Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Representación de Modelos de Sistemas

Dominio temporal

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_ny(t)=b_0u^{(m)}(t)+b_1u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_mu(t), \qquad y^{(j)}(t)=\frac{d^j}{dt^j}y(t)$$

$$\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=u(t),$$

- Ecuaciones Algebraicas

$$V(t)=R\,i(t)$$

- Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

$$F(x_1,\cdots x_n,u,\frac{\partial}{\partial x_1}u,\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}u,\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_1}u,\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}u,\cdots)=0$$

Representación Interna

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables, llamadas variables de estado, tales que el conocimiento de dichas variables (en un tiempo inicial $t = t_0$) conjuntamente con el conocimiento de la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema para $t \geq t_0$

El orden del sistema es determinado por la cantidad de variables de estado.

Las relaciones entre las variables del sistema pueden representarse por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Representación Interna

Variables (o señales) de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad y(t) \in \Re^q$$

Variables (o señales) de entrada

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad u(t) \in \Re^p$$

Variables (o señales) de perturbación

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \vdots \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \omega(t) \in \Re^r$$

Variables (o señales) de estado

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad x(t) \in \Re^n$$

Representación Interna

Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \Rightarrow \text{EDO de primer orden no lineal}$$

Modelo de orden "n":

Siendo que: $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^p$ $\Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) \\ f_2(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) \end{bmatrix}$$

Representación Interna

Sistema de ecuaciones algebraicas:

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \Rightarrow$$ Ecuación algebraica no lineal para una salida

Siendo que: $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^p$, $y(t) \in \Re^q$ $\Rightarrow$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) \\ g_2(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) \\ \vdots \\ g_q(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) \end{bmatrix}$$

Representación Interna

Caso lineal:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \ldots + b_{1p}u_p(t) \\ a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \ldots + b_{2p}u_p(t) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \ldots + b_{np}u_p(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}x_1(t) + \ldots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \ldots + d_{1p}u_p(t) \\ c_{21}x_1(t) + \ldots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + \ldots + d_{2p}u_p(t) \\ \vdots \\ c_{q1}x_1(t) + \ldots + c_{qn}x_n(t) + d_{q1}u_1(t) + \ldots + d_{qp}u_p(t) \end{bmatrix}$$

Representación Interna

Caso lineal:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t)\\ a_{21}x_1(t)+\ldots+a_{2n}x_n(t)\\ \vdots\\ a_{n1}x_1(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}u_1(t)+\ldots+b_{1p}u_p(t)\\ b_{21}u_1(t)+\ldots+b_{2p}u_p(t)\\ \vdots\\ b_{n1}u_1(t)+\ldots+b_{np}u_p(t)\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_q(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}x_1(t)+\ldots+c_{1n}x_n(t)\\ c_{21}x_1(t)+\ldots+c_{2n}x_n(t)\\ \vdots\\ c_{q1}x_1(t)+\ldots+c_{qn}x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_{11}u_1(t)+\ldots+d_{1p}u_p(t)\\ d_{21}u_1(t)+\ldots+d_{2p}u_p(t)\\ \vdots\\ d_{q1}u_1(t)+\ldots+d_{qp}u_p(t)\end{bmatrix}$$

Representación Interna

Caso lineal:

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}^{\dot{x}(t)} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}^{x(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & & b_{2p} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & & b_{np} \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}}^{u(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{q1} & c_{q2} & & c_{qn} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & & d_{2p} \\ \vdots & & \\ d_{q1} & & d_{qp} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

Representación Interna

Caso lineal:

Forma matricial:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Siendo que:

$$A \in M^{n \times n}$$
$$B \in M^{n \times p}$$
$$C \in M^{q \times n}$$
$$D \in M^{q \times p}$$

Representación de Modelos de Sistemas

Solo como información debido a que aun no han estudiado Transformada de Laplace:

$$y^{(n)}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_n y(t)=b_0 u^{(m)}(t)+b_1 u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_m u(t)$$

