Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

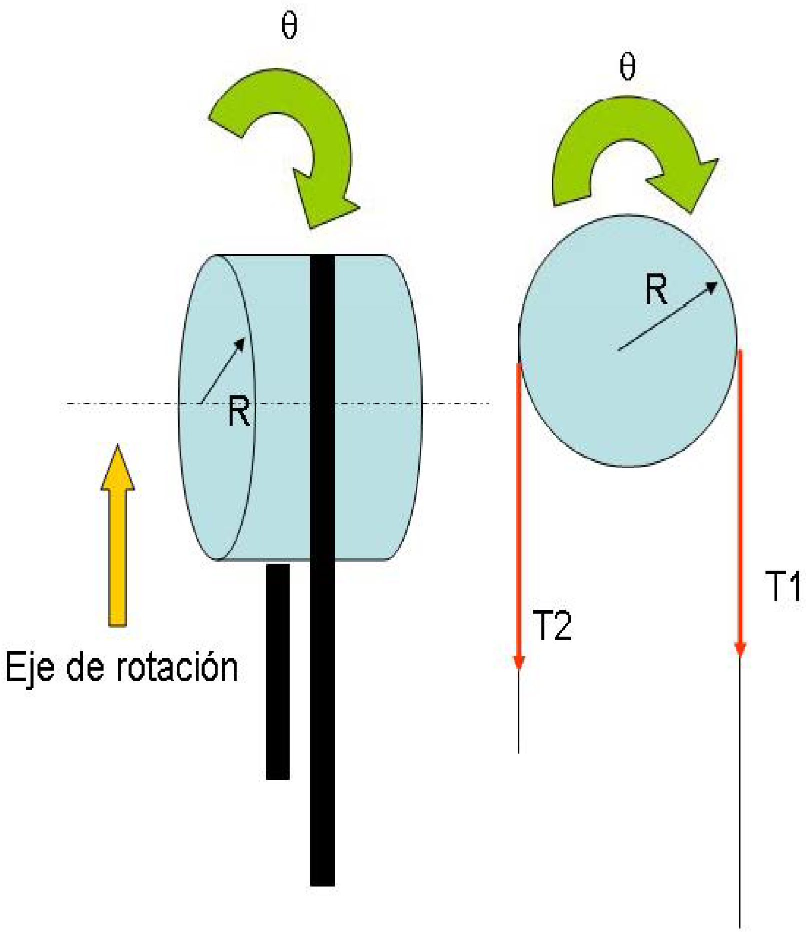
Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte mecánica) Componentes básicos de un sistema mecánico. Leyes de Newton. Modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

Tema 2. Analogías. Ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Poleas



T_1 y T_2 son fuerzas de tensión.

R Es el radio del cilindro.

θ La posición angular.

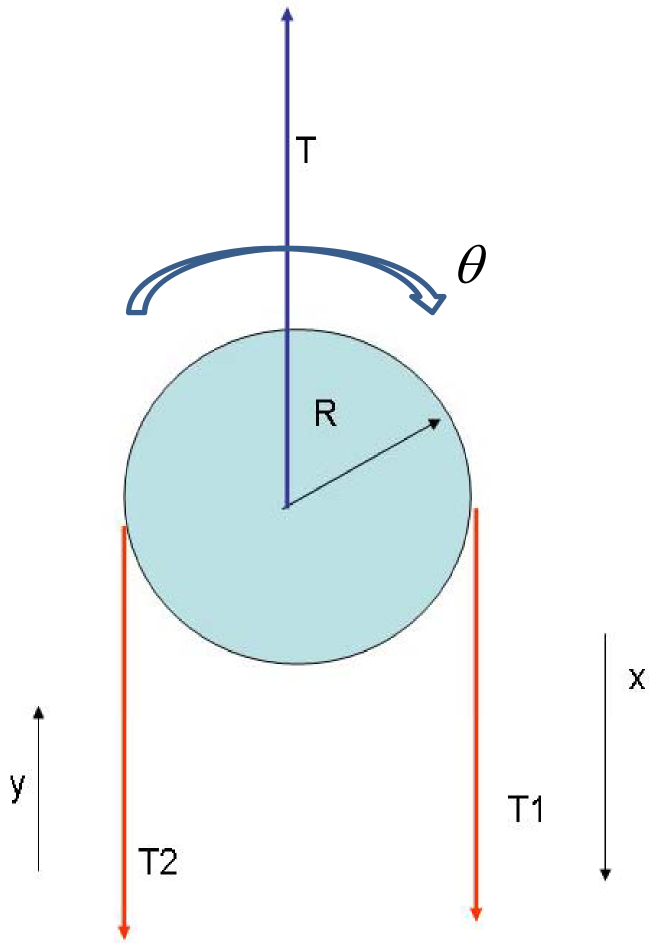
Movimiento Rotacional:

