

Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/>

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte eléctrica) Componentes básicos de un circuito eléctrico. Ley de Ohm. Leyes de Kirchhoff. Modelos matemáticos de sistemas eléctricos.

Conceptos Básicos

El término voltaje es usado para describir el trabajo que debe ser realizado para mover una unidad carga eléctrica (q) de un punto a otro.

El voltaje es un término relativo, por lo que es llamado también diferencia de potencial entre dos puntos.

Las unidades del voltaje son voltios (V) y las de la carga eléctrica coulomb (q).

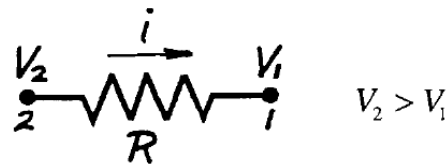
Debido a que el voltaje es un término relativo, implica que está asociado a algún punto de referencia, esta referencia generalmente es llamada tierra.

La corriente es el flujo de carga eléctrica por unidad de tiempo. La unidad de la corriente es el ampere (A).

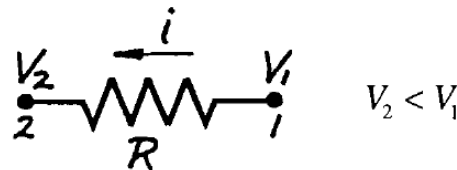
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Conceptos Básicos

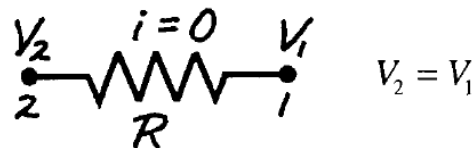
Sí el voltaje en el punto 2 es mayor que en el punto 1, entonces la corriente fluye del punto 2 al punto 1.



Sí el voltaje en el punto 2 es menor que en el punto 1, entonces la corriente fluye del punto 1 al punto 2.

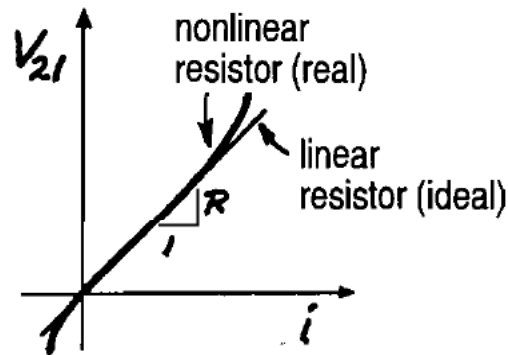
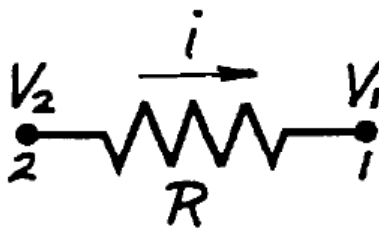


Sí el voltaje en el punto 1 es igual que en el punto 2, entonces no fluye corriente.



Componentes Básicos

La Resistencia:



La ecuación de una resistencia (ideal) está dada por:

$$V_R(t) = Ri(t)$$

$$V_2(t) - V_1(t) = Ri(t)$$

$Ri(t)$ es una función lineal, así el voltaje $V_R(t)$ es proporcional a la corriente $i(t)$ y R es la constante de proporción.

Componentes Básicos

Si despejamos la corriente $i(t)$ entonces:

$$i(t) = \frac{V_R(t)}{R}$$

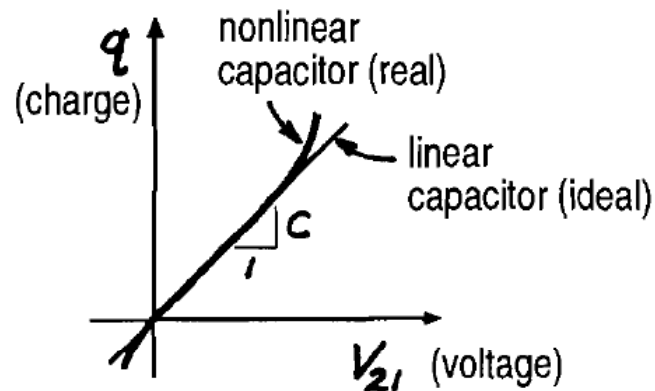
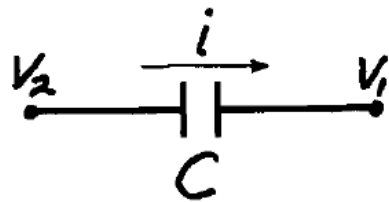
Las resistencias no almacenan energía eléctrica, sino que la disipan en forma de calor.

