

Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/>

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 3. Modelo de sistemas hidráulicos. Analogías eléctricas - hidráulicas.

Conceptos Básicos

Densidad y Volumen Específico

La densidad de la masa ρ de una sustancia es su masa por unidad de volumen.

Para el agua, la densidad de masa es: $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$

Para los aceites basados en petróleo, la densidad de masa es aproximadamente:

$$\rho = 820 \frac{kg}{m^3}$$

El volumen específico es el recíproco de la densidad: $v_e = \frac{1}{\rho}$

Conceptos Básicos

Peso Específico

La peso específico γ de una sustancia es su peso por unidad de volumen.

$$\gamma \left[\frac{N}{m^3} \right] = \rho \left[\frac{kg}{m^3} \right] g \left[\frac{m}{s^2} \right],$$

g Es la aceleración de la gravedad

Para el agua, el peso específico es: $\gamma = 9,8 * 10^3 \left[\frac{N}{m^3} \right]$

Para los aceites basados en petróleo, el peso específico es aproximadamente:

$$\gamma = 820 * 9,8 = 8036 \left[\frac{N}{m^3} \right]$$

Conceptos Básicos

Numero de Reynolds

Las fuerzas que afectan el flujo de un fluido son debido a la gravedad, la flotación, la inercia del fluido, la viscosidad, la tensión superficial y factores semejantes.

Los flujos de fluidos, en muchas situaciones importantes, están dominados ya sea por **la inercia** o por **la viscosidad** del fluido. La relación adimensional de la fuerza de inercia con respecto a la fuerza viscosa se llama número de Reynolds

Conceptos Básicos

Numero de Reynolds

Un número de Reynolds **grande** indica el predominio de la **fuerza de inercia** y un número de **pequeño** el predominio de la **viscosidad**.

$$R = \frac{\rho v D}{\mu}$$

ρ Densidad de la masa del fluido

v Velocidad promedio del flujo

D Longitud característica

μ Viscosidad dinámica

Para el flujo en tubos, D es el diámetro interior del tubo.

Conceptos Básicos

Numero de Reynolds

La velocidad promedio del flujo en un tubo es:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4}{\pi D^2} Q \left[\frac{m}{s} \right]$$

Q Razón de flujo volumétrico $\left[\frac{m^3}{s} \right]$
 A Área del tubo $[m^2]$
 D Diámetro interior del tubo $[m]$

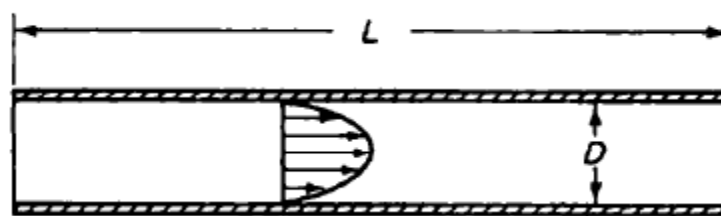
Así el número de Reynolds para el flujo en tubos es:

$$R = \frac{4\rho}{\pi D\mu} Q$$

Conceptos Básicos

Flujo Laminar y Turbulento

Flujo Laminar: es el flujo dominado por la fuerza de **viscosidad**. Está caracterizado por un movimiento del flujo suave, según líneas paralelas.

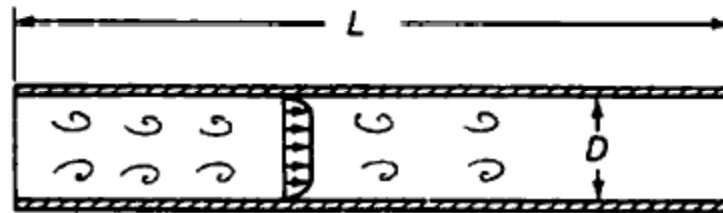


Para un número de Reynolds: $R < 2000$ el flujo siempre es laminar.

Conceptos Básicos

Flujo Laminar y Turbulento

Flujo Turbulento: es el flujo dominado por la fuerza de **inercia**. Está caracterizado por un movimiento del flujo irregular y como remolino.



Para un número de Reynolds: $R > 4000$ el flujo siempre es turbulento.

Conceptos Básicos

Conservación de la Masa

Principio de Conservación de la Masa del Flujo: La masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo.

Para fluidos **incompresibles**, la conservación de la masa es equivalente a la conservación del volumen, debida a que la **densidad se considera constante**.

Observación: En la vida real, la mayoría de los fluidos son compresibles, así la suposición de incompresibilidad es una aproximación para la simplificación de modelado.

