Modelado de Sistemas Físicos

Profesora
Anna Patete, Dr. M.Sc. Ing.

Departamento de Sistemas de Control.
Escuela de Ingeniería de Sistemas.
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: apatete@ula.ve
Página web: http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/apatete/

Modelado de Sistemas Físicos

Unidad II: Modelado de sistemas mecánicos y electromecánicos.

Tema 1. (Parte mecánica) Componentes básicos de un sistema mecánico. Leyes de Newton. Modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

Tema 2. Analogías. Ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Conceptos Básicos

Movimiento Traslacional

Fuerza: La fuerza (F) puede definirse como la causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo sobre el que actúa. Con objeto de mover un cuerpo debe aplicarse una fuerza.

Existen las fuerzas de contacto y las fuerzas de campo.

Las unidades son el Newton ($N = \frac{kg.m}{s^2}$).

Conceptos Básicos

Masa: La masa (m) de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene, la cual se supone constante. Físicamente, la masa es la propiedad de un cuerpo que da su inercia; esto es, la resistencia a arrancar y parar. Un cuerpo es atraído por la Tierra y la magnitud de la fuerza que la Tierra ejerce sobre él se llama peso (w).

La masa se relaciona entonces con el peso según: $m = \dfrac{w}{g}$

Donde g es la constante de aceleración gravitacional: $g = 9.81\dfrac{m}{s^2}$

Las unidad de la masa es el kilogramo (kg)

Conceptos Básicos

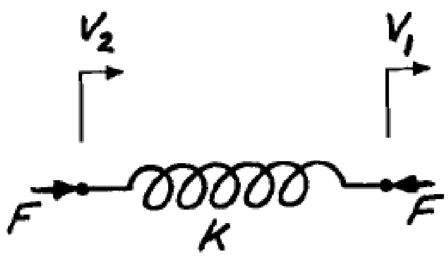
Movimiento: es un cambio físico que se define como todo cambio de posición en el espacio que experimentan los cuerpos de un sistema con respecto a ellos mismos o a otro cuerpo que se toma como referencia. Todo cuerpo en movimiento describe una trayectoria.

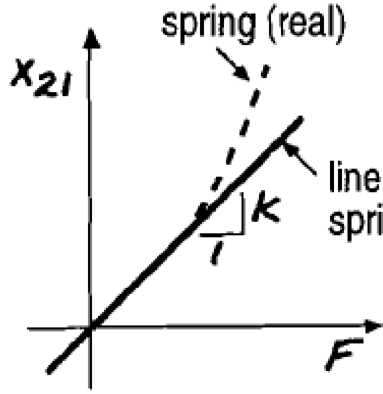
El movimiento es generalmente descrito en términos de velocidad (v), aceleración (a), desplazamiento (d) y tiempo (t).

Recordemos que la distancia, velocidad y aceleración están relacionadas entre sí por la derivación o integración respecto al tiempo.

Componentes Básicos

<u>Resorte</u>:





Cuando una fuerza (F) es aplicada al resorte este se deforma. Dentro del rango lineal, cuando esta fuerza es retirada, el resorte vuelve a su estado original.

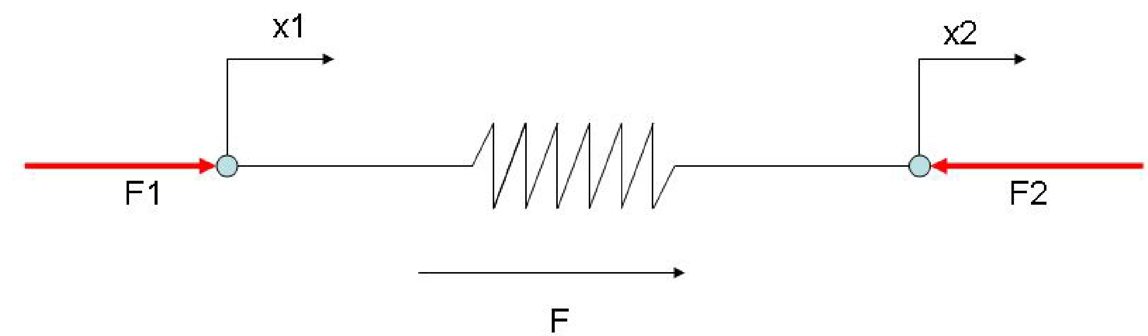
Se asume que este elemento no tiene masa.