La unidad de la resistencia es el ohm (Ω).

$$R = \frac{V_R(t)}{i(t)} = \frac{\text{voltios}}{\text{ampere}} = \frac{V}{A} = \text{ohm} = \Omega$$

Componentes Básicos

El Capacitor: el capacitor es construido de dos piezas de material conductor, separadas una de la otra por un material que permite la existencia de un campo electrostático, pero no permite que la carga fluya entre las dos piezas conductoras.



Componentes Básicos

La ecuación de un capacitor (ideal) está dada por:

$$\begin{array}{l} q(t) = CV_c(t), \\ i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} V_2(t) - V_1(t) = V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \\ i(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} \end{array}$$

La unidad del capacitor es:

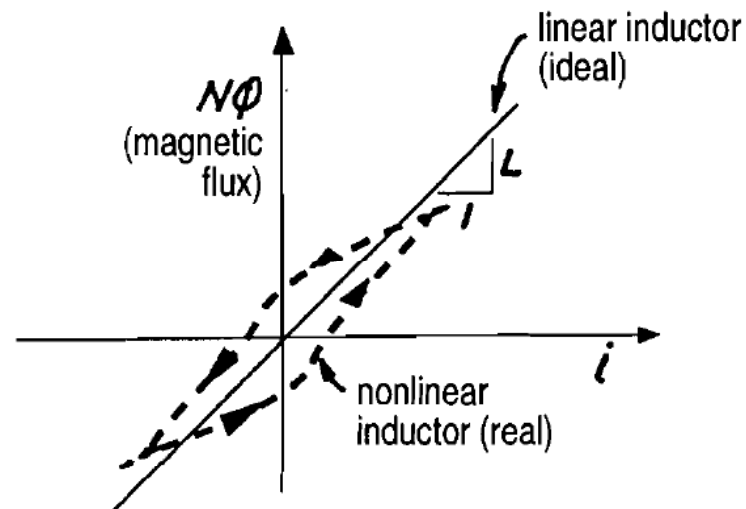
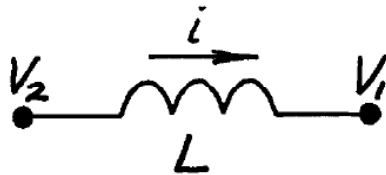
$$C = \frac{q}{V_c(t)} = \frac{\text{coulomb}}{\text{voltio}} = \frac{C}{V} = \text{faradio} = F$$

Los capacitores almacenan energía eléctrica en su campo electrostático.

Componentes Básicos

El Inductor: su forma de trabajo es la opuesta al capacitor. Esencialmente es un conductor que lleva corriente y está rodeado por un campo magnético.

La fuerza del campo magnético generada por una vuelta φ del conductor puede ser incrementada aumentando el numero de vueltas N . Así la fuerza total del campo magnético esta dada por: $N\varphi$



Componentes Básicos

La ecuación de un capacitor (ideal) está dada por:

$$V_2(t) - V_1(t) = V_L(t) = \frac{d(N\varphi(t))}{dt}$$

Si no existe la presencia de materiales magnéticos, entonces la fuerza del campo magnético es linealmente dependiente de la corriente. Así:

$$\frac{d(N\varphi(t))}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

Por lo tanto:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int V_L(t) dt$$

Componentes Básicos

La unidad del inductor es:

$$L = \frac{V_L(t)}{\frac{di(t)}{dt}} = \frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{\text{voltios}}{\text{ampere} / \text{segundos}} = \text{henrios} = H$$

Los inductores almacena energía eléctrica en forma de campo magnético.