$$J\ddot{\theta} = \sum \tau = RT_1 - RT_2 = R(T_1 - T_2)$$

$$\boxed{J\ddot{\theta} = R(T_1 - T_2)}$$

Si la inercia J es despreciable, esto es: que M sea muy pequeña (ó que R sea muy pequeño), entonces: $T_1 = T_2$

Poleas



La fuerza sobre el soporte en el centro de la polea es:

$$T = T_1 + T_2$$

Si la Inercia J es despreciable, R pequeño (ó M pequeña), entonces se tiene que:

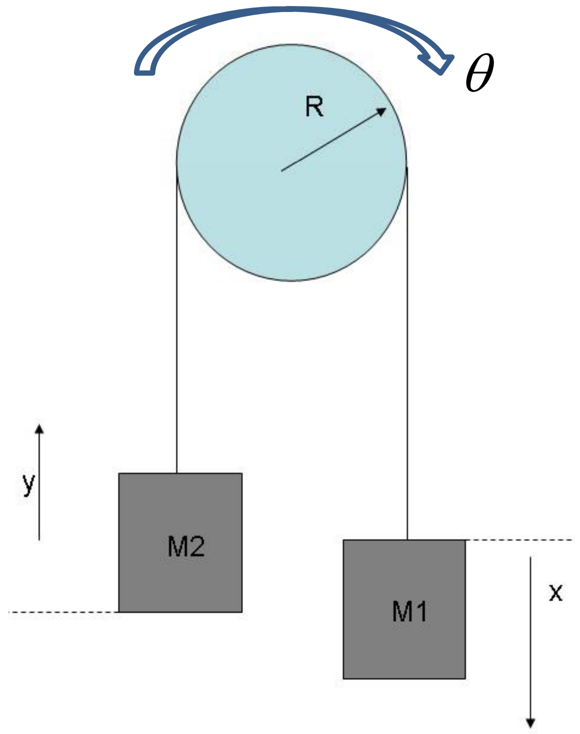
$$T_1 = T_2$$
$$T = 2T_1$$

Si la cuerda rueda sin deslizamiento sobre la polea:

$$x = R\theta$$

Modelado de Sistemas con Poleas

Ejemplo 1: Considere el sistema de dos masas que cuelgan de una polea, una a cada lado, como se muestra en la figura.