Así un resorte ideal se describe a través de:

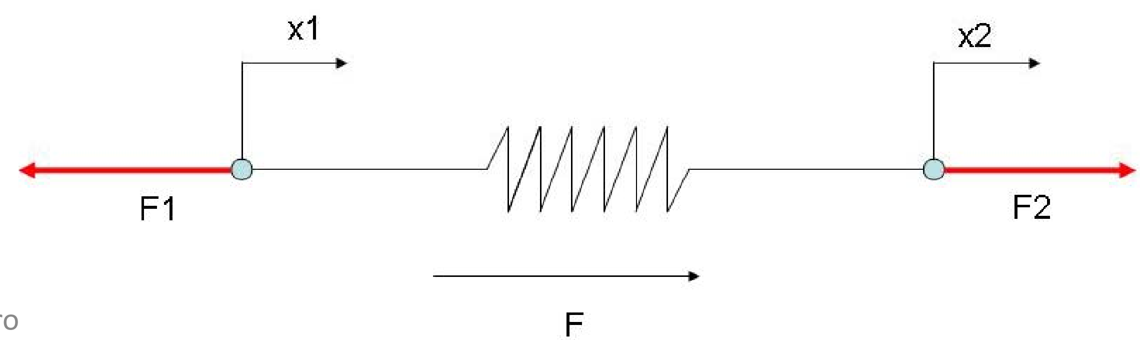
$$\boxed{F_k = k\,x(t) = k\,x_2(t) - k\,x_1(t) = k\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = k\,x_{21}(t)}$$

Componentes Básicos

Observe que: $|F_1| \neq |F_2|$ $\Longrightarrow$ $F_1 = k\,x_1(t)$, $F_2 = k\,x_2(t)$ $\Longrightarrow$ $F = F_1 - F_2$



$$F = k(x_1(t) - x_2(t))$$



$$F = k(x_2(t) - x_1(t))$$

Componentes Básicos

Las unidad de la constante del resorte (k), es: $k = \frac{F}{x(t)} = \frac{N}{m}$

k es la constante de elasticidad del resorte.

Se desea describir los elementos mecánicos en términos de la velocidad y la fuerza. Así:

$$F_k = k\,x(t)$$

$$\frac{dF_k}{dt} = k\,\frac{dx(t)}{dt} = k\,v(x)$$

Entonces:

$$v(t) = \frac{1}{k}\frac{dF_k}{dt}$$

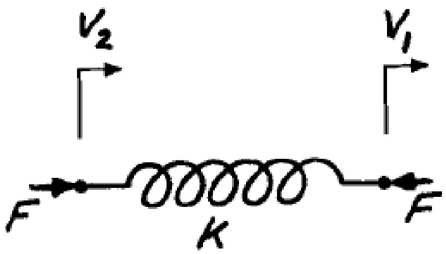
$$F_k = k\int v(t)\,dt = k\,x(t)$$

El resorte <u>acumula energía</u> en forma de energía potencial elástica.

Componentes Básicos

En resumen tenemos que:

$$F_k = k\,x(t) = k\,x_2(t) - k\,x_1(t) = k\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = k\,x_{21}(t)$$

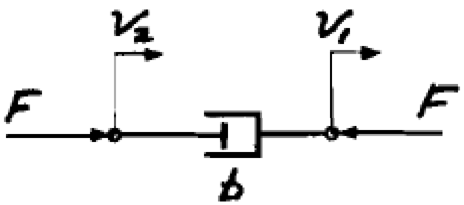


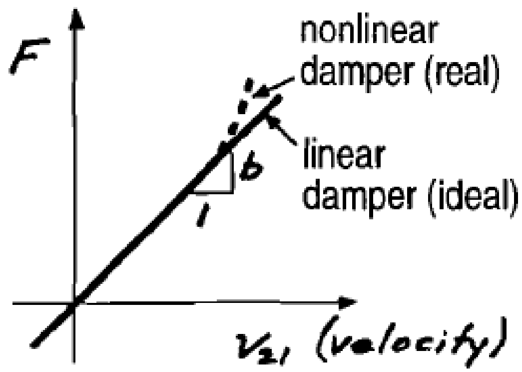
$$F_k = k\int v_{21}(t)\,dt$$

$$v(t) = v_{21}(t) = \frac{1}{k}\frac{dF_k}{dt}$$

Componentes Básicos

<u>Amortiguador</u>:





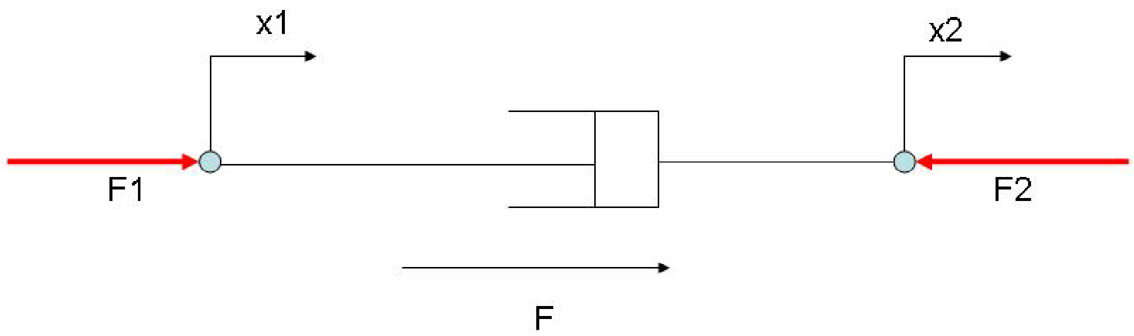
Se asume que este elemento no tiene masa.

