Modelado de Sistemas Físicos

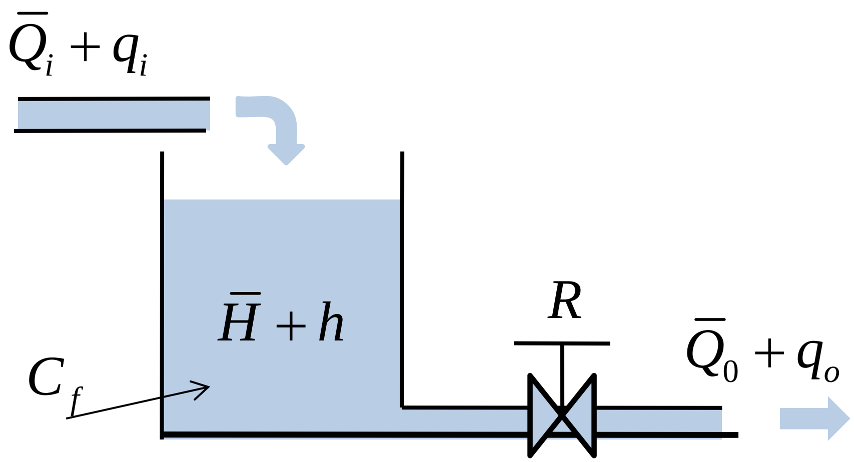
Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas

1) Considere el siguiente sistema de tanque (sistema hidráulico o sistema de nivel de líquido). Asuma que el flujo es turbulento y que las diferencias de nivel (altura) y flujo (de volumen) son pequeñas. La salida del sistema es la altura.



Modelado de Sistemas

Para obtener la dinámica del tanque, se modela la diferencia de liquido almacenado durante dt segundos igual al flujo total de entrada al tanque menos el flujo de volumen total de salida del tanque en el mismo tiempo.

$$\frac{dV}{dt} = q_{vi} - q_{vo} = q_i - q_o$$

$$A = \frac{V}{h} \Rightarrow C_f = A \qquad \longleftarrow \qquad (15) \qquad \text{Ecuación de la clase anterior}$$

$$C_f h = V$$

$$\frac{dV}{dt} = C_f \frac{dh}{dt}$$

$$C_f \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} = q_i - q_o \qquad (1)$$

Modelado de Sistemas

$$C_f \frac{dh}{dt} = q_i - q_o \qquad (1)$$

Debido a que las diferencias de nivel (altura) y flujo son pequeñas, R_t puede ser considerada constante. Definiendo las desviaciones pequeñas como:

$$\left.\begin{aligned} &dH = h, \quad dQ = q_o \\ &R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{h}{q_o}, \end{aligned}\right\} \qquad q_o = \frac{h}{R_t} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1): $C_f \dfrac{dh}{dt} = q_i - \dfrac{h}{R_t}$

$$\boxed{R_t C_f \frac{dh}{dt} + h = R_t\, q_i} \longleftarrow$$

Sistema lineal, valido al considerar las diferencias de nivel y flujo pequeñas, desde el punto de operación.

Modelado de Sistemas

En caso de que la salida del sistema sea el flujo de salida q_o, entonces:

$$q_o = \frac{h}{R_t} \qquad (2) \qquad \Longrightarrow \qquad h = q_o R_t \qquad (3)$$

derivando

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dq_o}{dt} R_t$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$C_f \frac{dh}{dt} = (q_i - q_o) \qquad (1)$$