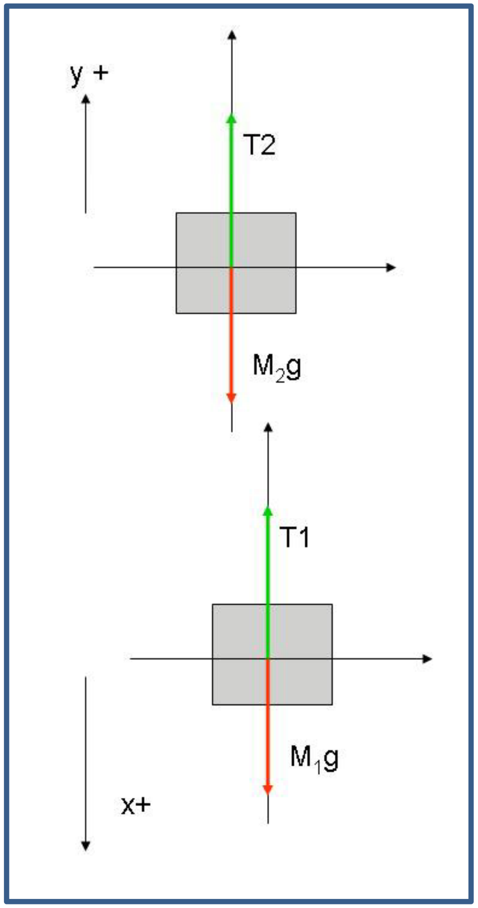
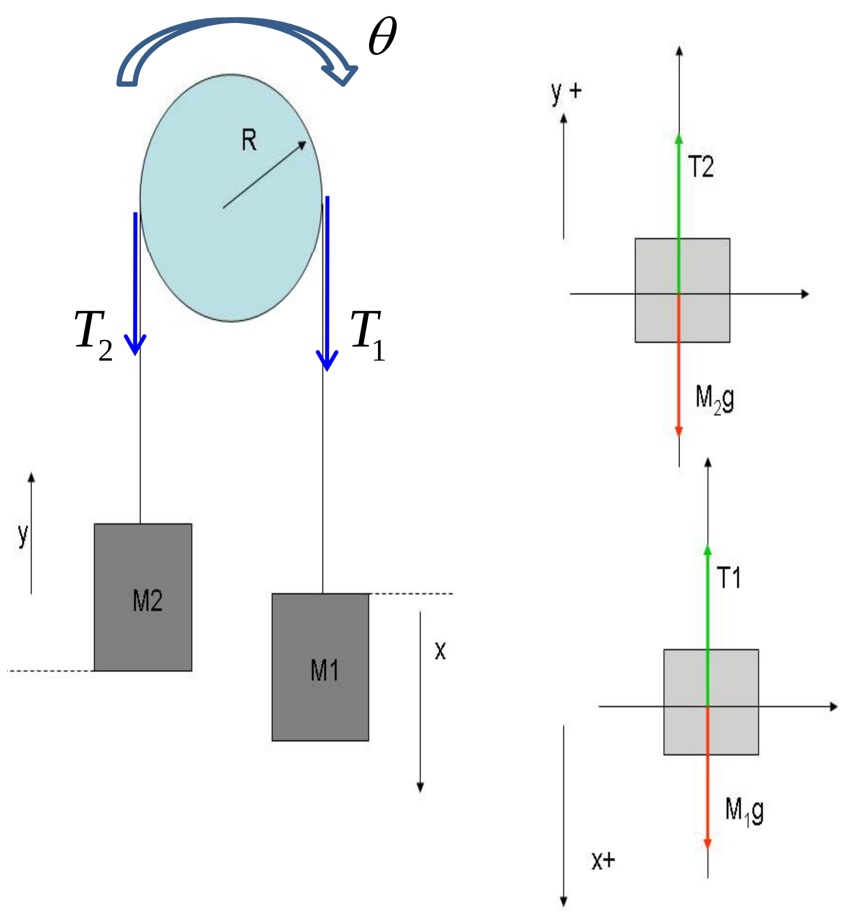


Diagrama de cuerpo libre para cada masa.