Un amortiguador ideal se describe a través de:

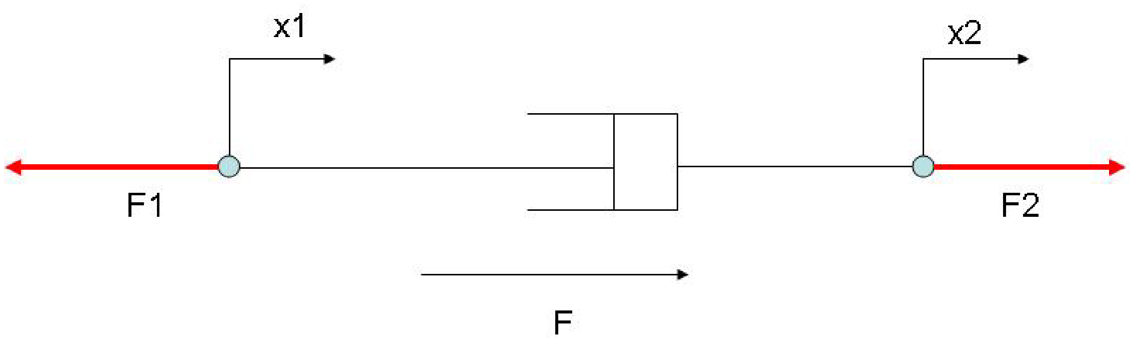
$$\boxed{F_b = b\,v(t) = b\big(v_2(t) - v_1(t)\big) = b\,v_{21}(t)}$$

Componentes Básicos

Observe que: $|F_1| \neq |F_2| \Longrightarrow$ $F_1 = b\,\dot{x}_1(t)$ $F_2 = b\,\dot{x}_2(t)$ $F = F_1 - F_2$



$$F = b(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t))$$



$$F = b(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))$$

Componentes Básicos

Las unidad de la constante del amortiguador (b), es: $b = \dfrac{N.s}{m}$

b es la constante de viscosidad del amortiguador.

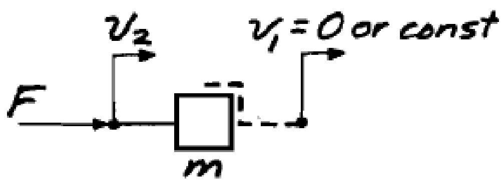
Se desea describir los elementos mecánicos en términos de la velocidad y la fuerza. Así:

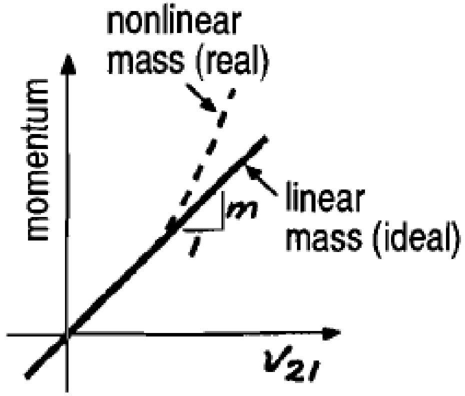
$$v(t) = \frac{1}{b} F_b$$

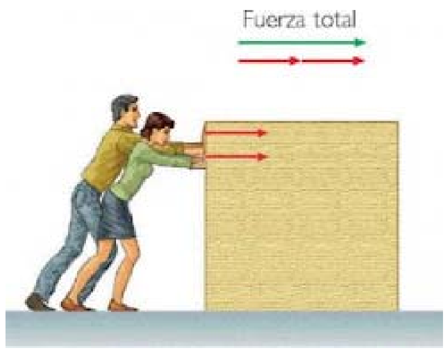
Los amortiguadores <u>disipan</u> energía en forma de calor.

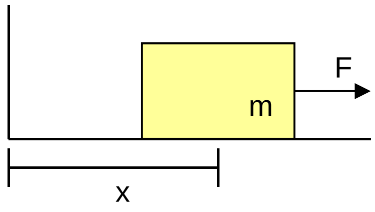
Componentes Básicos

Masa Traslacional: se asume que la masa esta concentrada en un punto, llamado centro de masa y que su movimiento es traslacional.









Leyes de Newton

Primera Ley: la cantidad de movimiento (momentum) total de un sistema mecánico es constante en ausencia de fuerzas externas.

Segunda Ley: la aceleración de cualquier cuerpo rígido es directamente proporcional a la fuerza que actúe sobre él e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

$$a(t) = \frac{F}{m}$$

Así:

$$\boxed{\sum F = m\,a(t)}$$

Tercera Ley: fuerza de acción y reacción. Toda acción se opone a una reacción de igual magnitud.