Conceptos Básicos

Conservación de la Masa

La tasa de flujo de volumen q_v se relaciona con la tasa de flujo de masa q_m , a través de la densidad de la masa ρ , según la ecuación (1):

$$q_m \left[\frac{kg}{s} \right] = \rho \left[\frac{kg}{m^3} \right] q_v \left[\frac{m^3}{s} \right] \quad (1)$$

Para un contenedor que alberga un fluido de masa m , la tasa de cambio $\frac{dm}{dt}$ será igual al flujo de masa total entrante menos el flujo de masa total saliente:

$$\dot{m} = q_{mi} - q_{mo} \quad (2)$$

Conceptos Básicos

Conservación de la Masa

La masa del fluido m se relaciona con el volumen del contenedor V , de la siguiente manera:

$$m = \rho V \quad (3)$$

Entonces, para fluido **incompresible**, se tiene:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} \quad (4)$$

De la ecuación (1), tenemos que:

$$q_m = \rho q_v \quad (1) \quad \left. \begin{array}{l} q_{mi} = \rho q_{vi} \quad (5) \\ q_{mo} = \rho q_{vo} \quad (6) \end{array} \right\}$$

Conceptos Básicos

Conservación de la Masa

Usando: $\dot{m} = \rho \dot{V}$ (4)

$$q_{mi} = \rho q_{vi} \quad (5)$$

$$q_{mo} = \rho q_{vo} \quad (6)$$

Y sustituyendo en (2):

$$\dot{m} = q_{mi} - q_{mo} \quad (2)$$

$$\rho \dot{V} = \rho q_{vi} - \rho q_{vo}$$

$$\dot{V} = q_{vi} - q_{vo} \quad (7)$$

La ecuación (7) establece la conservación del volumen y en consecuencia la conservación de la masa para fluidos **incompresibles**.

Conceptos Básicos

Capacitancia Fluídica

La Capacitancia Fluídica C es la relación entre el cambio de la masa de flujo almacenada y el cambio de la presión causada por dicha masa.

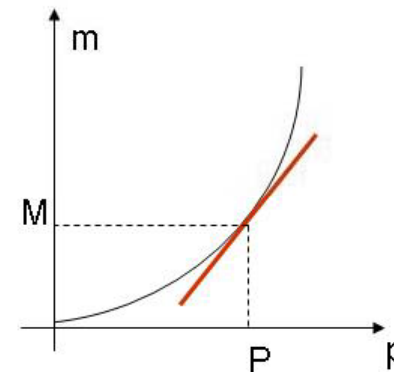
$$C = \left. \frac{dm}{dp} \right|_{p=P} \Rightarrow m = Cp$$

De (2): $\dot{m} = q_{mi} - q_{mo}$

$$\frac{dm}{dt} = q_m$$

derivando e
igualando

$$q_m = C \frac{dp}{dt} \quad (8)$$



Conceptos Básicos

Capacitancia Fluídica

$$q_m = C \frac{dp}{dt} \quad (8)$$

Esta relación es general tanto para sistemas hidráulicos como neumáticos. Sin embargo, para **sistemas hidráulicos**, se define la capacitancia fluídica como C_f

$$C_f = \frac{V}{p} \quad (9)$$

$$\text{De (7)} \quad \frac{dV}{dt} = q_{vi} - q_{vo}$$

$$\text{Entonces derivando (9):} \quad \frac{dp}{dt} C_f = \frac{dV}{dt} \quad \longrightarrow \quad C_f \frac{dp}{dt} = q_v \quad (10)$$

Conceptos Básicos

Capacitancia Fluídica

$$\text{Integrando (8)} \quad q_m = C \frac{dp}{dt} \longrightarrow \int q_m = Cp \quad (11)$$

$$\text{Integrando (2)} \quad \dot{m} = q_{mi} - q_{mo} \longrightarrow m = \int q_m \quad (12)$$

Dado que: $m = \rho V$ de (3), entonces, usando (11) y (12):

$$m = \rho V \Rightarrow \int q_m = \rho V \Rightarrow \rho V = Cp \Rightarrow \frac{C}{\rho} = \frac{V}{p} = C_f \longleftarrow \text{De (9)}$$

$$C_f = \frac{C}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{g} \longleftarrow \begin{array}{l} \text{área} \\ \text{gravedad} \end{array} \quad (13)$$

$$\text{Tanque con paredes verticales} \quad C_f = \frac{V}{p} = \frac{Ah}{\rho gh} = \frac{A}{\rho g} \quad (14)$$

Conceptos Básicos

Capacitancia Fluídica

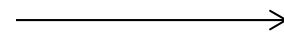
Otras referencias definen la capacitancia fluídica en términos del cambio en el volumen y en la altura. Luego, a partir de la ecuación (9):

$$C_f = \frac{V}{p}$$

$$C_f = \frac{V}{p} \Rightarrow C_f p = V \Rightarrow C_f \rho g h = V \Rightarrow C_f \rho g = \frac{V}{h} \quad (14)$$

