Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte mecánica) Componentes básicos de un sistema mecánico. Leyes de Newton. Modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

Tema 2. Analogías. Ecuaciones de movimiento de Lagrange.

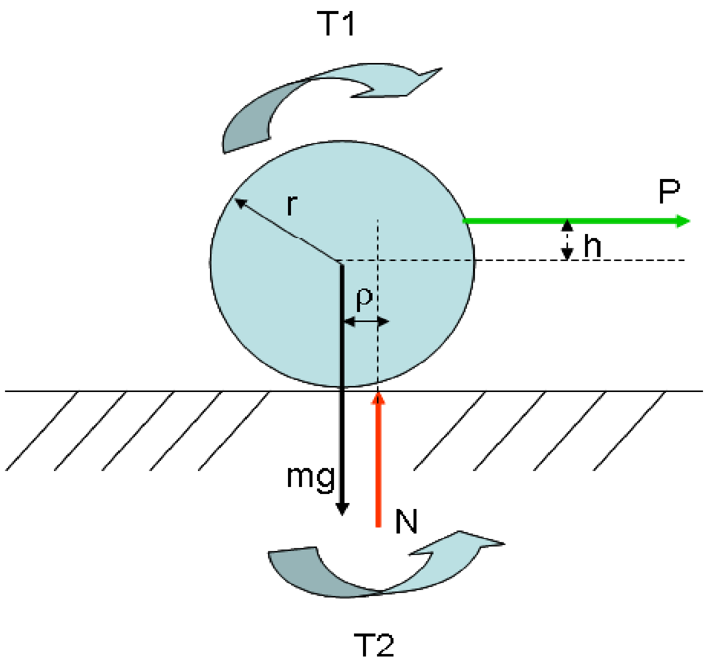
Conceptos Básicos

Movimiento de Rodamiento y Deslizamiento

Fricción por rodamiento: Es la fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo que rueda sobre otro. Resulta de la deformación de los dos cuerpos en el lugar de contacto.

El par de fricción por rodamiento es generalmente pequeño y casi siempre se desprecia en el análisis de movimiento.

Conceptos Básicos



ρ es la separación entre las líneas de acción de las fuerzas Normal y Gravitacional.

T1 es el par debido a a fuerza de tracción. Actúa en el sentido horario.

$$T_1 = Ph$$

T2 es el par que resiste a la rotación. Actúa en el sentido anti-horario.

$$T_2 = N\rho$$

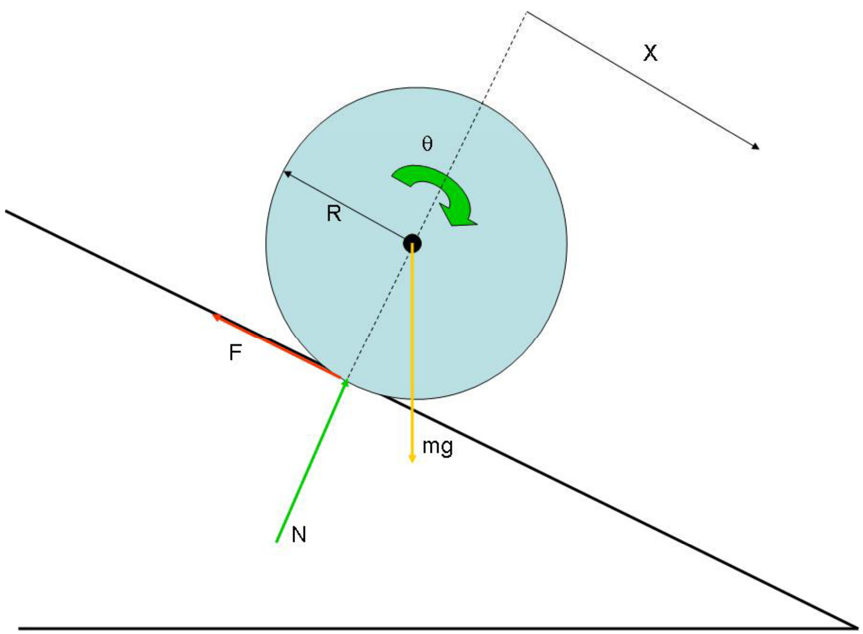
Donde la distancia ρ es el coeficiente de fricción por rodamiento

Si la fuerza aplicada es suficientemente grande para superar el par T2, el cilindro empieza a rodar. Entonces la condición para movimiento inminente es:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow Ph = N\rho \implies \rho = \frac{Ph}{N}[m] \longrightarrow$$ unidad de longitud

Conceptos Básicos

Considere el siguiente sistema:



El cilindro se desliza si no existe fricción.