Leyes de Newton

Entonces tenemos que:

$$F = m\,a(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$o$$

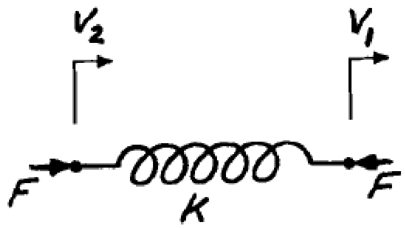
$$F = m\,a(t) = m\,\dot{v}(t) = m\,\ddot{x}(t)$$

Así,

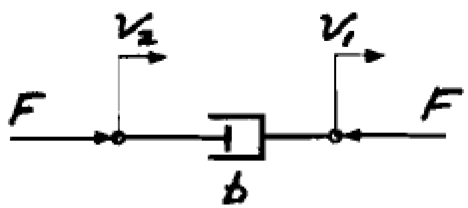
$$F = m\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{m}\int F\,dt$$

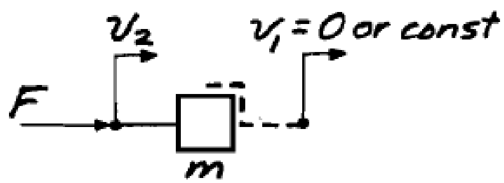
En Resumen



$$F_k = k\,x(t) = k\,x_{21}(t)$$



$$F_b = b\,v(t) = b\,\dot{x}_{21}(t)$$



$$F = m\frac{dv(t)}{dt} = m\,\ddot{x}(t)$$

Modelado de Sistemas Mecánicos

Variables y parámetros:

F Son las fuerzas aplicadas a la masa.

m Es la masa del cuerpo en movimiento.

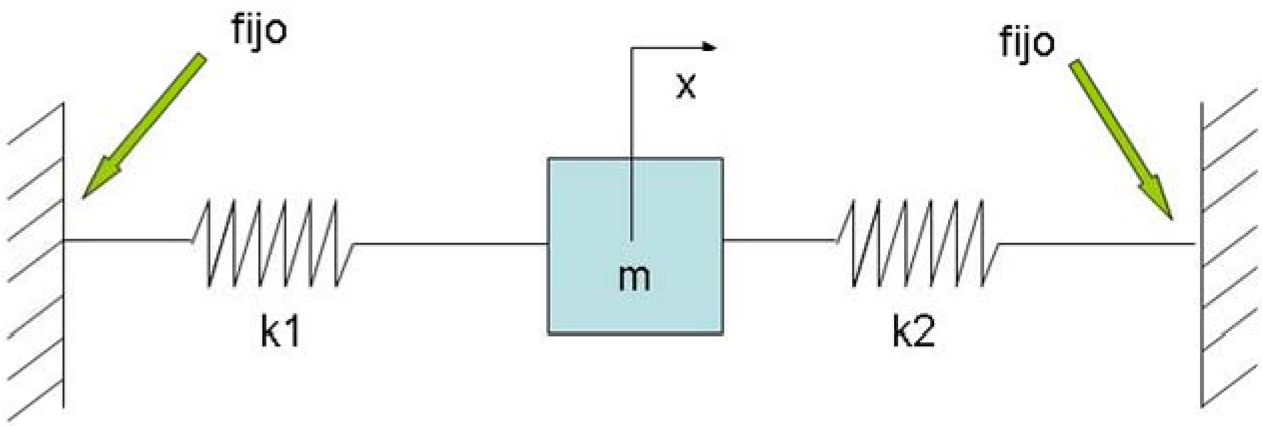
$x(t)$ Es el desplazamiento.

$v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\dot{x}(t)$ Es la velocidad.