De (13) $C_f = \frac{A}{\rho g} \Rightarrow A = C_f \rho g$

De (14) $C_f = \frac{V}{\rho g h} \Rightarrow \frac{V}{h} = C_f \rho g$



$$A = \frac{V}{h} \Rightarrow C_f = A \quad (15)$$

Por la definición

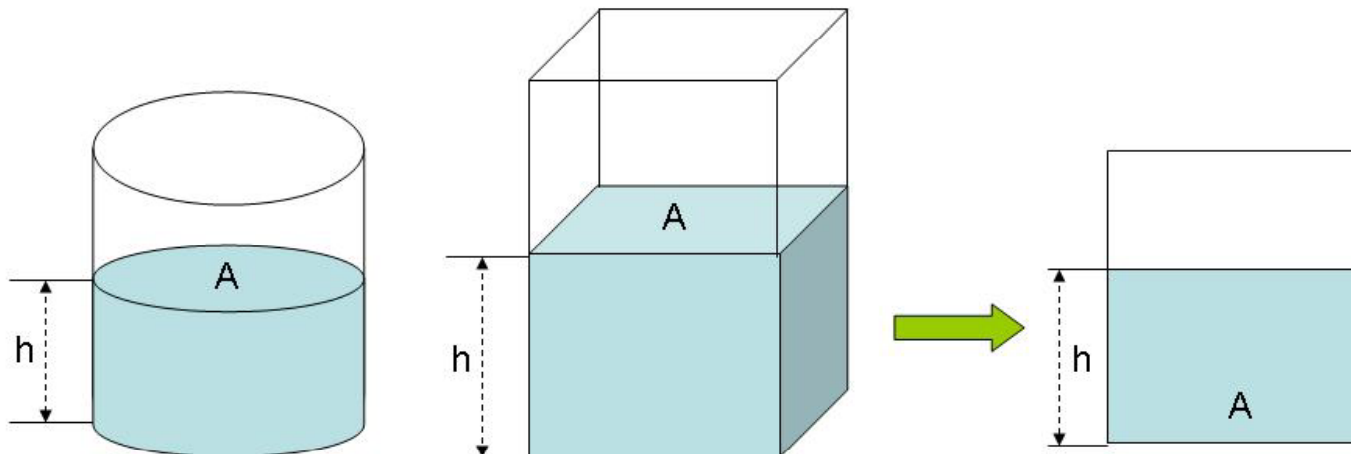
Con esta definición, la capacitancia fluídica coincide con el área de la sección transversal del tanque, es decir: $C_f = A$

Conceptos Básicos

Tanques

Los tanques de almacenamiento fluido son considerados como capacitores fluidos. La determinación de su capacitancia dependerá de las características geométricas del tanque.

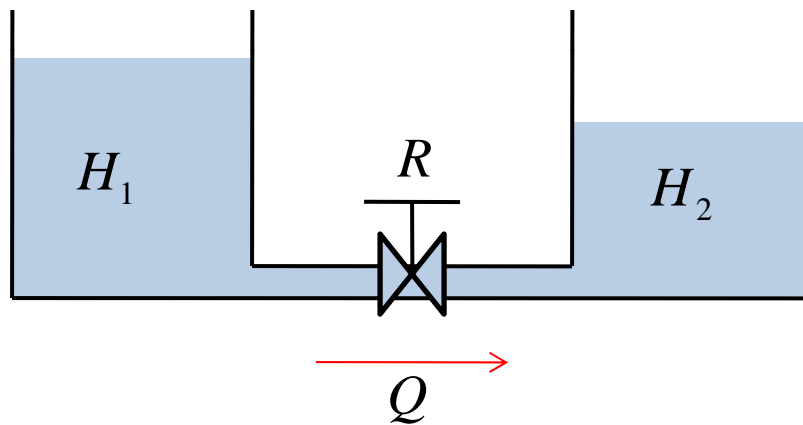
Tanques con paredes verticales:



Conceptos Básicos

Resistencia

Considere el siguiente sistema de tanques:



$$Q = \text{Razón de flujo volumétrico} \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

$$H_i = \text{Alturas} [m]$$

$$R = \text{Resistencia} \left[\frac{m}{\frac{m^3}{s}} \right]$$

$$R = \frac{\text{Diferencia de nivel}}{\text{Diferencia de razón de flujo volumétrico}} = \frac{dH}{dQ}$$

Conceptos Básicos

Resistencia

Si el flujo es laminar

$$Q = K_l H, \quad K_l \text{ Constante } \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

$$R = \frac{\text{Diferencia de nivel}}{\text{Diferencia de razón de flujo volumetrico}} = \frac{dH}{dQ}$$

$$dQ = K_l dH \Rightarrow \frac{dH}{dQ} = \frac{1}{K_l} \quad \left| \quad R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{1}{K_l} = \frac{1}{\frac{Q}{H}} = \frac{H}{Q}$$

R_l es constante y es análoga a la resistencia eléctrica.

Conceptos Básicos

Resistencia

Si el flujo es turbulento

$$Q = K_t \sqrt{H}, \quad K_t \text{ Constante } \left[\frac{m^{2.5}}{s} \right]$$

$$R = \frac{\text{Diferencia de nivel}}{\text{Diferencia de razón de flujo volumetrico}} = \frac{dH}{dQ}$$

$$dQ = K_t \frac{1}{2\sqrt{H}} dH$$

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K_t} = \frac{2\sqrt{H}}{\frac{Q}{\sqrt{H}}} = \frac{2H}{Q}$$

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{2H}{Q} \Rightarrow Q = \frac{2H}{R_t}$$

$$R_t = \frac{H}{Q} \leftarrow$$

Si las diferencias de nivel y flujo son pequeñas

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

- Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.
- Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.
- Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.