Componentes Básicos

En resumen:

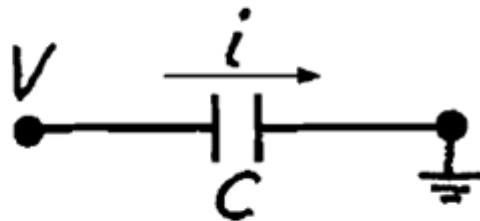
Resistor



$$V(t) = Ri(t),$$

$$i(t) = \frac{V(t)}{R}$$

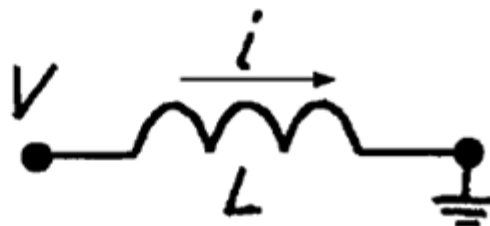
Capacitor



$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt,$$

$$i(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Inductor



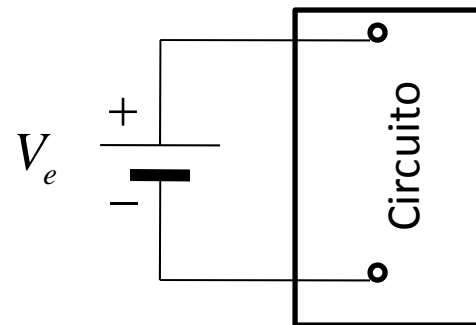
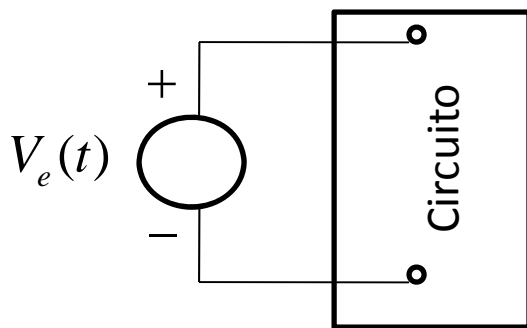
$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt$$

Componentes Básicos

La resistencia, el capacitor y el inductor son elementos pasivos. Pueden almacenar o disipar energía que ya está presente en el circuito, pero estos no pueden introducir energía adicional al circuito.

Las fuentes de voltaje y de corriente son elementos activos ya que estos introducen energía al circuito.

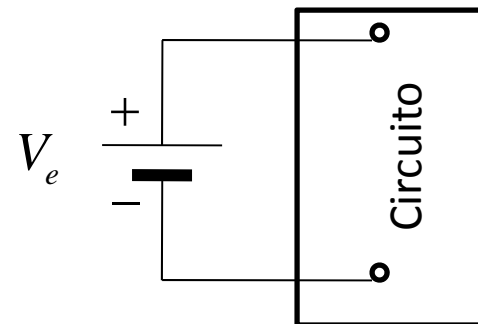
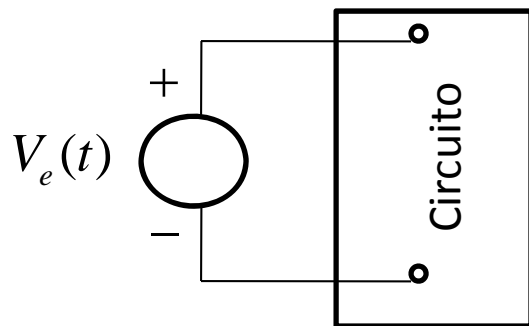


Componentes Básicos

La fente en general es un elemento activo que es capaz de generar una diferencia de potencial a sus bornes o proporcionar una corriente eléctrica.

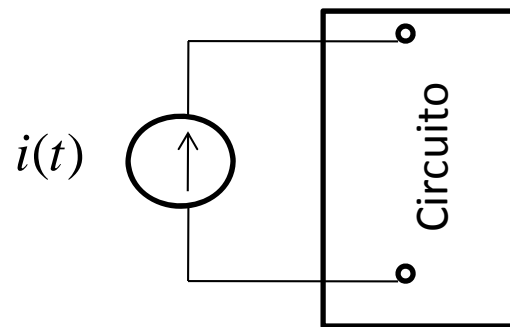
Fuente de voltaje o de tensión. Es aquella que genera una diferencia de potencial entre sus terminales. Es ideal cuando esta diferencia de potencial es constante e independiente de la carga que alimenta.

