Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte mecánica) Componentes básicos de un sistema mecánico. Leyes de Newton. Modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

Tema 2. Analogías. Ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Conceptos Básicos

Ecuaciones de Lagrange

Las Ecuaciones de Lagrange son también conocidas como Ecuaciones de Euler-Lagrange, o simplemente de Euler.

Permiten contar con un sistema analítico para llegar a las ecuaciones que describen el comportamiento físico de las partículas.

No se trata de una nueva teoría independiente de la teoría Newtoniana.

Conceptos Básicos

Trabajo y Energía

Trabajo: el trabajo realizado en un sistema es el producto de la fuerza por la distancia recorrida.

$$Trabajo = W_t = F * d \qquad\qquad Trabajo = W_r = \tau * \theta$$

Energía: en general la energía se define como la capacidad para hacer trabajo. Se dice que un sistema tiene energía cuando puede trabajar.

La ley de conservación de energía establece que la energía no se crea ni se destruye, solo se transfiere o se transforma

Conceptos Básicos

Energía

El concepto de energía puede ser usado para modelar diferentes sistemas físicos.

La energía cinética T, corresponde al trabajo o las transformaciones que un cuerpo puede producir, debido a su movimiento, es decir, todos los cuerpos en movimiento tienen energía cinética, cuando está en reposo, no tiene energía cinética.

La energía potencial U se almacena en los cuerpos en reposo capaces de moverse o que luego la liberan.

Conceptos Básicos

Energía cinética T

La energía cinética de un objeto puntual (que no rote) está dada por la ecuación:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2(t),}$$

$m =$ masa

$v(t) =$ velocidad

$$T = W = \int F \, dr = \frac{1}{2} m v^2(t),$$

Conceptos Básicos

Energía potencial U

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{F\,dr}{dt}$$

Potencia

$$\boxed{U = W = \int F\,dr}$$

r define la posición

$$U = m\,g\,h(t),$$

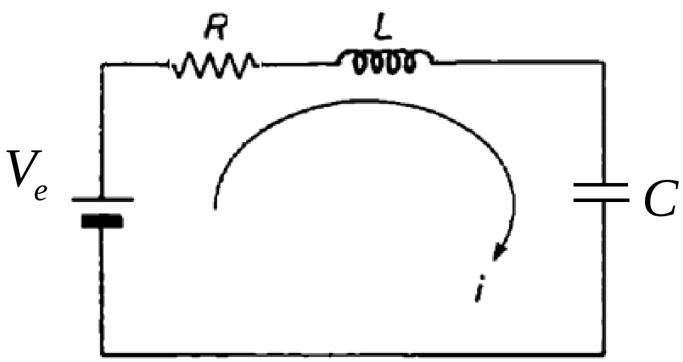
$g =$ gravedad

$m =$ masa

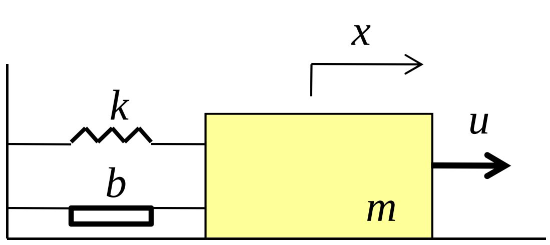
$h(t) =$ altura

$\Rightarrow$ Energía potencial gravitacional

Fuentes, Elementos Acumuladores y Disipadores de Energía



$v_e =$	Voltaje de entrada	Fuente
$C =$	Capacitancia	Acumulador (Potencial)
$R =$	Resistencia	Disipador
$L =$	Inductancia	Acumulador (Cinética)



$u =$	Fuerza de entrada	Fuente
$k =$	Constante del resorte	Acumulador (Potencial)
$b =$	Constante de la fuerza de fricción	Disipador
$m =$	masa	Acumulador (Cinética)

