Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Tipos de Modelos

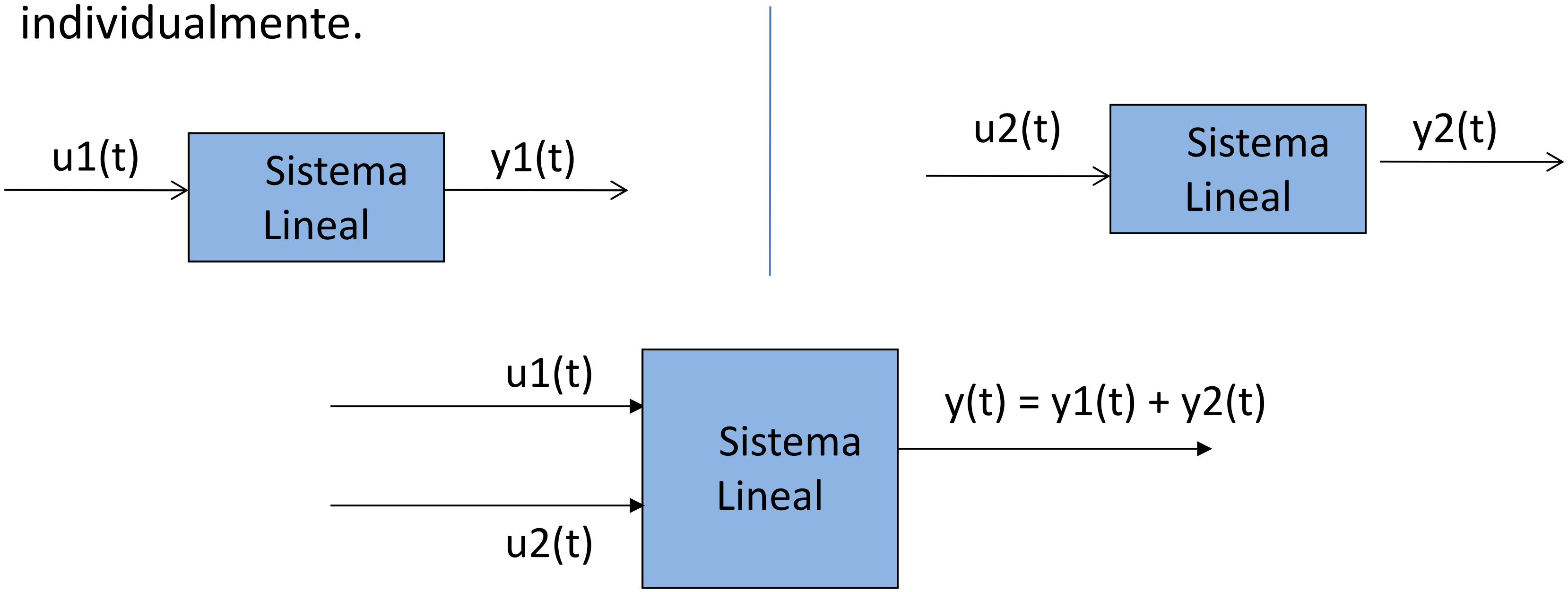
- Los <u>modelos matemáticos dinámicos</u> se clasifican mas específicamente en:

- Modelos lineales o no lineales
- Modelos variantes o invariantes en el tiempo
- Modelos determinístico o estocásticos
- Modelos continuos o discretos
- Modelos concentrados o distribuidos
- Sistemas causales o no causales