El voltaje puede ser variante o invariante en el tiempo.



Componentes Básicos

Fuentes corriente o intensidad, es aquella que proporciona intensidad al circuito. Es ideal cuando la intensidad es constante e independiente de la carga que alimente.



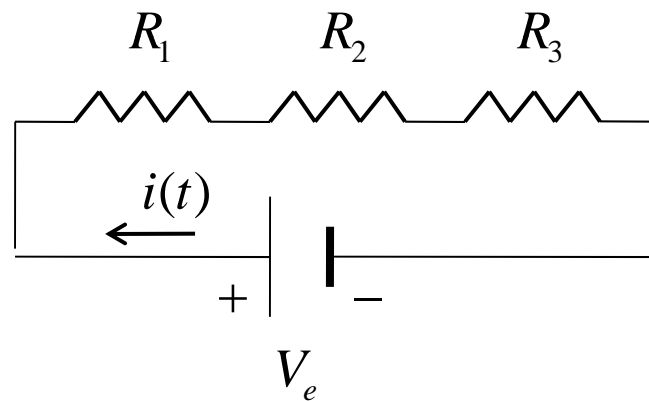
Ley de Ohm

“La corriente en un circuito es proporcional a la fuerza electromotriz total actuante en el circuito e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito”.

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} \quad \longrightarrow \quad V(t) = Ri(t),$$

Circuitos en Serie

Circuitos en serie: el valor de la resistencia total R_T de elementos resistivos conectados en serie es igual a la suma de todas las resistencias .



$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

Circuitos en Serie

Demostración:

El voltaje V_e en un circuito en serie es igual a la suma de todos los voltajes generados en cada elemento resistivo.

$$V_e = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

Usando la Ley de Ohm en cada elemento resistivo, tenemos:

$$V_{R1} = R_1 i_1(t),$$

$$V_{R2} = R_2 i_2(t),$$

$$V_{R3} = R_3 i_3(t),$$

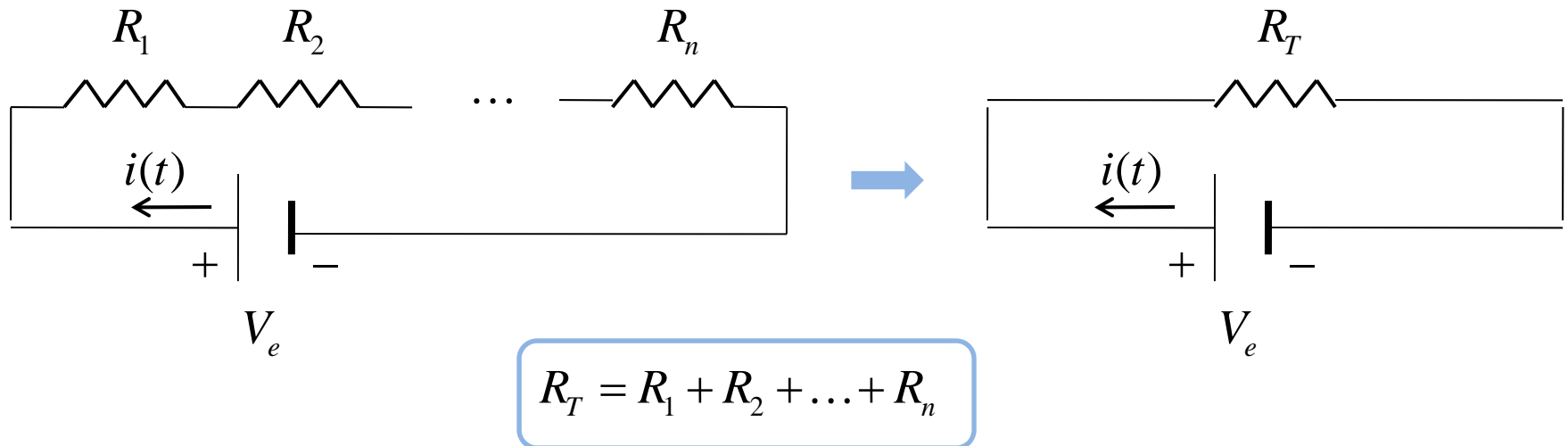
En un circuito en serie, la corriente es la misma en todo el circuito:

$$i(t) = i_1(t) = i_2(t) = i_3(t)$$

Circuitos en Serie

Entonces,

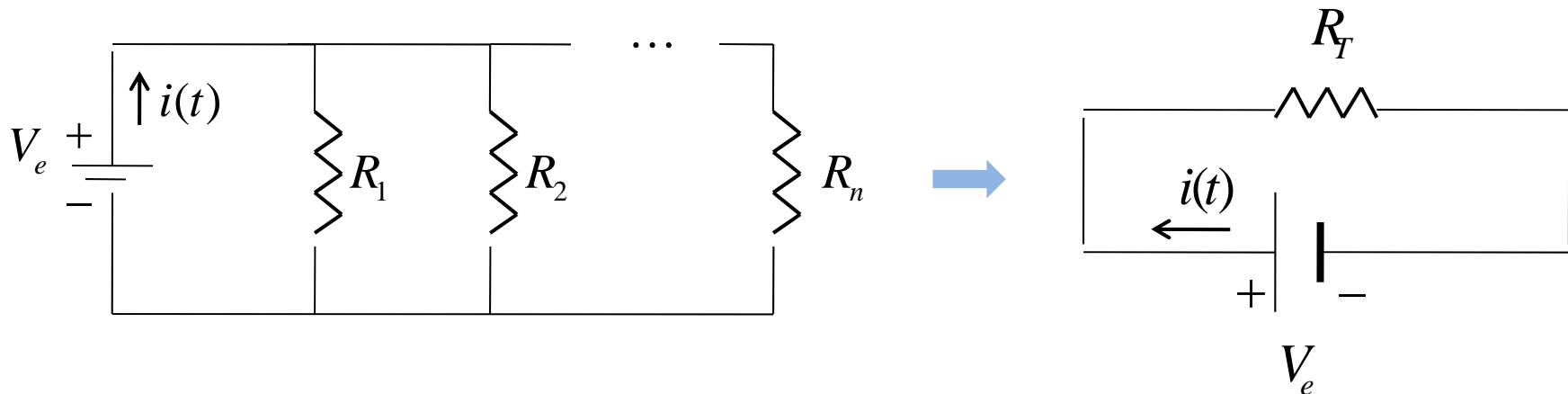
$$V_e = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$
$$V_e = R_1 i(t) + R_2 i(t) + R_3 i(t)$$
$$V_e = (R_1 + R_2 + R_3) i(t)$$
$$V_e = R_T i(t), \quad R_T = R_1 + R_2 + R_3$$



Circuitos en Paralelo

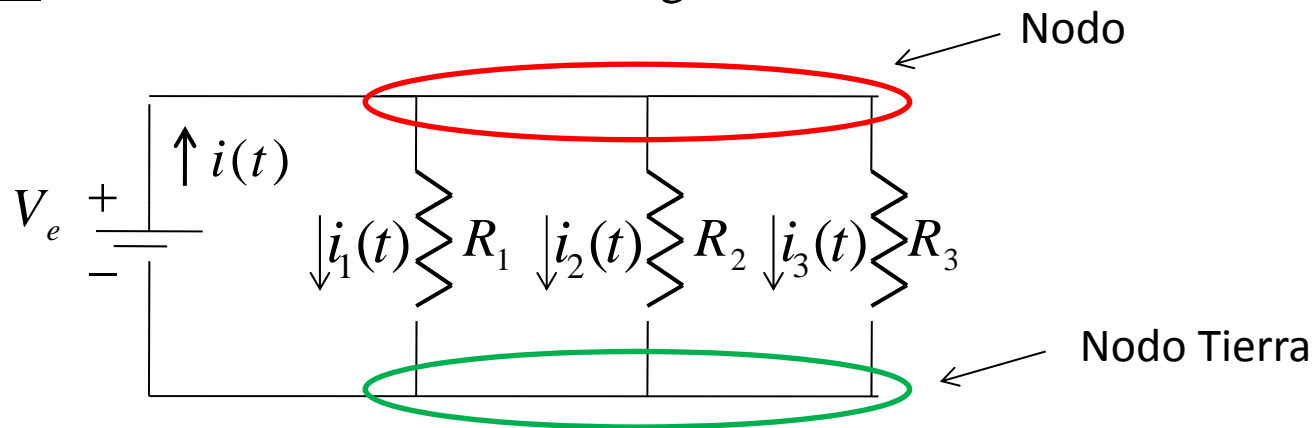
Circuitos en paralelo: en el caso de los circuitos en paralelo el valor de la resistencia total R_T esta dado por:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