Modelado de Sistemas con Poleas



Ecuaciones de movimiento:

Para la polea: $J\ddot{\theta} = R\left(T_1 - T_2\right)$

Para la masa 1: $M_1\ddot{x} = M_1\,g - T_1$

Para la masa 2: $M_2\ddot{y} = T_2 - M_2\,g$

En este caso, la polea gira sin deslizamiento, así:

$$y = x$$

Modelado de Sistemas con Poleas

Podemos entonces reescribir la ecuación de la masa 2 en función de x

$$M_2\ddot{y} = T_2 - M_2\,g$$
$$M_2\ddot{x} = T_2 - M_2\,g$$

Además sabemos que: $x = R\theta$

Despejamos θ , T_1 y T_2 , y lo sustituimos en: $J\ddot{\theta} = R\left(T_1 - T_2\right)$

$$\theta = \frac{x}{R}$$

$$T_1 = M_1\,g - M_1\ddot{x}$$

$$T_2 = M_2\ddot{x} + M_2\,g$$

Modelado de Sistemas con Poleas

$$\theta = \frac{x}{R}$$

$$T_1 = M_1\, g - M_1 \ddot{x}$$

$$T_2 = M_2 \ddot{x} + M_2\, g$$

$$J\ddot{\theta} = R\left(T_1 - T_2\right)$$

$$J\,\frac{\ddot{x}}{R} = R\left(M_1\, g - M_1 \ddot{x} - \left(M_2 \ddot{x} + M_2\, g\right)\right)$$

$$\frac{J}{R^2}\,\ddot{x} = M_1\, g - M_1 \ddot{x} - M_2 \ddot{x} - M_2\, g$$

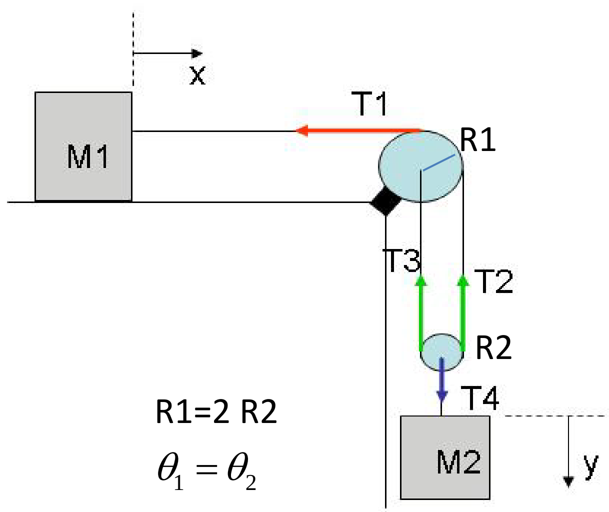
$$\left(\frac{J}{R^2} + M_1 + M_2\right)\ddot{x} = \left(M_1 - M_2\right) g$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{\left(M_1 + M_2\right)}{\left(\dfrac{J}{R^2} + M_1 + M_2\right)}\, g}$$

Modelo

Modelado de Sistemas con Poleas

Ejemplo 2: Considere el sistema de dos masas con una polea, como se muestra en la figura.



Los momentos de inercia de las masas de las poleas son despreciables!!!

