Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte eléctrica) Componentes básicos de un circuito eléctrico. Ley de Ohm. Leyes de Kirchhoff. Modelos matemáticos de sistemas eléctricos.

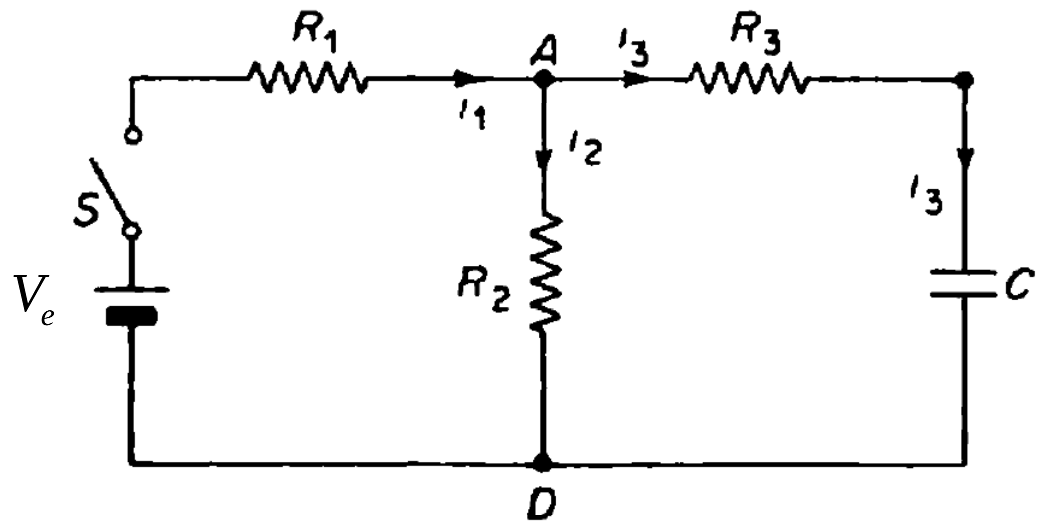
Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Las variables de interés en el análisis de circuitos son los voltajes y las corrientes en diferentes puntos a los largo del circuito.

<u>Método de Nodos</u>: consiste en obtener las ecuaciones matemáticas que representan la dinámica del circuito aplicando la Ley de Nodos de Kirchhoff a cada nodo del circuito.

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Considere el circuito de la figura, donde V_e es la entrada al circuito (fuente de alimentación de voltaje) y se desea medir (salida del sistema) el voltaje en el capacitor. Suponga además que para todo $t < 0$ el interruptor está abierto (por lo tanto no hay flujo de corriente en el circuito) y para $t \geq 0$ está cerrado. El condensador no está cargado inicialmente, así $V_C(0) = 0$.



Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Nodo A: $i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0$ … (1)

Sabemos que: $V_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_3(t)\,dt + V_C(0), \;\Rightarrow\; i_3(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt}$

$$V_{R1}(t) = R_1\, i_1(t), \;\Rightarrow\; V_e(t) - V_A(t) = R_1\, i_1(t), \;\Rightarrow\; i_1(t) = \frac{V_e(t) - V_A(t)}{R_1}$$

$$V_{R2}(t) = R_2\, i_2(t), \;\Rightarrow\; V_A(t) - 0 = R_2\, i_2(t), \;\Rightarrow\; i_2(t) = \frac{V_A(t)}{R_2}$$

Sustituyendo las corrientes en (1)

$$\frac{V_e(t) - V_A(t)}{R_1} - \frac{V_A(t)}{R_2} - C\frac{dV_C(t)}{dt} = 0$$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Necesitamos hallar el modelo en función de V_e y $V_C(t)$ que son las variables de entrada y salida respectivamente

Sabemos que:

$$V_{R3}(t) = R_3\, i_3(t), \;\Rightarrow\; V_A(t) - V_C(t) = R_3\, i_3(t), \;\Rightarrow\; V_A(t) = V_C(t) + R_3 C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Entonces:

$$\frac{V_e(t) - V_C(t) - R_3 C \frac{dV_C(t)}{dt}}{R_1} - \frac{V_C(t) + R_3 C \frac{dV_C(t)}{dt}}{R_2} - C \frac{dV_C(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{V_e(t)}{R_1} - \frac{V_C(t)}{R_1} - \frac{R_3 C}{R_1} \frac{dV_C(t)}{dt} - \frac{V_C(t)}{R_2} - \frac{R_3 C}{R_2} \frac{dV_C(t)}{dt} - C \frac{dV_C(t)}{dt} = 0$$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

$$-\left(\frac{R_3C}{R_1}+\frac{R_3C}{R_2}+C\right)\frac{dV_C(t)}{dt}-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_C(t)+\frac{V_e(t)}{R_1}=0$$

Llamamos, $V_C(t)=y(t)\leftarrow$ Variable de salida

$V_e(t)=u(t)\leftarrow$ Variable de entrada

$$\left(\frac{R_3C}{R_1}+\frac{R_3C}{R_2}+C\right)\dot{y}(t)+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)y(t)=\frac{1}{R_1}u(t)$$

o

$$\dot{y}(t)=-\frac{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{\left(\frac{R_3C}{R_1}+\frac{R_3C}{R_2}+C\right)}y(t)+\frac{\frac{1}{R_1}}{\left(\frac{R_3C}{R_1}+\frac{R_3C}{R_2}+C\right)}u(t)$$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Podemos escribir el sistema en su representación interna (variables de estado).