Circuitos en Paralelo

Demostración: considere el circuito de la figura,



En el caso de los circuitos en paralelo la corriente total es igual a la suma de las corrientes:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

Circuitos en Paralelo

Aplicando la Ley de Ohm a cada elemento resistivo tenemos:

$$\begin{array}{l} V_{R1} = R_1 i_1(t), \\ V_{R2} = R_2 i_2(t), \\ V_{R3} = R_3 i_3(t), \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} i_1(t) = \frac{V_{R1}}{R_1}, \\ i_2(t) = \frac{V_{R2}}{R_2}, \\ i_3(t) = \frac{V_{R3}}{R_3}, \end{array}$$

En un circuito en paralelo los voltajes son iguales:

$$V_e = V_{R1} = V_{R2} = V_{R3}$$

Circuitos en Paralelo

Entonces:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t),$$

$$i(t) = \frac{V_{R1}}{R_1} + \frac{V_{R2}}{R_2} + \frac{V_{R3}}{R_3},$$

$$i(t) = \frac{V_e}{R_1} + \frac{V_e}{R_2} + \frac{V_e}{R_3},$$

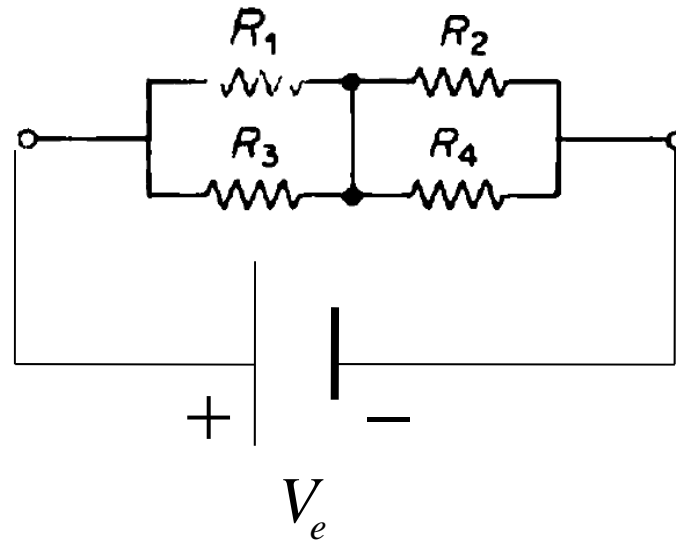
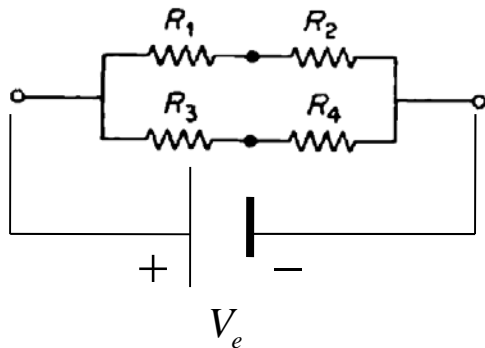
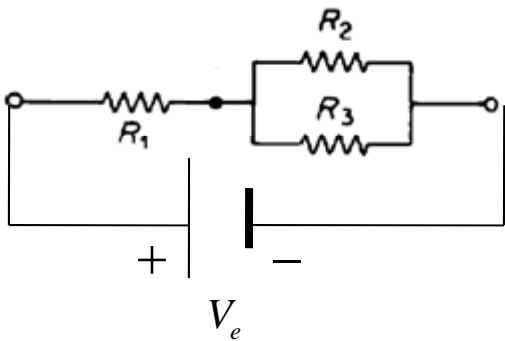
$$i(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_e,$$

