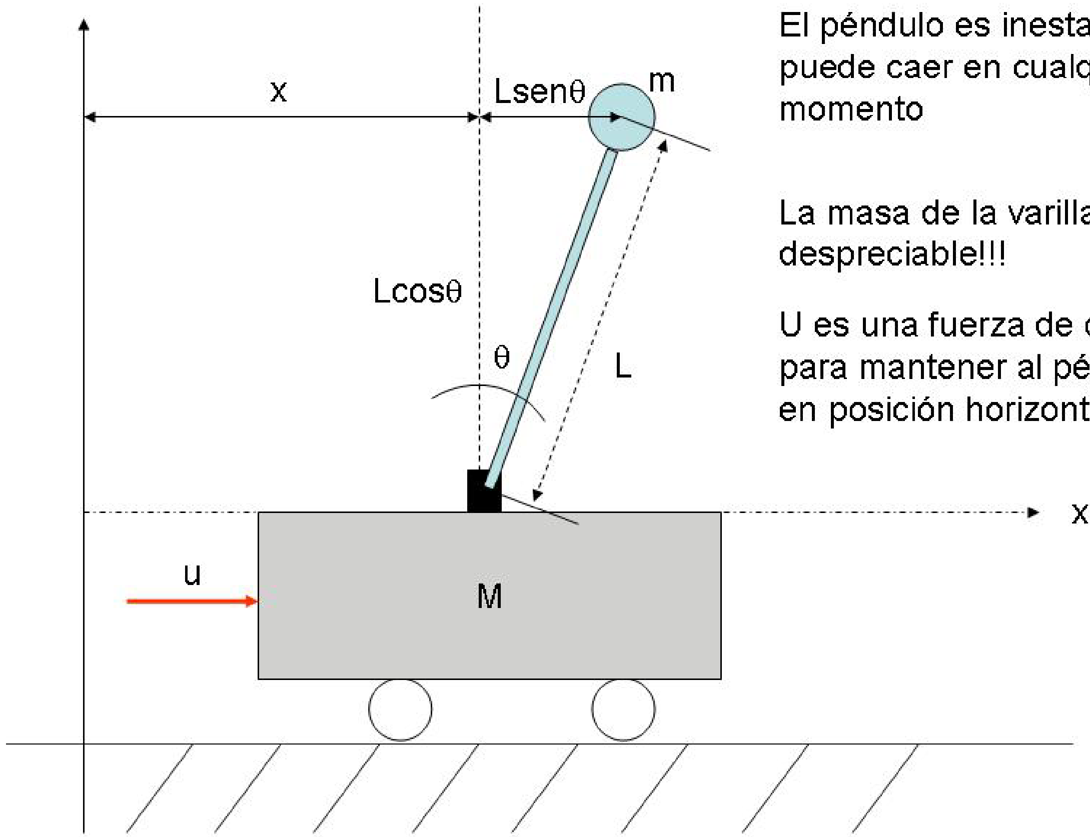
Modelado de Sistemas Mecánicos

<u>Tarea</u>

Hacer la representación interna

Hacer el diagrama de bloques detallado

Modelado de Sistemas Mecánicos



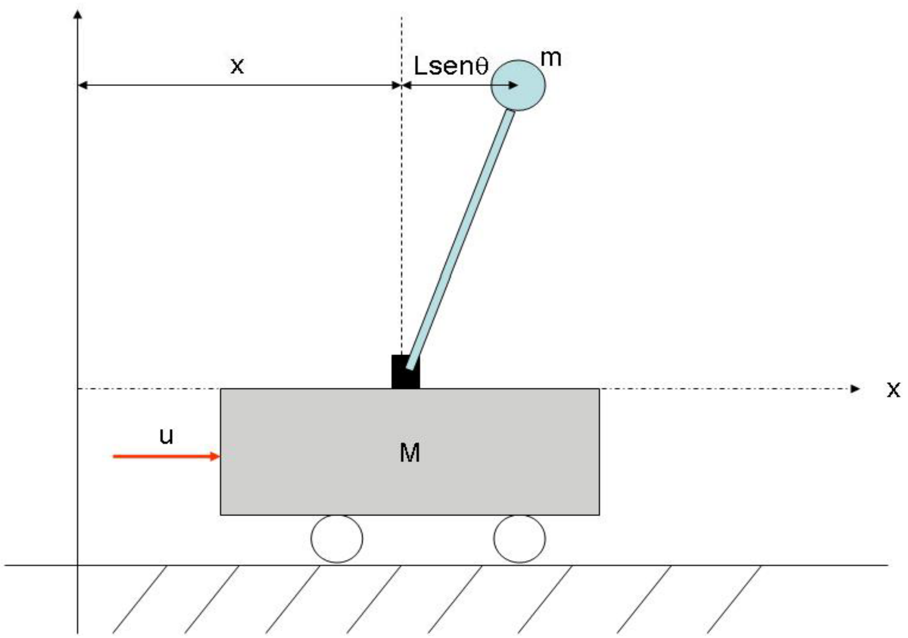
El péndulo es inestable y puede caer en cualquier momento

La masa de la varilla es despreciable!!!