Podemos llamar a $y(t) = x(t)$ $\leftarrow$ Variable de estado que es medida (así también es la salida)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\dot{x}(t) = a\ x(t) + b\ u(t), \quad x(0) = 0$$
$$y(t) = x(t)$$

$$a = -\frac{\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)}{\left(\dfrac{R_3 C}{R_1} + \dfrac{R_3 C}{R_2} + C\right)}$$

$$b = \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\left(\dfrac{R_3 C}{R_1} + \dfrac{R_3 C}{R_2} + C\right)}$$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Análisis del sistema:

Es un sistema de primer orden. Es decir, la EDO es de orden 1. Así $n = 1$

Sí analizamos el circuito, este primer orden surge de la presencia del condensador en el circuito.

Sí el circuito estuviese compuesto solamente de resistencias, entonces el sistema sería de orden cero (sin términos derivativos o integrales, sería una ecuación algebraica).

El numero de condensadores e inductancias en un circuito determina el orden del sistema.

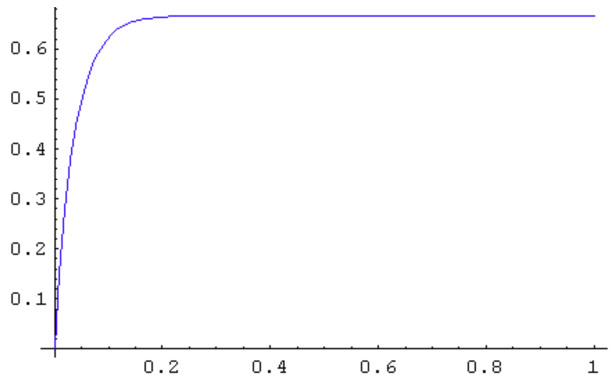
Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

<u>Simulaciones</u>:

Sistema de primer orden $\Longrightarrow$ **dinámica sobreamortiguada**

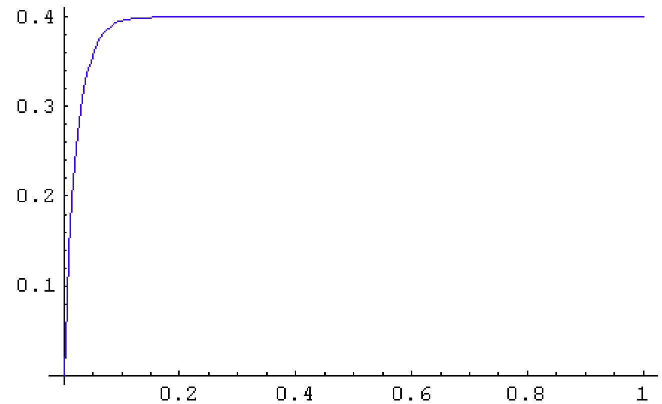
$R_1 = 1\Omega, \quad R_{2,} = 2\Omega, \quad R_3 = 3\Omega,$

$C = 0.01f, \quad V_e(t) = 1v$



$R_1 = 3\Omega, \quad R_{2,} = 2\Omega, \quad R_3 = 1\Omega,$

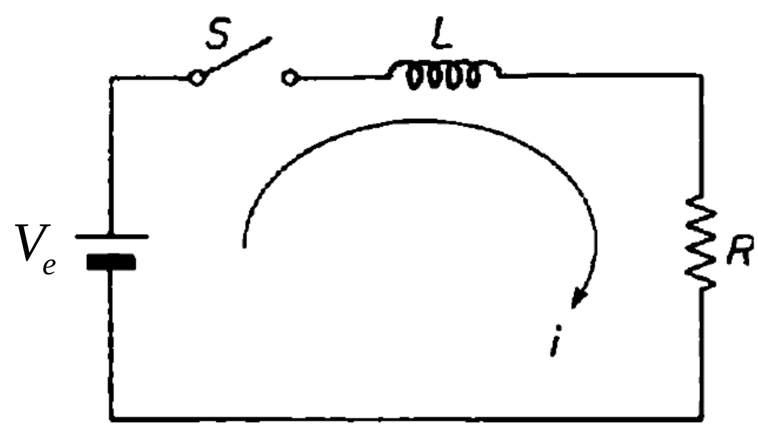
$C = 0.01f, \quad V_e(t) = 1v$



Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Método de Mallas: consiste en identificar las corrientes incógnitas (suponiendo arbitrariamente la dirección de las corrientes alrededor de las mallas). Para obtener el modelo se hace uso de la Ley de Mallas de Kirchhoff.