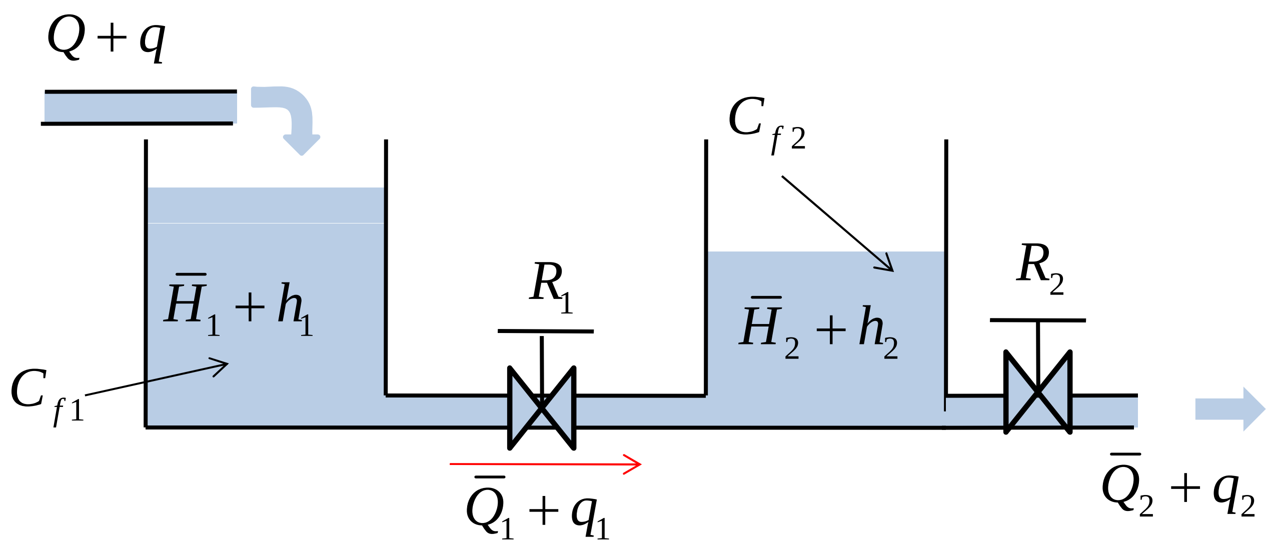
$$C_f R_t \frac{dq_o}{dt} = q_i - q_o$$

$$\boxed{R_t C_f \frac{dq_o}{dt} + q_o = q_i}$$

Sistema lineal, valido al considerar las diferencias de nivel y flujo pequeñas, desde el punto de operación.

Modelado de Sistemas

2) Considere el siguiente sistema de dos tanques. Asuma que el flujo es laminar y que las diferencias de nivel (altura) y flujo (de volumen) son pequeñas. La salida del sistema es la altura. La salida es la altura del primer tanque.



Modelado de Sistemas

Para modelar cada tanque, tenemos:

$$C_{f1}\frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \qquad (1)$$

$$C_{f2}\frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \qquad (2)$$

q es la variable de entrada, debemos encontrar las relaciones para q_1 y q_2

Como las diferencias de nivel (altura) y flujo son pequeñas, entonces R_1 es constante. Así, en equilibrio (en el punto de operación), para el primer tanque:

$$\bar{Q}_1 = \frac{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}{R_1} \qquad (3)$$

Modelado de Sistemas

Después de que ocurren pequeños cambios, entonces:

$$\bar{Q}_1 + q_1 = \frac{\bar{H}_1 + h_1 - \left(\bar{H}_2 + h_2\right)}{R_1}$$

$$\bar{Q}_1 + q_1 = \frac{\left(\bar{H}_1 - \bar{H}_2\right) + \left(h_1 - h_2\right)}{R_1}$$

$$\bar{Q}_1 + q_1 = \frac{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}{R_1} + \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4),

$$\frac{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}{R_1} + q_1 = \frac{\bar{H}_1 - \bar{H}_2}{R_1} + \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$\boxed{q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}} \qquad (5)$$

Modelado de Sistemas

Análogamente para el segundo tanque:

$$\bar{Q}_2 = \frac{\bar{H}_2}{R_2} \qquad (6)$$

Después de que ocurren pequeños cambios, entonces:

$$\bar{Q}_2 + q_2 = \frac{\bar{H}_2 + h_2}{R_2} \qquad (7)$$

Sustituyendo (8) en (7)

$$\boxed{q_2 = \frac{h_2}{R_2}} \qquad (8)$$

Modelado de Sistemas

Finalmente sustituyendo (5) y (8) en (1) y (2) obtenemos el modelo de los dos tanques,

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad (5) \qquad\qquad q_2 = \frac{h_2}{R_2} \qquad (8)$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \qquad (1) \qquad \Rightarrow \qquad C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$\boxed{R_1 C_1 \frac{dh_1}{dt} + h_1 - h_2 = R_1 q}$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \qquad (2) \qquad \Rightarrow \qquad C_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

$$\boxed{R_1 R_2 C_2 \frac{dh_2}{dt} - R_2 h_1 + \left(R_2 + R_1\right) h_2 = 0}$$

Modelado de Sistemas

Sistema Mecanico	Sistema de Nivel
F (fuerza)	q (flujo)
x (desplazamiento)	q (flujo) o h (altura)
b (coeficiente de viscosidad)	C (capacitancia)
K (constante del resorte)	1/R (inverso de la resistencia en la tubería.)

Sistema Eléctrico	Sistema de Nivel
Vi (voltaje de entrada)	qi (flujo de entrada)
Vo (voltaje de salida)	qo (flujo de salida)
C (capacitancia)	C (capacitancia)
R (resistencia)	R (resistencia en la tubería.)

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.