

$$|G(j\omega)| = \frac{A \left| j\frac{\omega}{z_1} + 1 \right| \left| j\frac{\omega}{z_2} + 1 \right| \dots \left| j\frac{\omega}{z_m} + 1 \right|}{(j\omega)^r \left| j\frac{\omega}{p_1} + 1 \right| \left| j\frac{\omega}{p_2} + 1 \right| \dots \left| j\frac{\omega}{p_n} + 1 \right|} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G(j\omega)| \\ &= 20 \log A + 20 \log |j\omega/z_1 + 1| + 20 \log |j\omega/z_2 + 1| + \dots + 20 \log |j\omega/z_m + 1| \\ &\quad - 20r \log |j\omega| - 20 \log |j\omega/p_1 + 1| - \dots - 20 \log |j\omega/p_n + 1|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. Obtener la expresión del ángulo de fase Φ :

$$\begin{aligned} \Phi = \angle G(j\omega) &= \angle A + \angle(j\omega/z_1 + 1) + \angle(j\omega/z_2 + 1) + \dots + \angle(j\omega/z_m + 1) \\ &\quad - \angle(j\omega)^r - \angle(j\omega/p_1 + 1) - \angle(j\omega/p_2 + 1) - \dots - \angle(j\omega/p_n + 1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

5. Determinar las frecuencias de corte para cada uno de los términos de $G(s)$ de la expresión (3.3).
6. Evaluar las tendencias generales, para bajas y altas frecuencias, de la magnitud logarítmica y de la fase, usando las ecuaciones (3.7) y (3.8).
7. Trazar la aproximación asintótica en el diagrama de amplitud logarítmica, a través de las asíntotas calculadas para cada uno de los términos de $G(s)$.
8. Trazar la aproximación asintótica en el diagrama de fase, a través de las contribución angular calculada para cada uno de los términos de $G(s)$.

EJEMPLO 1: Construcción del diagrama de Bode de un sistema de tercer orden. Estabilidad relativa.

Construir el diagrama de Bode aproximado del sistema descrito por la función de transferencia (3.1.1). Calcular los márgenes de ganancia y de fase, y analizar cómo cambian los mismos al variar la ganancia k . La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s-1)}. \quad (3.1.1)$$

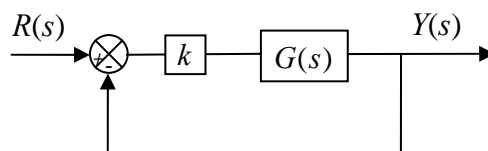


Figura 3.1.1 Diagrama de un sistema realimentado unitariamente (Ejemplo 1)

Solución Ejemplo 1

La función de transferencia en cadena abierta del sistema de la Fig. 3.1.1 es:

$$G_{la}(s) = k G(s). \quad (3.1.2)$$

Considérese, en primer lugar, que $k = 1$, lo que significa que $G_{la}(s) = G(s)$. La construcción del diagrama de Bode se describe en el siguiente apartado.

i. Construcción del Diagrama de Bode

Para realizar el diagrama de Bode de magnitud y fase de $G_{la}(s)$ es necesario comenzar por normalizar la función de transferencia en lazo abierto:

$$G_{la}(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s-1)} = \frac{0,5(s+1)}{s(1-0,5s)(1-s)}. \quad (3.1.3)$$

Ahora, en (3.1.3) se sustituye s por $j\omega$:

$$G_{la}(j\omega) = \frac{0,5(1+j\omega)}{j\omega(1-j0,5\omega)(1-j\omega)}. \quad (3.1.4)$$

La magnitud de $G_{la}(j\omega)$ está dada por:

$$|G_{la}(j\omega)| = \frac{0,5\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{0,5}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}}. \quad (3.1.5)$$

La amplitud logarítmica es:

$$|G_{la}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G_{la}(j\omega)| = 20 \log(0,5) - 20 \log(\omega) - 10 \log(1+0,25\omega^2). \quad (3.1.6)$$

La expresión de la fase se determina considerando la contribución en fase de cada término que compone la función de transferencia:

El número real positivo 0,5 aporta 0°

El término $s+1$ aporta una fase dada por $\tan^{-1}(\omega)$

El polo simple en el origen $\frac{1}{s}$ aporta -90°

El término $\frac{1}{1-s}$ aporta una fase dada por $-\tan^{-1}(-\omega/1) = +\tan^{-1}(\omega)$

El término $\frac{1}{1-0,5s}$ aporta una fase dada por $-\tan^{-1}(-0,5\omega/1) = +\tan^{-1}(0,5\omega)$.