Dado el circuito de la figura, suponga que el interruptor está abierto para $t < 0$ y cerrado para $t \geq 0$ Se desea medir la corriente $i(t)$.



Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Asumimos la dirección de la corriente según las agujas del reloj.

Aplicamos la Ley de Mallas:

$$V_e(t) - V_L(t) - V_R(t) = 0$$

$$V_e(t) - L\frac{di(t)}{dt} - Ri(t) = 0$$

Como $i(t)$ es la variable que se desea medir, entonces: $i(t) = y(t)$

Así podemos llamar a la variable de entrada: $V_e(t) = u(t)$

$$u(t) - L\dot{y}(t) - Ry(t) = 0$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = -\frac{R}{L}y(t) + \frac{1}{L}u(t)}$$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Representación Interna:

Como $i(t) = y(t)$ es la única variable, entonces $i(t) = y(t) = x(t)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t), \quad x(0) = 0$$
$$y(t) = x(t)$$

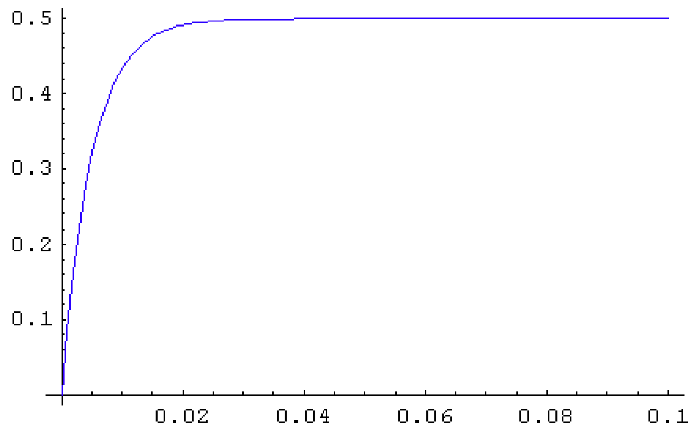
Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

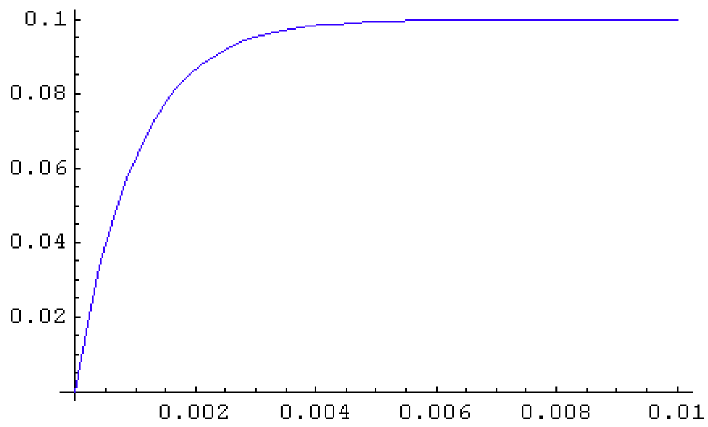
Simulaciones:

Sistema de primer orden $\Longrightarrow$ **dinámica sobreamortiguada**

$$R = 2\Omega, \quad L = 0.01H,$$
$$V_e(t) = 1v$$

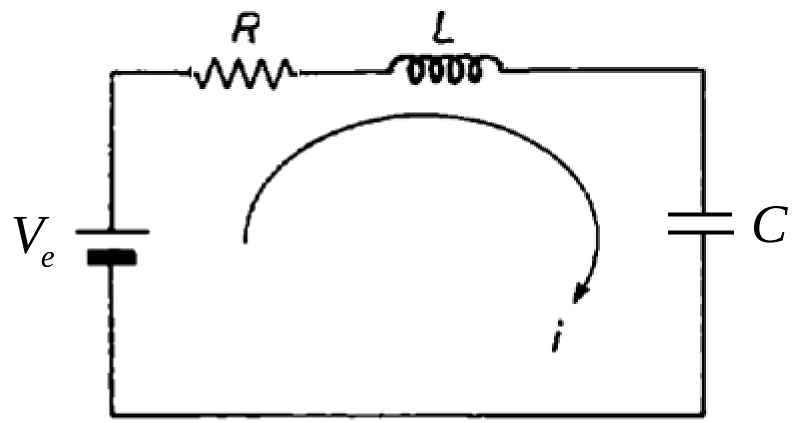
$$R = 10\Omega, \quad L = 0.01H,$$
$$V_e(t) = 1v$$





Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Considere el circuito de la figura. La variable medida es el voltaje en el condensador. Las condiciones iniciales son nulas.