Tipos de Modelos

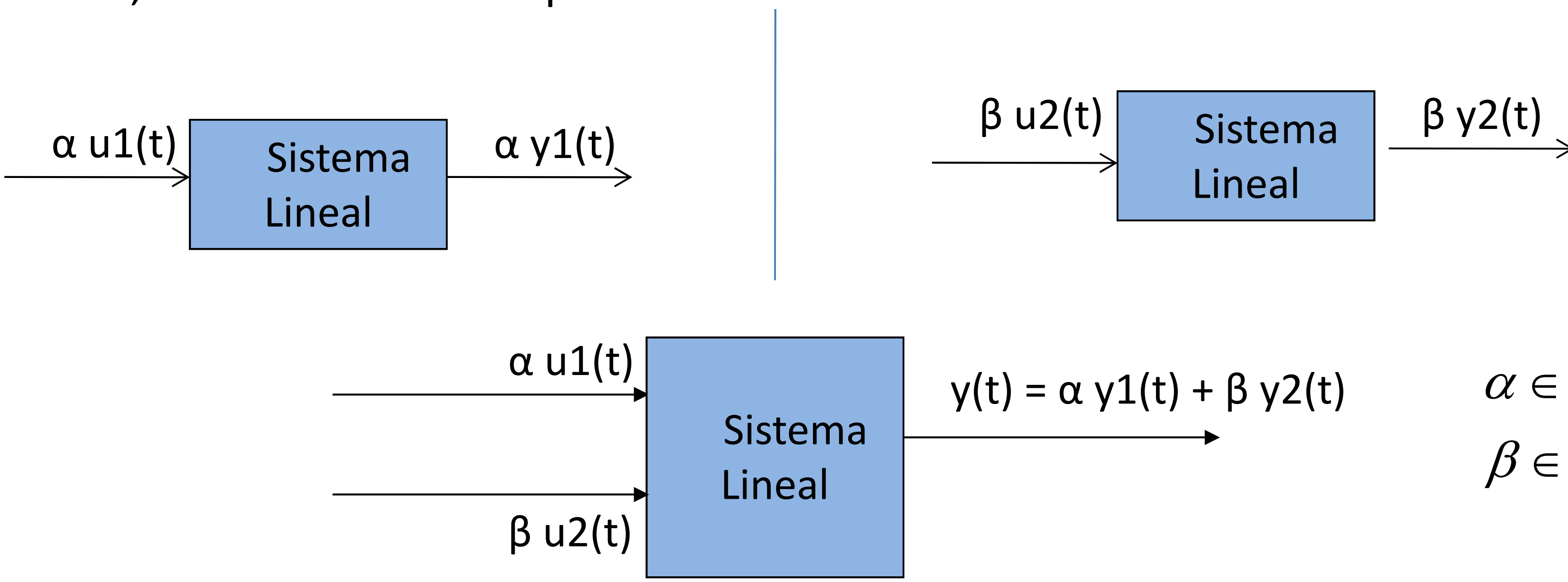
- <u>Modelos lineales o no lineales</u>: los modelos lineales y no lineales se caracterizan por su dependencia mutua de las variables.

- Los modelos matemáticos de sistemas lineales cumplen con el Principio de Superposición, es decir que la respuesta obtenida por la aplicación simultánea de dos entradas diferentes es igual a la suma de las dos respuestas obtenidas individualmente.



Tipos de Modelos

- Mas general, si se tiene una constante que multiplica a la entrada del sistema lineal, entonces se tiene que:



$\alpha \in R$

$\beta \in R$

- Los modelos de sistemas no lineales no cumplen con el Principio de Superposición.

Tipos de Modelos

- Modelo no lineal

$$\dot{x}(t) = -\frac{a}{A} K \sqrt{x(t)} + \frac{1}{A} u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}^2(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)y(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2Sin\left[y(t)\right] = u(t)$$

- Modelo lineal

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

Tipos de Modelos

- Modelos variantes o invariantes en el tiempo: se caracterizan por la naturaleza de sus parámetros respecto al tiempo.

- Un modelo de sistema es invariante en el tiempo cuando los cambios en la salida no dependen del momento en el cual se aplica la entrada.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

- Por el contrario un modelo de sistema es variante en el tiempo cuando la salida cambia a medida que se introduce una entrada del mismo tipo en tiempo diferente.

$$\dot{y}(t) = a(t)\,y(t) + b\,u(t)$$

- a es un parámetro del sistema.

Tipos de Modelos

- Por lo tanto, un sistema invariante en el tiempo posee parámetros constantes respecto al tiempo.

- Matemáticamente hablando un sistema invariante en el tiempo, para un estado inicial $x_0(t) = x(t_0)$, con una entrada $u_1(\tau), t_0 < \tau < t$, tiene una salida $y_1(t)$, y además si se aplica una entrada $u_2(\tau + T)$, con el mismo estado inicial pero en $t_0 + T$ entonces tiene la misma salida $y_2(t+T) = y_1(t)$.

Tipos de Modelos

- Variantes en el tiempo

$$\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_2(t)y(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + t\ \dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + t^2\ y(t) = u(t)$$

- Invariantes en el tiempo

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{a}{A}K\sqrt{y(t)} + \frac{1}{A}u(t)$$

Tipos de Modelos

- Modelos determinístico o estocásticos: se caracterizan por los modelos que dependen de la aleatoriedad de las variables.

- En los modelos determinísticos la interacción con las variables no es probabilística y el valor de la salida depende de los valores pasados de las variables.

$$\dot{y}(t) = a\,y(t) + b\,u(t)$$

- Mientras que los modelos estocásticos involucran relaciones probabilísticas.

$$\dot{y}(t) = a\,y(t) + \omega(t)$$

En este caso $\omega(t)$ es una señal de ruido blanco proveniente de la medición.

Tipos de Modelos

- Determinísticos

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

- Estocásticos

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t) + \xi(t)$$

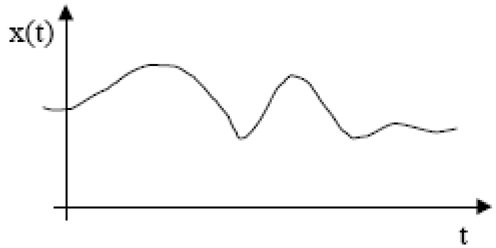
$\xi(t)$ es una variable estocástica

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) + \varepsilon(t), \qquad \varepsilon(t) \in N(0,\sigma^2)$$

Tipos de Modelos

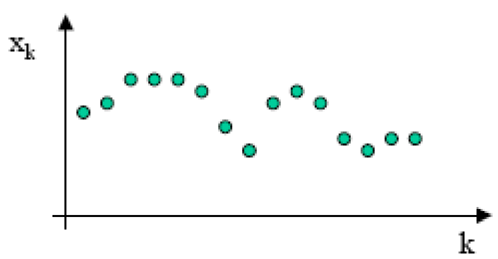
- Modelos continuos o discretos: los modelos continuos son aquellos que están definidos para todo $t \in \mathbb{R}$, mientras que los modelos discretos están definidos solamente para instantes de tiempo $k \in \mathbb{Z}$.