U es una fuerza de control para mantener al péndulo en posición horizontal

Existen dos movimientos simultáneos: Traslacional y Rotacional

Modelado de Sistemas Mecánicos



Movimientos Traslacional

$$M\ddot{x}(t) + m\ddot{x}_G(t) = u(t) \qquad (1)$$

$$M\ddot{x}(t) + m\frac{d^2}{d^2t}(x(t) + Lsen\theta(t)) = u(t)$$

Sabemos que:

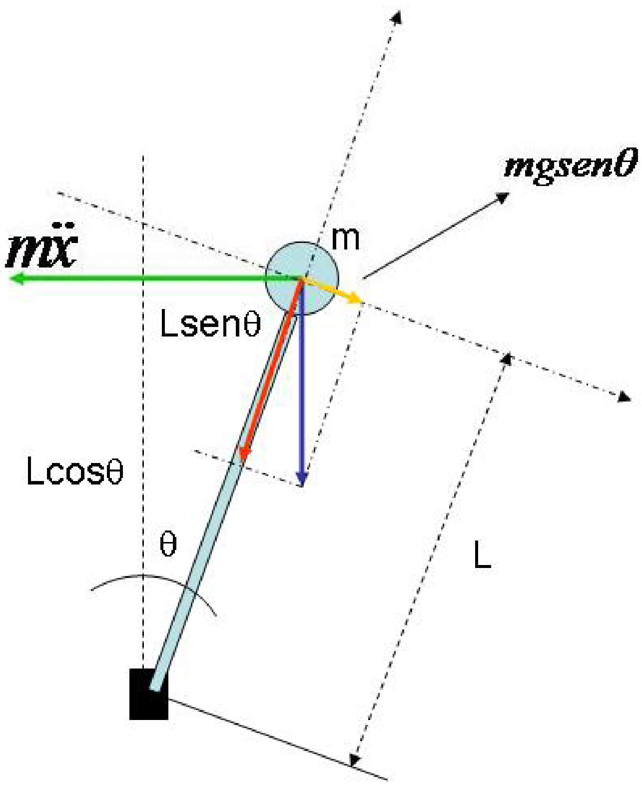
$$\frac{d}{dt}sen\theta(t) = \dot{\theta}(t)\cos\theta(t) \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) = \ddot{\theta}(t)\cos\theta(t) - \dot{\theta}^2(t)sen\theta(t)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\boxed{(M+m)\ddot{x}(t) + \ddot{\theta}(t)m\cos\theta(t)L - \dot{\theta}^2(t)mLsen\theta(t) = u(t)}$$

Modelado de Sistemas Mecánicos



Movimientos Rotacional:

$$J_m \ddot{\theta}(t) = T_W + T_{m\ddot{x}} \qquad (3)$$

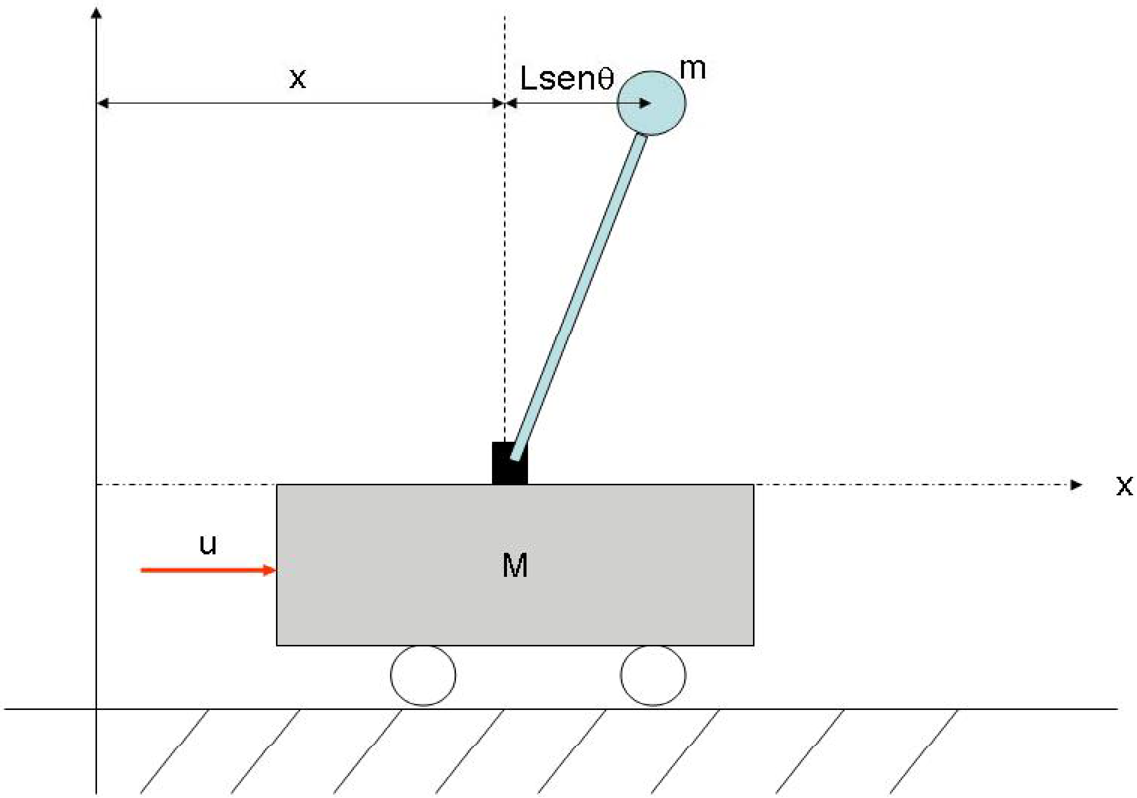
Sabemos que:

$$\begin{aligned} J_m &= mL^2 \\ T_W &= mgsen\theta(t)\, L \\ T_{m\ddot{x}} &= -m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)\, L \end{aligned} \qquad (4)$$

$$mL^2\ddot{\theta}(t) = mgsen\theta(t)\, L - m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)\, L$$

Sustituyendo (4) en (3): $\boxed{mL\ddot{\theta}(t) + m\ddot{x}(t)\cos\theta(t) = mgsen\theta(t)}$

Modelado de Sistemas Mecánicos



$$\left(M+m\right)\ddot{x}(t)+\ddot{\theta}(t)mL\cos\theta(t)-\dot{\theta}^{2}(t)mLsen\theta(t)=u(t)$$

$$mL\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)=mgsen\theta(t)$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

$$\left.\begin{aligned}&\left(M+m\right)\ddot{x}(t)+\ddot{\theta}(t)mL\cos\theta(t)-\dot{\theta}^{2}(t)mLsen\theta(t)=u(t)\\&mL\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)=mgsen\theta(t)\end{aligned}\right\}\ \text{Sistema No Lineal}$$

<u>Caso particular</u>: En el caso de que el péndulo se desee mantener en la posición vertical, se puede suponer que $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ son pequeños, así:

$$\begin{aligned}&sen\theta(t)=\theta\\&\cos\theta(t)=1\\&\theta(t)\dot{\theta}^{2}(t)=0\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad\left.\begin{aligned}&\left(M+m\right)\ddot{x}(t)+\ddot{\theta}(t)mL=u(t)\\&mL\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)=mg\theta(t)\end{aligned}\right\}\ \text{Sistema Lineal}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x}(t)=-\frac{mg}{M}\theta(t)+\frac{1}{M}u(t)$$

$$\ddot{\theta}(t)=\frac{\left(M+m\right)g}{ML}\theta(t)-\frac{1}{ML}u(t)$$

Tarea: Demostrar

Modelado de Sistemas Mecánicos

<u>Representación Interna</u>

Cambio de variable:

$$x_1(t) = \theta(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t)$$
$$x_3(t) = x(t)$$
$$x_4(t) = \dot{x}_3(t) = \dot{x}(t)$$

Así:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{(M+m)g}{ML} x_1(t) - \frac{1}{ML} u(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = -\frac{mg}{M} x_1(t) + \frac{1}{M} u(t)$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

<u>Representación Interna</u>

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \dfrac{(M+m)g}{ML} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{mg}{M} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{ML}\\ 0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}$$

Mido la posición del péndulo

$x_1(t)=\theta(t)$

Mido la posición del carro

$x_3(t)=x(t)$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.