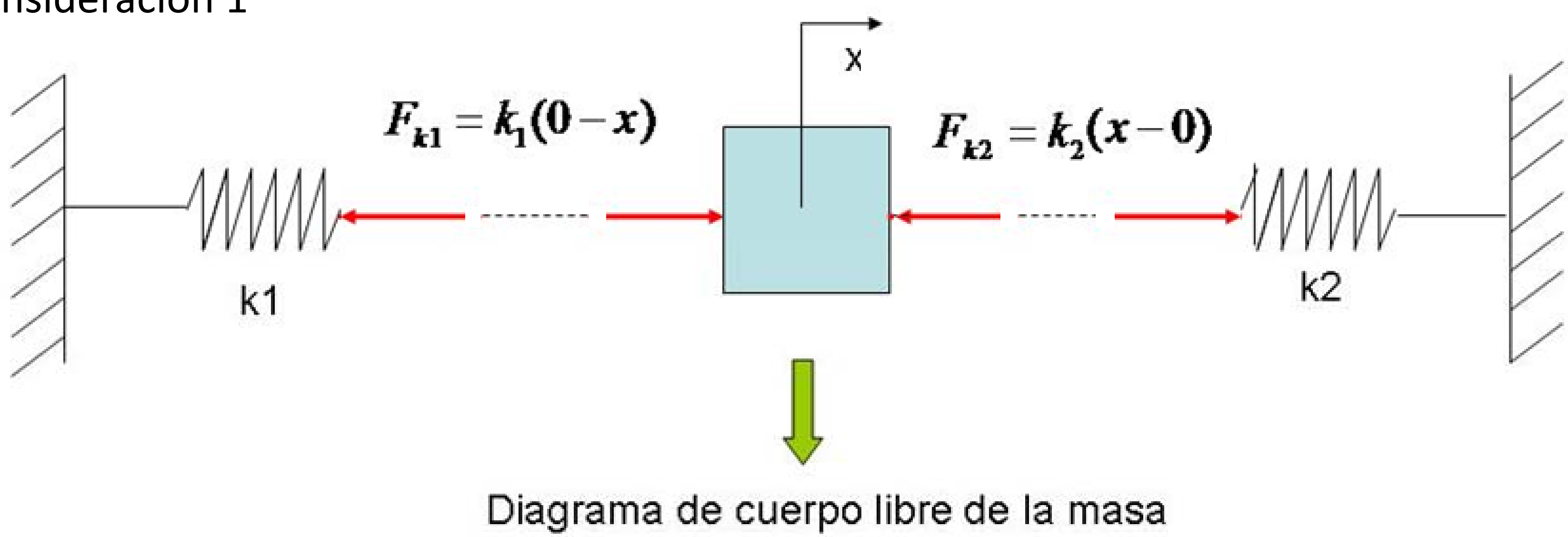
$a(t)=\dfrac{dv(t)}{dt}=\ddot{x}(t)$ Es la aceleración.