Conceptos Básicos

Energía potencial U en un capacitor:

$$q(t) = \int i(t)$$ Carga

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)$$

$$i(t) = C\dot{V}(t)$$

$$W_q = \int \frac{q(t)}{C} dq \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2(t)}$$

Conceptos Básicos

Energía cinética T en un inductor:

$$W = \frac{1}{2} L\, i(t)^2 = \frac{1}{2} L\, \dot{q}(t)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} L\, \dot{q}(t)^2}$$

Energía disipada por una resistencia R :

$$W = \frac{1}{2} R\, i(t)^2 = \frac{1}{2} R\, \dot{q}(t)^2$$

$$\boxed{D = \frac{1}{2} R\, \dot{q}(t)^2}$$

Conceptos Básicos

Energía potencial U en un resorte:

$$U = W = \int F_k \, dx = \frac{1}{2} k \, x(t)^2$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k \, x(t)^2}$$

Energía cinética T en un masa:

$$T = W = \int F \, dr = \frac{1}{2} m \, v^2(t),$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \, \dot{x}^2(t)}$$

Conceptos Básicos

Energía disipada D por la fricción:

$$W = \int F_b \, dx = \frac{1}{2} b \, \dot{x}^2(t),$$

$$\boxed{D = \frac{1}{2} b \, \dot{x}(t)^2}$$

Energía de los Elementos

$C =$ Capacitancia	$\Rightarrow$	$U = \frac{1}{2C} q(t)^2$
$R =$ Resistencia	$\Rightarrow$	$D = \frac{1}{2} R\,\dot{q}(t)^2$
$L =$ Inductancia	$\Rightarrow$	$T = \frac{1}{2} L\,\dot{q}(t)^2$

$k =$ Constante del resorte	$\Rightarrow$	$U = \frac{1}{2} k\,x(t)^2$
$b =$ Constante de la fuerza de fricción	$\Rightarrow$	$D = \frac{1}{2} b\,\dot{x}(t)^2$
$m =$ masa	$\Rightarrow$	$T = \frac{1}{2} m\,\dot{x}(t)^2$

$q(t) =$ Carga

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$q(t) = \int i(t)$$

Ecuaciones de Lagrange

Lagrangiano

El Lagrangiano $\mathcal{L}$ se define como:

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U}$$

Donde: T es la energía cinética total del sistema y U es la energía potencial del sistema.

Modelado de Sistemas

Modelar un sistema usando el Lagrangiano

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i(t)}=0} \qquad \boxed{\mathcal{L}=T-U}$$

-Energía cinética total del sistema T : suma de las energías cinéticas de las partículas.

-Energía potencial total del sistema U : suma de las energías potenciales de las partículas.

-Coordenada generalizada $p(t)$: cada grado de libertad del sistema se expresa mediante una coordenada generalizada.

- Velocidad generalizada $\dot{p}(t)$: derivada temporal de las coordenadas generalizadas.

Modelado de Sistemas

Algoritmo para modelar un sistema usando el Lagrangiano

a) Para sistemas conservativos:

1) Calcule la energía cinética total del sistema, T
2) Calcule la energía potencial total del sistema, U
3) Obtenga: $\mathcal{L} = T - U$
4) Calcule $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i(t)}, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}, \quad \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}\right]$
5) Obtenga: $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}\right] - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i(t)} = 0}$

Para cada valor de i

Modelado de Sistemas

Algoritmo para modelar un sistema usando el Lagrangiano

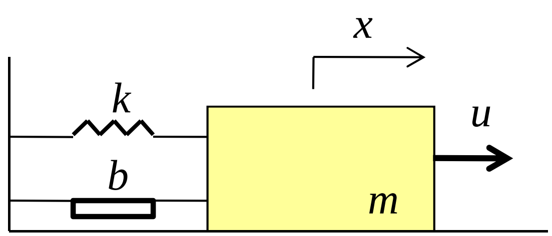
b) Para sistemas no conservativos:

1) Calcule la energía cinética total del sistema, T
2) Calcule la energía potencial total del sistema, U
3) Calcule la energía disipada total del sistema, D
4) Obtenga: $\mathcal{L} = T - U$
5) Calcule $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i(t)}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}, \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}\right], \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{p}(t)},$$
6) Obtenga: $$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i(t)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_i(t)} = Q_i}$$

Donde Q es la sumatoria de las fuerzas (fuentes) en el sistema.