Aplicando Ley de Mallas:

$$V_e(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0$$

$$V_e(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = 0$$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Sabemos que:

$$y(t) = V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

Así: $i(t) = C\dot{V}_C(t)$

$$V_e(t) = LC\ddot{V}_C(t) + RC\dot{V}_C(t) + V_C(t)$$

$$\ddot{V}_C(t) + \frac{R}{L}\dot{V}_C(t) + \frac{1}{LC}V_C(t) = \frac{1}{LC}V_e(t)$$

Lamamos: $V_C(t) = y(t) \leftarrow$ Variable de salida

$V_e(t) = u(t) \leftarrow$ Variable de entrada

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

$$\ddot{y}(t)+\frac{R}{L}\dot{y}(t)+\frac{1}{LC}y(t)=\frac{1}{LC}u(t)$$

o

$$\ddot{y}(t)=-\frac{R}{L}\dot{y}(t)-\frac{1}{LC}y(t)+\frac{1}{LC}u(t)$$

<u>Análisis del sistema</u>:

Debido a la presencia de un condensador y un inductor, el sistema resultante es de segundo orden, $n=2.$

La dinámica puede se **sobreamortiguada o subamortiguada**, esto dependerá de los valores de $R, L, C.$

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

<u>Representación Interna</u>:

Defino las variables de estado (cambio de variable):

$$x_1(t) = V_c(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{V}_c(t)$$

Por lo tanto, la EDO del modelo del sistema se puede escribir como:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{R}{L}\dot{y}(t) - \frac{1}{LC}y(t) + \frac{1}{LC}u(t)$$ ⟵ EDO de segundo orden

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{R}{L}x_2(t) - \frac{1}{LC}x_1(t) + \frac{1}{LC}u(t) \end{cases}$$ ⟵ Dos EDO de primer orden

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Representación Interna: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{R}{L}x_2(t) - \dfrac{1}{LC}x_1(t) + \dfrac{1}{LC}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

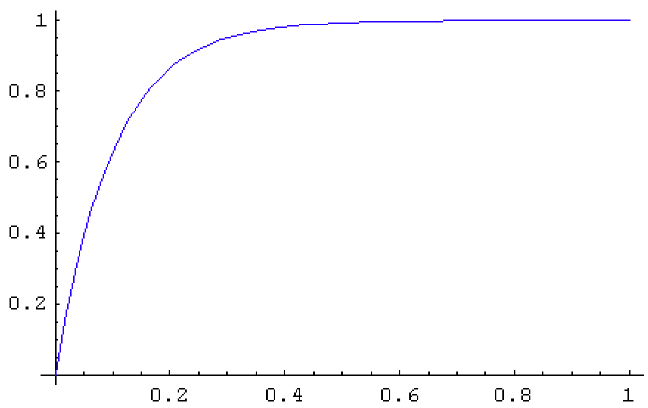
Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Simulaciones:

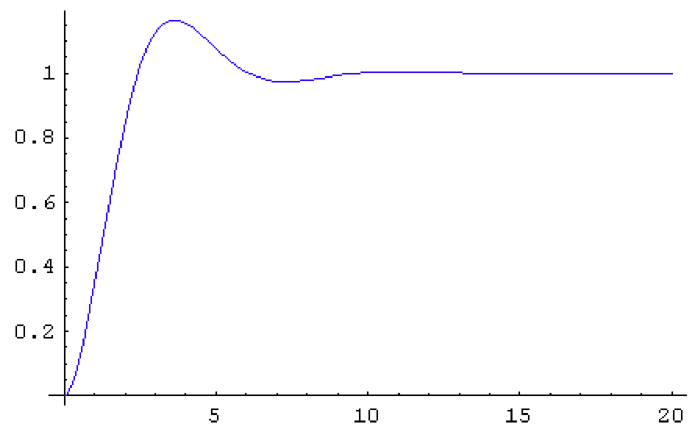
Sistema de segundo orden $\Longrightarrow$ **dinámica sobreamortiguada o subamortiguada**

$$R = 10\Omega, \quad L = 0.01H,$$
$$C = 0.01f, \quad V_e(t) = 1v$$

$$R = 1\Omega, \quad L = 1H,$$
$$C = 1f, \quad V_e(t) = 1v$$



Sobreamortiguada



Subamortiguada

Modelado Matemático de Sistemas Eléctricos

Tarea: realizar el diagrama de bloques del sistema.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

- Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

- Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

- Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.

- Richard Dorf. Circuitos Eléctricos, Alfa Omega, 2003.