Por consiguiente, la fase es:

$$\Phi = 0^\circ + \tan^{-1}(\omega) - 90^\circ + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) = -90^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega). \quad (3.1.7)$$

Las frecuencias de corte para cada uno de los términos de $G(s)$ son:

Para un cero simple en $s = -1$: $\omega_{\text{corte}} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$;

Para un polo simple en $s = +1$: $\omega_{\text{corte}} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$;

Para un polo simple en $s = +2$: $\omega_{\text{corte}} = 2 \text{ rad.s}^{-1}$.

Las tendencias de la magnitud y de la fase para bajas y altas frecuencias son:

En bajas frecuencias, $\omega = 0$, $20 \log |G_{la}(j\omega)| \rightarrow +\infty$, $\Phi = -90^\circ$.

En altas frecuencias, $\omega \rightarrow +\infty$, $20 \log |G_{la}(j\omega)| \rightarrow -\infty$, $\Phi = 180^\circ$.

Trazado de las asíntotas del diagrama de magnitud

Para hacer el trazado de las asíntotas del diagrama de magnitud, el procedimiento se lleva a cabo haciendo una tabla resumen donde se representa la contribución en pendiente de cada uno de los términos de $G(s)$, dependiendo de los intervalos de frecuencias evaluados, delimitados por las frecuencias de corte, para finalmente obtener la contribución total de todos los términos de la función de transferencia para $\omega \in (0, +\infty)$ (véase la Tabla 3.1.1). La contribución total es dibujada en una gráfica semilogarítmica, dando como resultado el diagrama de magnitud de la Fig. 3.1.2.

Dado que no se parte de una asíntota horizontal (con pendiente 0 dB/década) es necesario calcular, para algún valor de frecuencia ω , el correspondiente valor de magnitud logarítmica que sirva de referencia en el eje de las ordenadas. Por ejemplo, para $\omega = 1$ se tiene:

$$20 \log |G(j\omega = 1)| = 20 \log(0,5) - 20 \log(1) - 10 \log(1 + 0,25 \times 1^2) = -6,99 \text{ dB}.$$

Este resultado es indicado en el diagrama de magnitud de la Fig. 3.1.2. Obsérvese que la aproximación asíntótica, en línea continua, es bastante cercana a la curva real, obtenida por simulación en Matlab®, trazada en línea discontinua, por lo que la primera puede ser considerada una representación apropiada de esta última.

Tabla 3.1.1 Contribución en pendiente de los términos de $G(s)$ para la construcción del Diagrama de Magnitud de Bode (Ejemplo 1)

| Términos de $G(s)$ | Intervalo de frecuencias ω (en rad.s^{-1}) | | |
|------------------------------------|---|----------------------------|--------------|
| | $0 < \omega \leq 1$ | $1 < \omega \leq \sqrt{2}$ | $\omega > 2$ |
| $\frac{1}{s}$ | -20 | -20 | -20 |
| $s + 1$ | 0 | 20 | 20 |
| $\frac{1}{1 - s}$ | 0 | -20 | -20 |
| $\frac{1}{1 - 0,5s}$ | 0 | 0 | -20 |
| Pendiente total por década: | -20 | -20 | -40 |