- Modelos continuos



$$\ddot{x}(t) = \alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) + \gamma u(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

- Modelos discretos



$$x(k) = a\, x(k-1) + b\, x(k-2) + c\, u(k-1),$$

o

$$x_k = a\, x_{k-1} + b\, x_{k-2} + c\, u_{k-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Tipos de Modelos

- Continuos

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

- Discretos

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_n y_{k-n} = u_{k-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$y_K + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} = u_{k-1}$$

$$y_K + 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = u_{k-1}$$

Tipos de Modelos

- Modelos concentrados o distribuidos: en los modelos concentrados, no importa en que punto del espacio se aplique una determinada entrada, mientras que en los modelos distribuidos depende del tiempo y la posición donde se aplique la entrada.

- Sistemas de parámetros concentrados: aquellos en los que no es necesario considerar la distribución espacial de sus parámetros (p.ej. la masa en un sistema mecánico) sino que se puede considerar concentrada en un punto.

- Sistemas de parámetros distribuidos: aquellos en los que es necesario considerar la distribución espacial de sus parámetros.

Tipos de Modelos

- Modelos concentrados o distribuidos: Un parámetro concentrado es aquél cuyas magnitudes físicas son tales que podemos considerarlo ubicado en un punto del espacio. Por otra parte, un parámetro distribuido es aquél que como su nombre lo indica, se encuentra distribuido en una región del espacio.

- Modelos concentrados: son representados matemáticamente a través de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

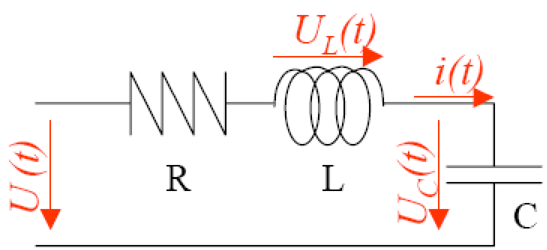
$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_m u(t)$$

- Modelos distribuidos: son representados matemáticamente a través de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

$$u(x_1, \ldots x_n) \longrightarrow F\left(x_1, \cdots x_n, u, \frac{\partial}{\partial x_1}u, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}u, \cdots\right) = 0$$

Tipos de Modelos

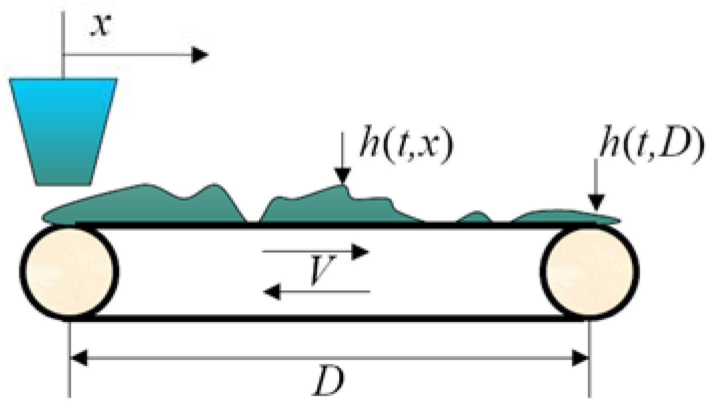
<u>Modelos concentrados</u>: Los fenómenos resistivo, inductivo y capacitivo se concentran en un único elemento.



$$u(t) = R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}q(t)$$

$$q(t) = \int i(t)$$

- <u>Modelos distribuidos</u>:



$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$h(t,D) = h(t - \frac{D}{V}, 0)$$

Tipos de Modelos

- Sistemas causales o no causales: los modelos causales son aquellos cuya salida depende de las salidas y entradas anteriores, mientras que los no causales dependen además de salidas y/o entradas futuras.

- Sistemas causales

$$y(k) = a\,y(k-1) + b\,u(k-1) + c\,u(k-2) + u(k-3)$$

- Sistemas no causales

$$y(k) = a\,y(k-1) + b\,u(k) + c\,u(k+1) + u(k+2)$$

Tipos de Modelos

- Causales

$$\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=u(t), \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$y_k+a_1y_{k-1}+\ldots+a_ny_{k-n}=u_{k-1}, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

- No causales

$$\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=\dddot{u}(t), \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$y_k+a_1y_{k-1}+\ldots+a_ny_{k-n}=u_{k+1}, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.