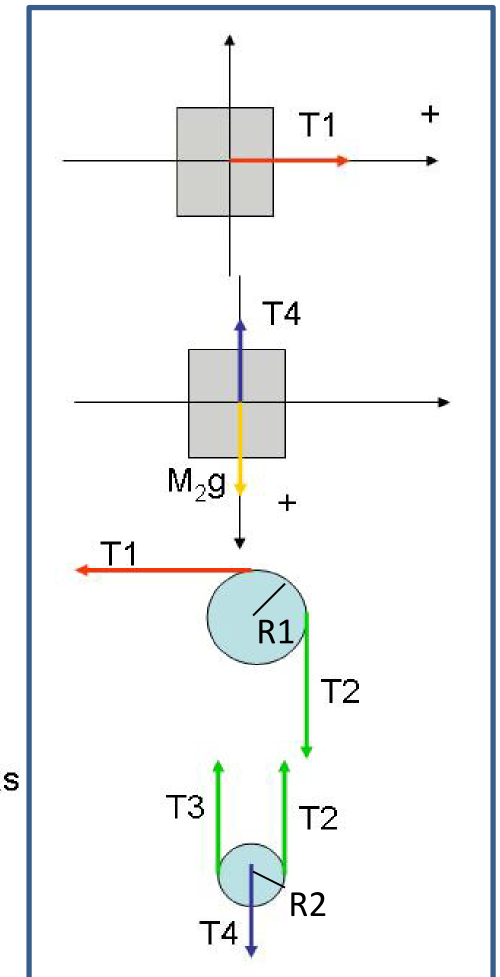
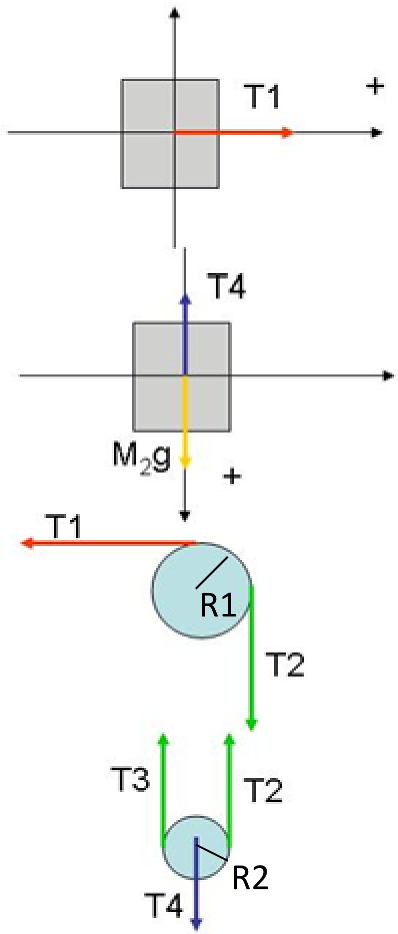


Diagrama de cuerpo libre para cada masa y cada polea.

Modelado de Sistemas con Poleas



Ecuaciones de movimiento:

Para la masa 1: $M_1\ddot{x} = T_1$

Para la masa 2: $M_2\ddot{y} = M_2\, g - T_4$

Para la polea 1: $J_1\ddot{\theta}_1 = R_1\left(T_2 - T_1\right)$

Para la polea 2: $J_2\ddot{\theta}_2 = R_2\left(T_4 - T_2 - T_3\right)$

Como los momentos de inercia de las masas son despreciables, entonces:

$$T_1 = T_2$$
$$T_2 = T_3$$
$$T_4 = 2T_2 = 2T_1$$

Modelado de Sistemas con Poleas

En este caso, sustituyo $T_4 = 2T_1$ en la ecuación para la masa 2: $M_2\ddot{y} = M_2\, g - T_4$

$$M_2\ddot{y} = M_2\, g - 2T_1$$

Despejo T_1 : $$T_1 = \frac{M_2\, g - M_2\ddot{y}}{2}$$

Sustituyo T_1 en la ecuación de la masa 1: $$M_1\ddot{x} = \frac{M_2\, g - M_2\ddot{y}}{2}$$

$$2M_1\ddot{x} = M_2\, g - M_2\ddot{y}$$

$$2M_1\ddot{x} + M_2\ddot{y} = M_2\, g$$

Modelado de Sistemas con Poleas

Debemos buscar la relación entre las distancias x y y :

Sabemos, de la figura inicial, que: $R_1 = 2R_2$

$$x = R_1\,\theta_1$$
$$y = R_2\,\theta_2$$
$$x = 2R_2\theta_1$$

Como:

$$\theta_1 = \theta_2$$
$$\frac{x}{R_1} = \frac{y}{R_2}$$
$$\frac{x}{2R_2} = \frac{y}{R_2}$$
$$x = 2y$$

Sustituimos $x = 2y$ en

$$2M_1\ddot{x} + M_2\,\frac{\ddot{x}}{2} = M_2\,g$$
$$\left(2M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{x} = M_2\,g$$

Modelo

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{M_2\,g}{\left(2M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}}$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.