$$i(t) = \frac{1}{R_T} V_e, \quad \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

$$i(t) = \frac{V_e}{R_T}$$

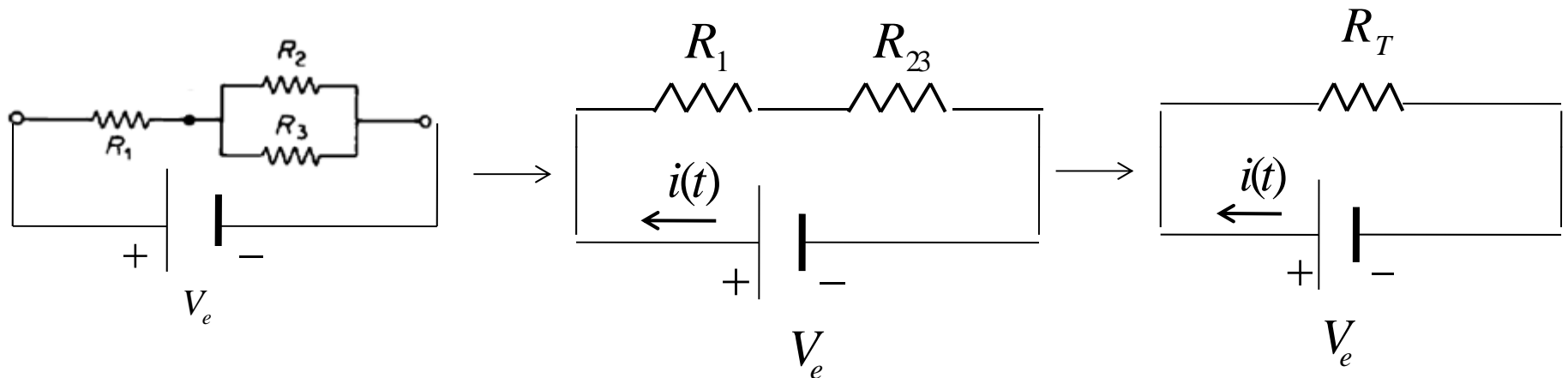
Circuitos en Serie-Paralelo

Calcular el valor de R_T para cada circuito:



Circuitos en Serie-Paralelo

Calcular el valor de R_T para cada circuito:



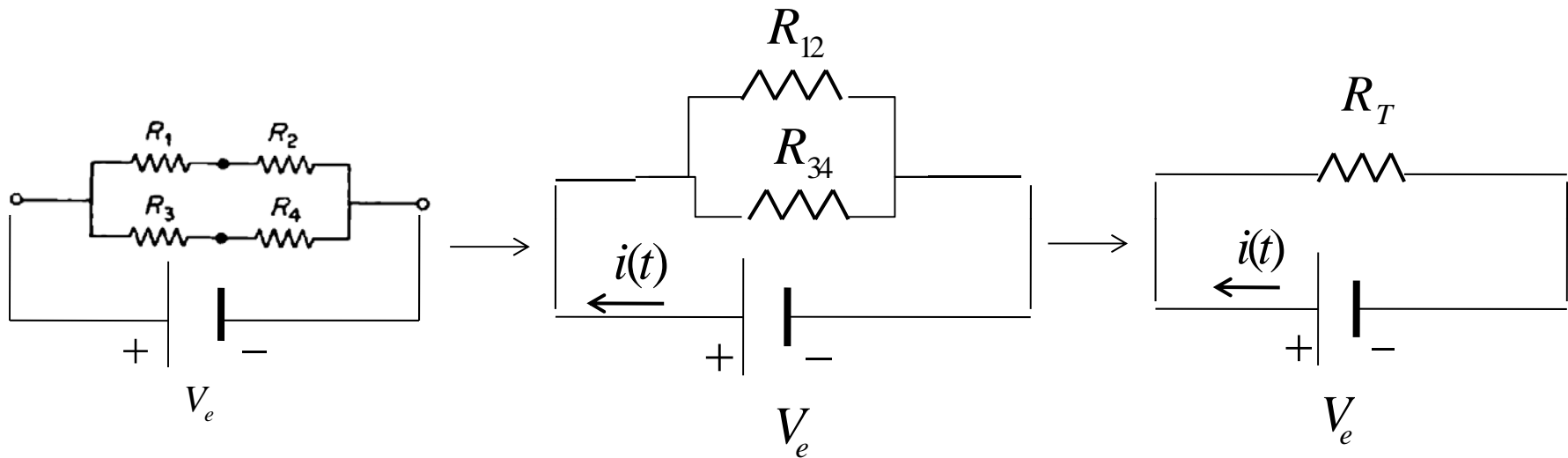
$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \quad \rightarrow \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_T = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$V_e(t) = R_T i(t)$$