$\Downarrow$

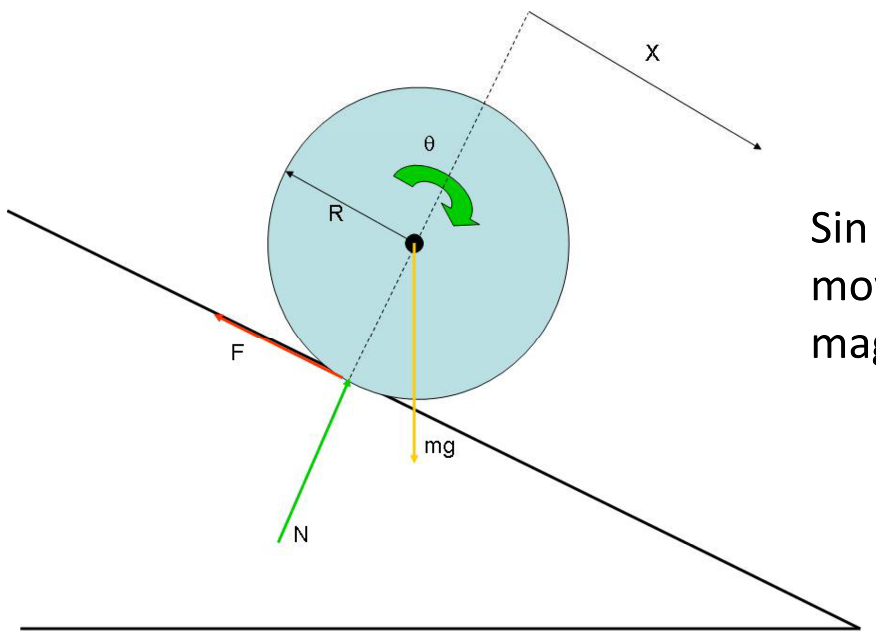
Movimiento traslacional

Si hay deslizamiento, la fuerza de fricción dinámica es:

$$F = \mu N$$

Conceptos Básicos

Condición para que el cilindro ruede sin deslizamiento: $F < \mu N$

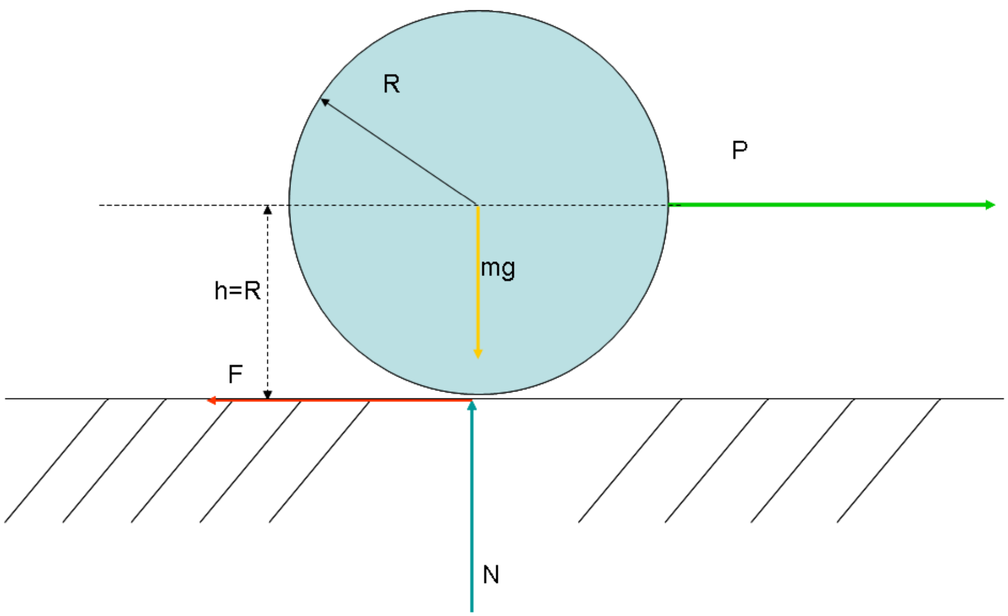


Sin deslizamiento, existe durante todo el movimiento una fuerza de fricción F, de magnitud desconocida, que asegura que:

$$x = R\theta$$

Modelado de Sistemas

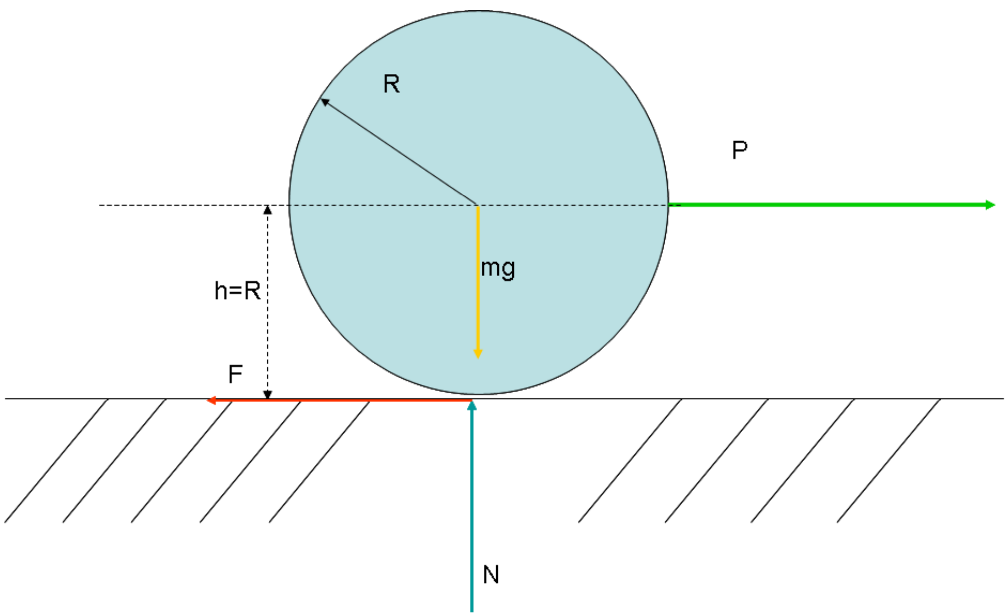
Ejemplo 1: Consideremos un cilindro que rueda sin deslizamiento sobre un plano horizontal



Las fuerzas mg, P y N no producen torques en la ecuación de movimiento rotacional porque sus líneas de acción pasan por el centro de gravedad respecto del cual se da dicho movimiento de rotación.

La fuerza F es de magnitud desconocida.

Modelado de Sistemas



Ecuaciones de movimiento:

Traslacional:

$$m\ddot{x} = \sum F$$

$$m\ddot{x} = P - F$$

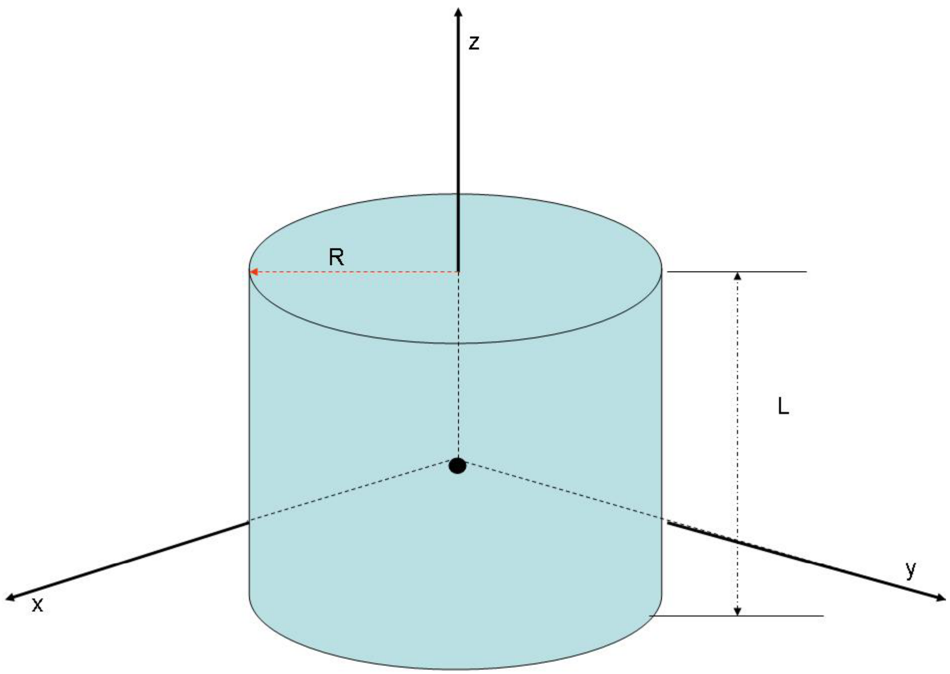
Rotacional:

$$J\ddot{\theta} = \sum \tau = \sum F.d$$

$$J\ddot{\theta} = F\ R$$

Modelado de Sistemas

Momentos de inercia de masa de un cilindro respecto a sus ejes centroidales



En el eje x y y :

$$J_x = J_y = m\frac{R^2 + L^2}{12}$$

En el eje z :

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Modelado de Sistemas

Para encontrar F, sabemos que:

$$x = R\theta \longrightarrow \theta = \frac{x}{R}$$

Y considerando la inercia

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Tenemos:

$$J\ddot{\theta} = RF$$

$$J_z\ddot{\theta} = RF$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} = RF$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{\ddot{x}}{R} = RF$$

$$\frac{1}{2} m \ddot{x} = F$$

$$\ddot{x} = \frac{2F}{m}$$

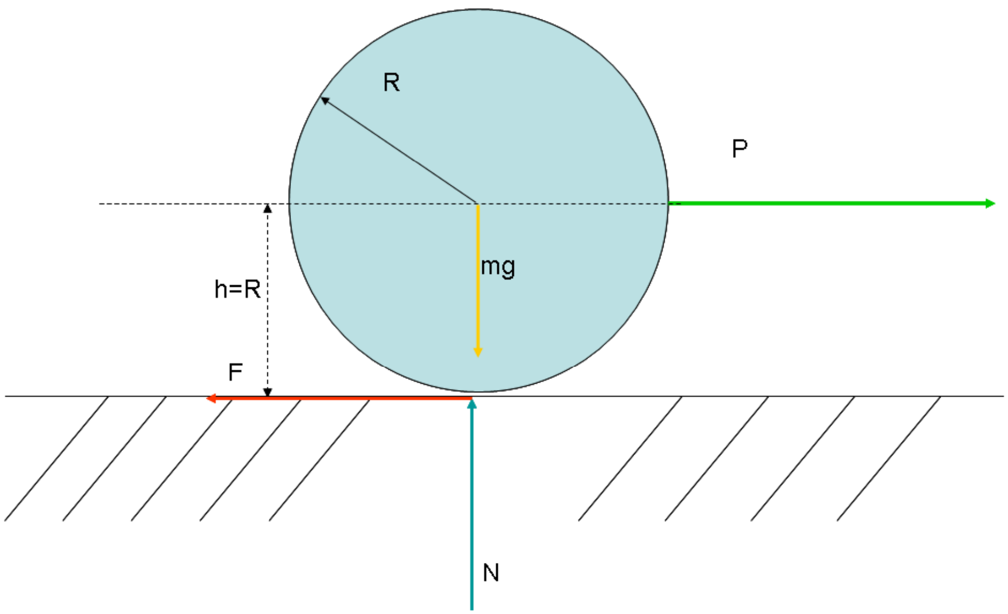
Para encontrar F, igualamos:

$$\ddot{x} = \frac{P - F}{m} \quad \text{y} \quad \ddot{x} = \frac{2F}{m}$$

Así,

$$\boxed{F = \frac{P}{3}}$$

Modelado de Sistemas



Ecuaciones de movimiento:

Traslacional:

$$\ddot{x} = \frac{2P}{3m}$$

Rotacional:

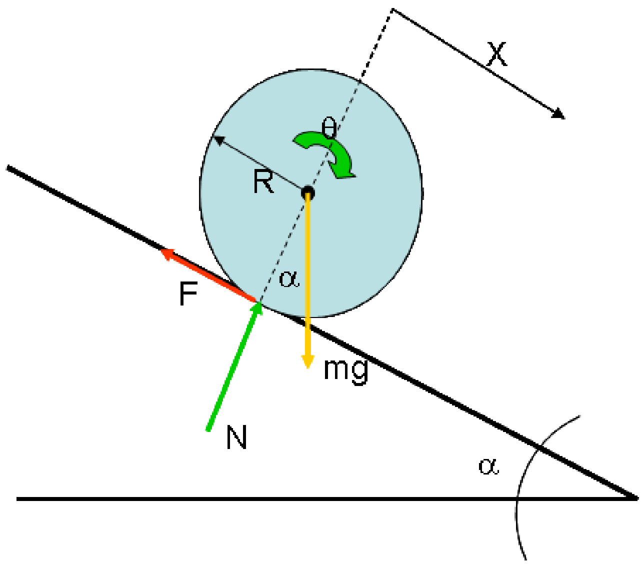
$$\ddot{\theta} = \frac{2P}{3mR}$$

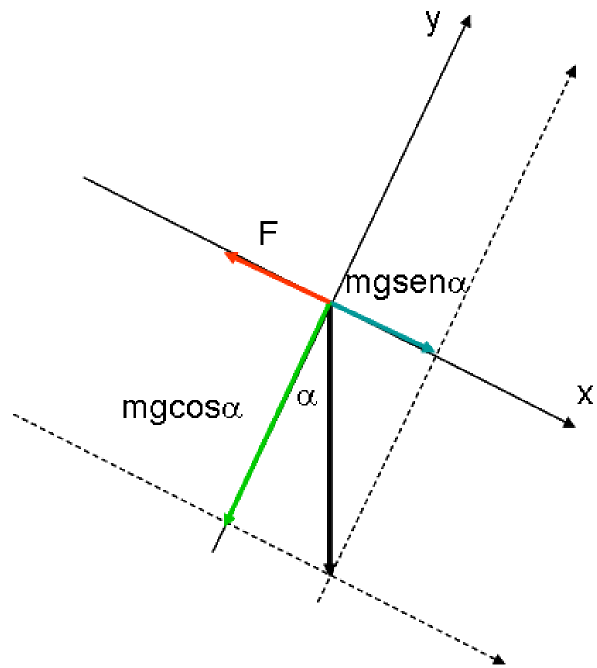
$$m\ddot{x} = P - F = P - \frac{P}{3} = \frac{3P - P}{3} = \frac{2P}{3}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{FR}{J} = \frac{RP}{3J} = \frac{RP}{3\left(\frac{1}{2}mR^2\right)} = \frac{2P}{3mR}$$

Modelado de Sistemas

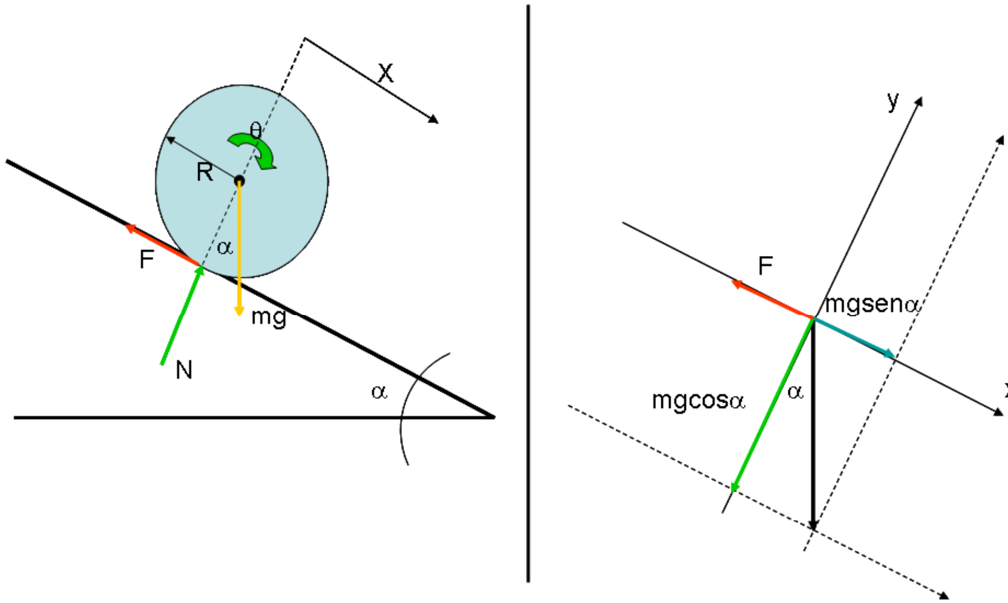
Ejemplo 2: Cilindro en movimiento sobre un plano inclinado.