Dominio frecuencial

Aplicando Transformada de Laplace:

$$s^n y(s)+a_1 s^{n-1} y(s)+\ldots+a_{n-1} s y(s)+a_n y(s)=b_0 s^m u(s)+b_1 s^{m-1} u(s)+\ldots+b_m u(s)$$

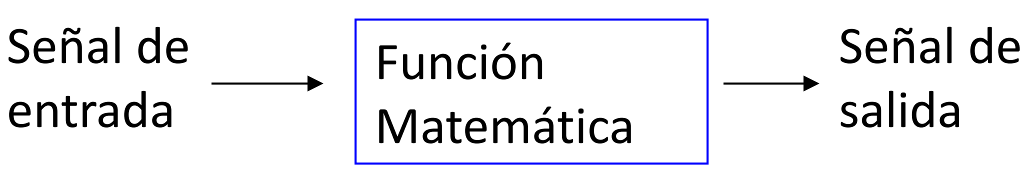
$$(s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\dot{s}+a_n)y(s)=(b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_m)u(s)$$

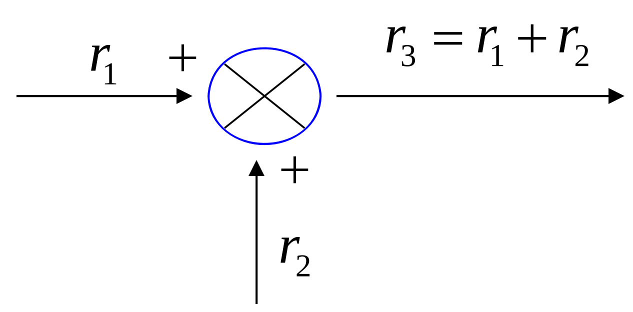
$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\dot{s}+a_n}, \qquad n\geq m$$

Representación de Modelos de Sistemas

Representación Gráfica

- Fácil visualización entre los componentes.
- Cada bloque representa una función matemática.
- La dirección del flujo se identifica mediante flechas.



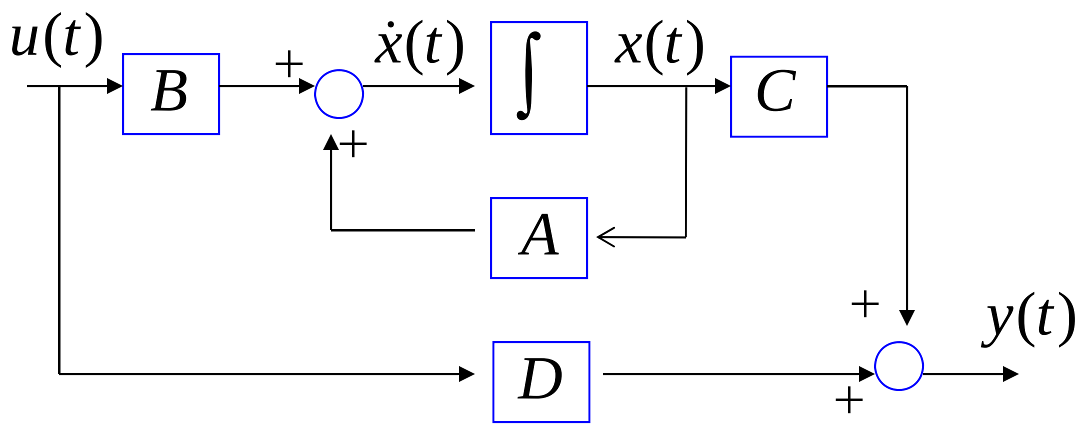


Representación de Modelos de Sistemas

Diagramas de Bloques

- Proporciona información sobre la dinámica pero no sobre la física del sistema.
- Varios sistemas físicos diferentes pueden ser representados por el mismo diagrama de bloques (no son únicos).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.