Circuitos en Serie-Paralelo

Calcular el valor de R_T para cada circuito:



$$R_{12} = R_1 + R_2$$

$$R_{34} = R_3 + R_4$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}} = \frac{R_{34} + R_{12}}{R_{12}R_{34}}$$

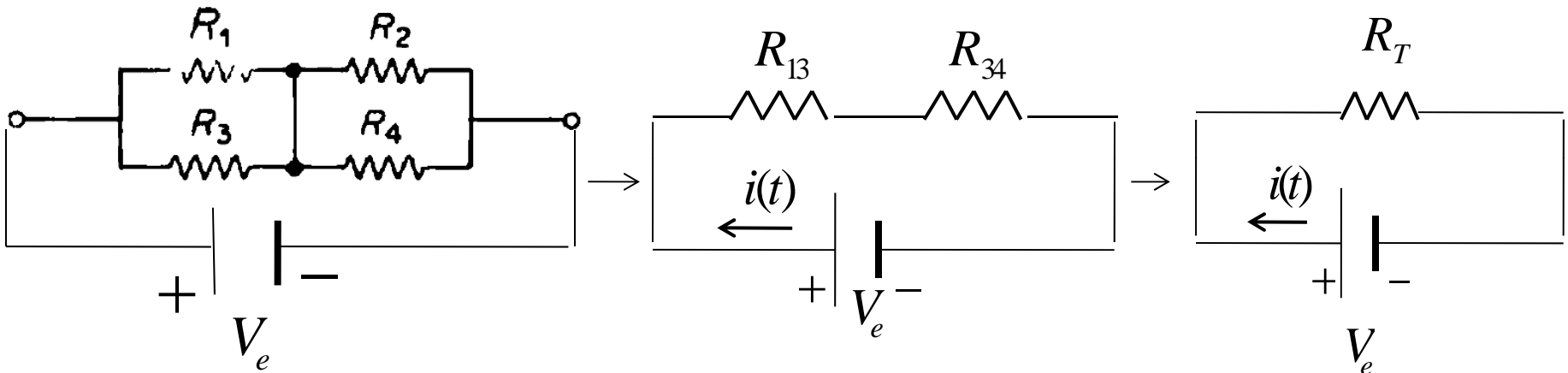
$$R_T = \frac{R_{12}R_{34}}{R_{34} + R_{12}}$$

$$R_T = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)}$$

$$V_e(t) = R_T i(t)$$

Circuitos en Serie-Paralelo

Calcular el valor de R_T para cada circuito:



$$\frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3 + R_1}{R_1 R_3}$$

$$\frac{1}{R_{24}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_4 + R_2}{R_2 R_4}$$

$$R_T = R_{13} + R_{24}$$

$$R_T = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$$V_e(t) = R_T i(t)$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

- Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.
- Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.
- Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.
- Richard Dorf. Circuitos Eléctricos, Alfa Omega, 2003.