Según el ángulo α el cilindro puede rodar o deslizar. Determinar α para que el movimiento sea de rodamiento.

Modelado de Sistemas



Ecuaciones de movimiento:

Traslacional:

$$m\ddot{x} = m\,g\,sen[\alpha] - F$$

Rotacional:

$$J\,\ddot{\theta} = F\,R$$

Modelado de Sistemas

Sabemos que la condición para que el cilindro ruede sin deslizamiento es: $F < \mu N$

Determinamos la fuerza F desconocida, de la misma forma que en el ejemplo anterior. Considerando que:

$$x = R\theta, \qquad J_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = \frac{2F}{m}$$

Para encontrar F, igualamos: $\ddot{x} = \dfrac{m\,g\,sen[\alpha] - F}{m}$ y $\ddot{x} = \dfrac{2F}{m}$

Así,

$$\frac{m\,g\,sen[\alpha] - F}{m} = \frac{2F}{m}$$

$$m\,g\,sen[\alpha] - F = 2F$$

$$3F = m\,g\,sen[\alpha]$$

$$\boxed{F = \frac{m\,g\,sen[\alpha]}{3}}$$

Modelado de Sistemas

Además, sabemos que: $N = m\, g \cos[\alpha]$

Para la condición de rodamiento, entonces: $F < \mu\, N$

$$F < \mu\, m\, g \cos[\alpha]$$

Por lo tanto:

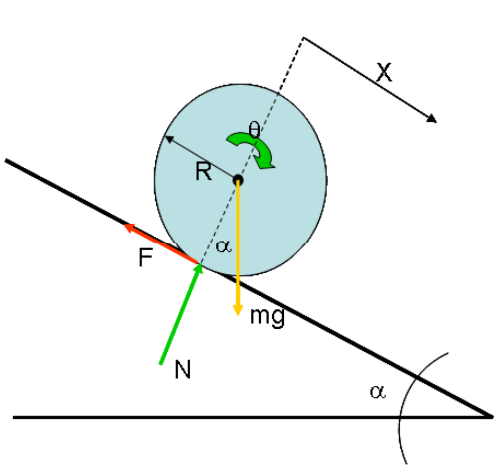
$$F = \frac{m\, g\, sen[\alpha]}{3} < \mu\, m\, g \cos[\alpha]$$

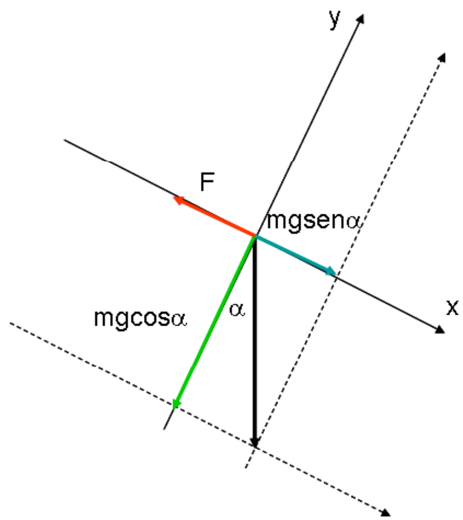
$$\frac{sen[\alpha]}{\cos[\alpha]} < 3\mu$$

$$\boxed{\tan[\alpha] < 3\mu}$$

Si esta condición se cumple, entonces el movimiento es de rodamiento.

Modelado de Sistemas





Ecuaciones de movimiento:

Traslacional:

$$m\ddot{x} = \frac{2m\,g\,sen[\alpha]}{3}$$

Rotacional:

$$\ddot{\theta} = \frac{2g\,sen[\alpha]}{3R}$$

$$m\ddot{x} = m\,g\,sen[\alpha] - F = m\,g\,sen[\alpha] - \frac{m\,g\,sen[\alpha]}{3} = m\,g\,sen[\alpha]\left[1 - \frac{1}{3}\right]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F\,R}{J} = \frac{R\,m\,g\,sen[\alpha]}{3\left(\frac{1}{2}m\,R^2\right)} = \frac{2g\,sen[\alpha]}{3R}$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.