Ejemplos

1) Considere el sistema masa-resorte-amortiguador



$$p(x) = x(t), \qquad T = \frac{1}{2} m\,\dot{x}(t)^2, \qquad U = \frac{1}{2} k\,x(t)^2, \qquad D = \frac{1}{2} b\,\dot{x}(t)^2$$

$$Q = u(t),$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m\,\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} k\,x(t)^2$$

Ejemplos

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m\,\dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} k\,x(t)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(t)} = -\frac{1}{2} 2\,k\,x(t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(t)} = \frac{1}{2} 2\,m\,\dot{x}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[m\,\dot{x}(t)\right] = m\,\ddot{x}(t)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}(t)} = \frac{1}{2} 2\,b\,\dot{x}(t)$$

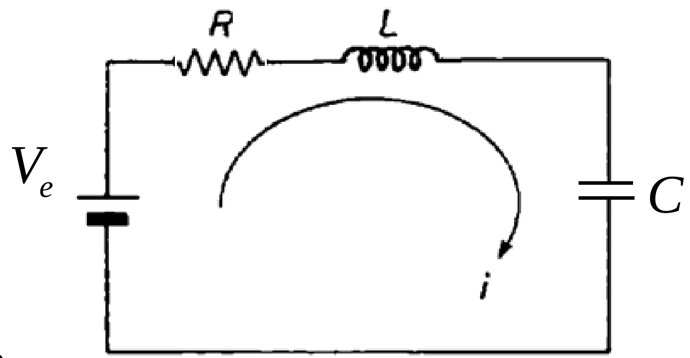
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}(t)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}(t)} = Q, \qquad p(x) = x(t),$$

$$m\,\ddot{x}(t) - \left(-k\,x(t)\right) + b\,\dot{x}(t) = u(t)$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) = \frac{1}{m} u(t)}$$

Ejemplos

1) Considere el circuito RLC de la figura



Coordenada generalizada

Carga

$$p(t) = q(t),$$
$$Q = V_e(t),$$

$$T = \frac{1}{2} L\,\dot{q}(t)^2, \qquad U = \frac{1}{2C} q(t)^2, \qquad D = \frac{1}{2} R\,\dot{q}(t)^2$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} L\,\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2C} q(t)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \\ q(t) &= \int i(t) \end{aligned}}$$

Carga

Ejemplos

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} L\,\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2C} q(t)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q(t)} = -\frac{1}{2C} 2q(t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t)} = \frac{1}{2} 2L\,\dot{q}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[L\,\dot{q}(t)\right] = L\,\ddot{q}(t)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}(t)} = \frac{1}{2} 2R\,\dot{q}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}(t)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}(t)} = Q, \qquad p(t) = q(t),$$

$$L\,\ddot{q}(t) - \left(-\frac{1}{C} q(t)\right) + R\,\dot{q}(t) = v_e(t)$$

$$\boxed{L\,\ddot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) + R\,\dot{q}(t) = v_e(t)}$$

Ejemplos

Si la salida de interés es el voltaje en el capacitor (por ejemplo), sabemos que:

$$V_c(t) = y(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_c = \dfrac{1}{C}\int i(t) \\ q(t) = \int i(t) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \int i(t) = CV_c \\ \int i(t) = q(t) \end{array}\right\}$$

Carga

$$q(t) = CV_c$$

$$L\,\ddot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) + R\,\dot{q}(t) = v_e(t)$$

$$LC\ddot{V}_c + V_c + RC\dot{V}_c = v_e(t)$$

$$\boxed{\ddot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c + \frac{RC}{LC}\dot{V}_c = \frac{1}{LC}v_e(t)}$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.