Variables del sistema

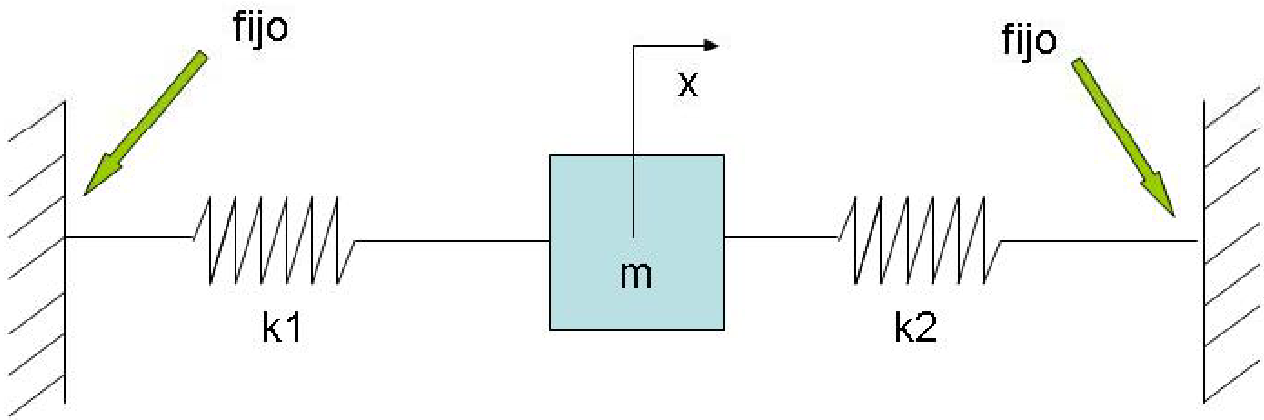
Continuidad de la Fuerza



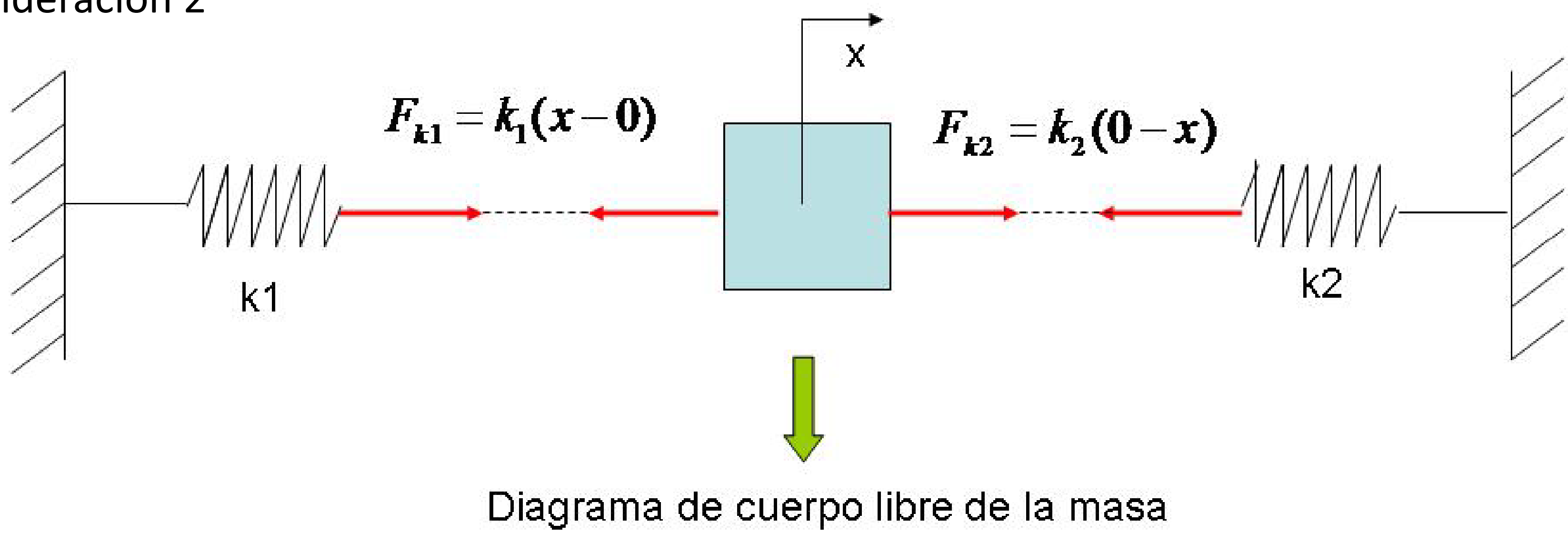
Consideración 1



Continuidad de la Fuerza

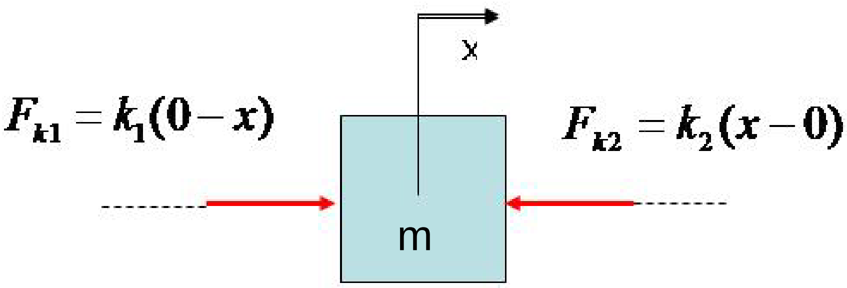


Consideración 2



Modelado de Sistemas Mecánicos

Consideración 1

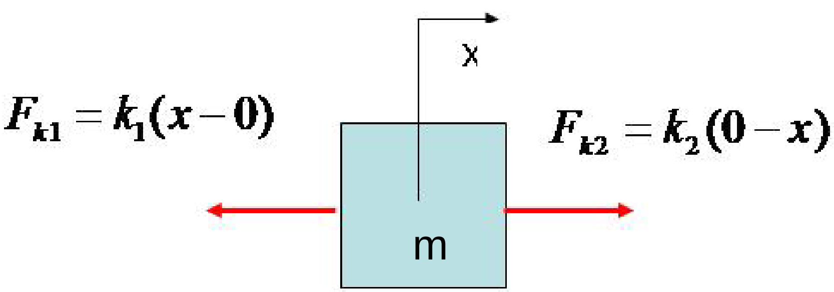


DCL 1

Segunda Ley de Newton:

$$F_{k1} - F_{k2} = ma$$
$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$
$$\boxed{m\ddot{x} + k_1 x + k_2 x = 0}$$

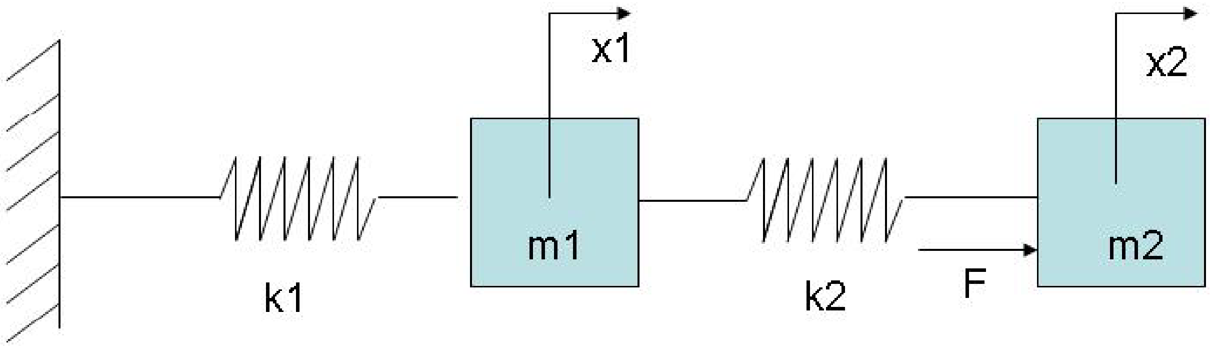
Consideración 2

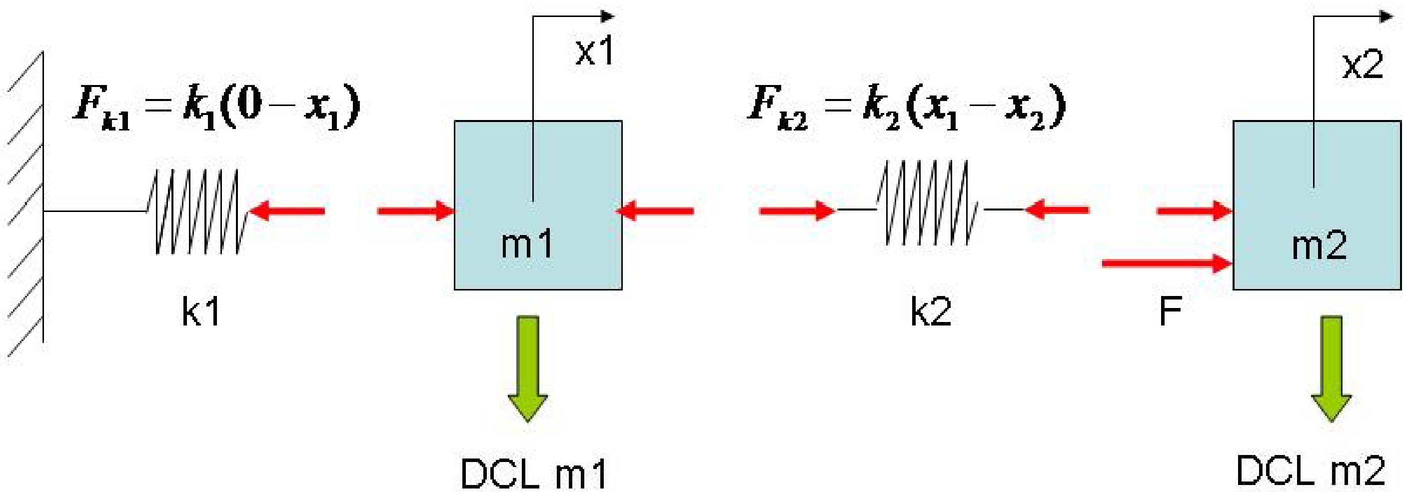


DCL 2

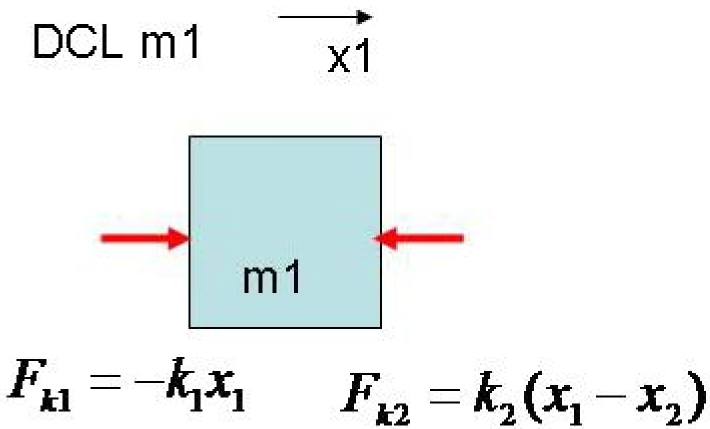
$$F_{k2} - F_{k1} = ma$$
$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$
$$\boxed{m\ddot{x} + k_1 x + k_2 x = 0}$$

Continuidad de la Fuerza





Modelado de Sistemas Mecánicos

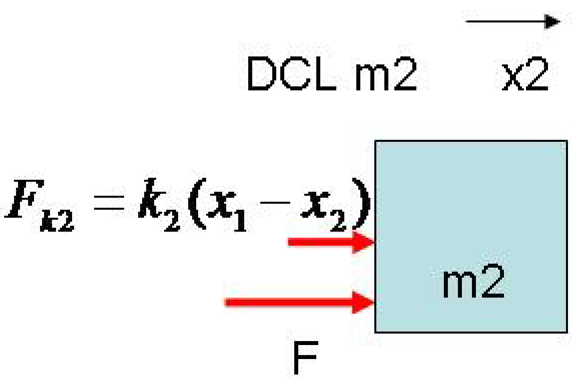


Ecuación de movimiento M1:

$$F_{k1} - F_{k2} = m_1 a_{m1}$$

$$-k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0} \qquad (1)$$



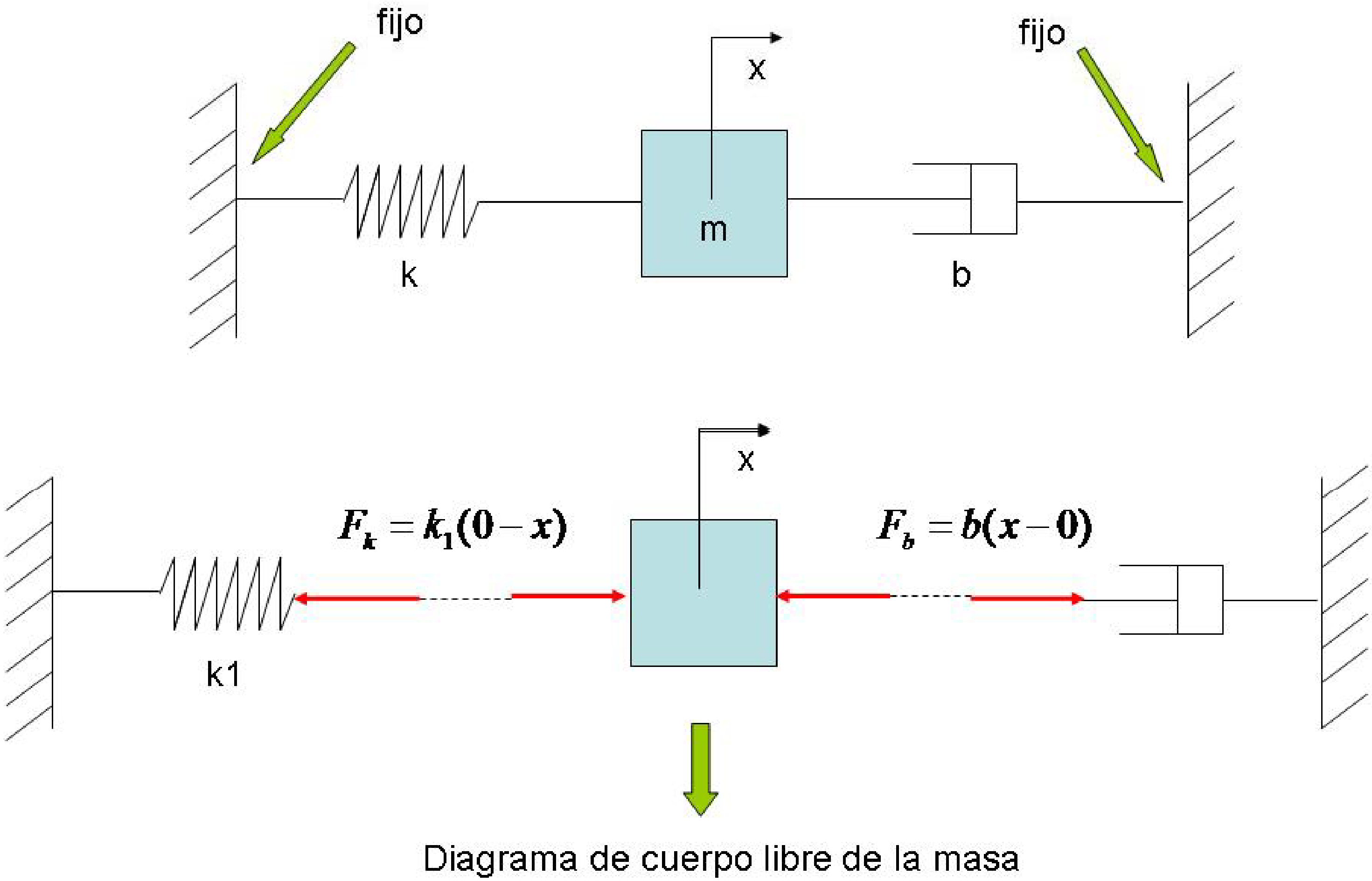
Ecuación de movimiento M2:

$$F_{k2} + F = m_2 a_{m2}$$

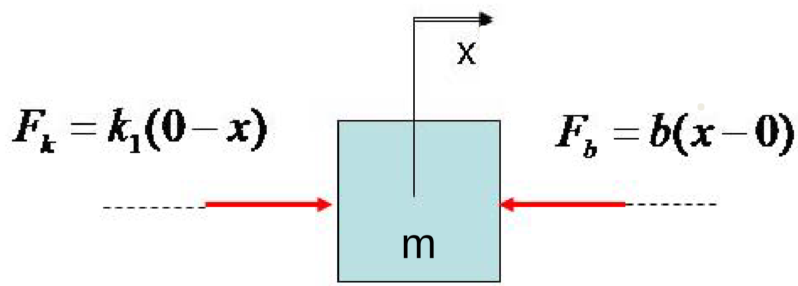
$$F + k_2(x_1 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 - k_1 x_1 + k_2 x_2 = F} \qquad (2)$$

Continuidad de la Fuerza



Modelado de Sistemas Mecánicos



Ecuación de movimiento:

$$F_k - F_b = ma$$

$$-k_1 x - bx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Modelado de Sistemas Físicos

Referencias del material usado para estas diapositivas:

•Material de las diapositivas de la Prof. Mariela Cerrada. Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

•Ogata, K. Dinámica de Sistemas, Prentice Hall, 1987.

•Lewis, J. Modelling Engineering Systems, High Text Publications, 1994.