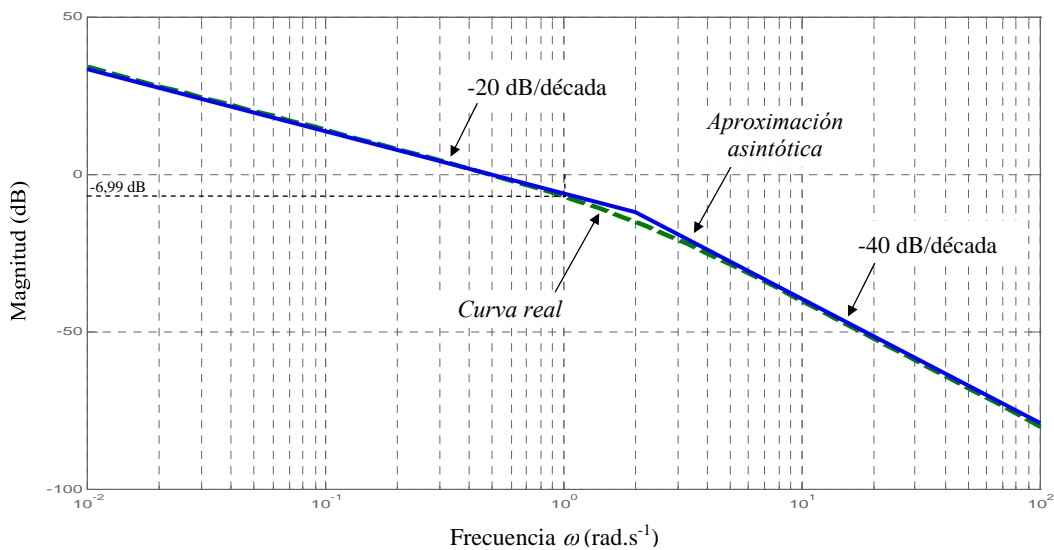


Figura 3.1.2 Diagrama de magnitud del Ejemplo 1

El comando para obtener el diagrama de Bode en Matlab® es:

```
bode(0.5*[1 1],conv([-0.5 1 0],[-1 1])); grid
```

y, sobre la figura obtenida, se puede seleccionar indistintamente si se desea solo el diagrama de magnitud, el de fase o ambos. Para obtener solamente el diagrama de magnitud se puede ejecutar:

```
sys=tf(0.5*[1 1],conv([-0.5 1 0],[-1 1]));
```

```
bodemag(sys)
```

y se grafica automáticamente la curva de la amplitud logarítmica.

Trazado de las asíntotas del diagrama de fase (primer método)

Para hacer el trazado de las asíntotas del diagrama de fase, un primer procedimiento consiste en hacer una tabla donde se calcula la contribución en pendiente de cada uno de los términos de $G(s)$, para un conjunto de intervalos de frecuencia, y finalmente obtener la contribución total de todos los términos de la función de transferencia para $\omega \in (0, +\infty)$.

Para calcular el aporte en la pendiente de la fase para los términos de primer orden, se consideran cambios de $+45^\circ$ ó -45° por década. El signo dependerá de la ubicación del cero o polo simple estudiado en el plano s (si es un cero en el semiplano izquierdo, el aporte es de $+45^\circ$ /década; si es un cero en el semiplano derecho, el aporte es de -45° /década; si es un polo en el semiplano izquierdo, el aporte es de -45° /década; si es un polo en el semiplano derecho, el aporte es de $+45^\circ$ /década). Para los términos de segundo orden (ceros o polos complejos conjugados) el cambio es de $+90^\circ$ ó -90° por década, dado que se trata de un par de raíces; el signo de esta contribución angular dependerá nuevamente de la ubicación de los ceros o polos complejos conjugados en el plano s , de manera análoga a la explicada para los términos de primer orden.

Los intervalos de frecuencia para la evaluación de los aportes de fase son obtenidos al considerar un valor de frecuencia a una década por debajo y a una década por arriba de cada frecuencia de corte del sistema. Esto es:

Para $\omega_{\text{corte}} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$: los valores de frecuencia son 0,1 y 10 rad.s^{-1} ;

Para $\omega_{\text{corte}} = 2 \text{ rad.s}^{-1}$: los valores de frecuencia son 0,2 y 20 rad.s^{-1} .

En la tabla 3.1.2 se ordenan los intervalos de frecuencias en forma ascendente y se hace el aporte en fase de cada término, pero solamente para el intervalo comprendido entre una década antes hasta una década después de su respectiva frecuencia de corte. Fuera de este intervalo, el aporte de un término se considera nulo. La contribución total se dibuja en una gráfica semilogarítmica, dando como resultado el diagrama de fase de la Fig. 3.1.3. La curva comienza con pendiente nula en -90° (que equivale a -450° , al trasladarla en -360°) y termina con pendiente nula en 180° (equivalentes a -180° , al trasladarla en -360°).

La Fig. 3.1.3 muestra los diagramas de fase real, en trazo discontinuo, y aproximado, en trazo continuo; aunque presentan entre sí mayores diferencias en comparación con los resultados del diagrama de magnitud, esta aproximación suele considerarse muy satisfactoria.

NOTA:

En general, este primer método propuesto para la obtención de un Diagrama de Bode genera aproximaciones suficientemente buenas. Claramente, a medida que la función de transferencia

estudiada sea más complicada, el cálculo de asíntotas –en particular para el diagrama de fase– será más tedioso y podrá presentar algunas diferencias notorias.

Tabla 3.1.2 Contribución en pendiente de los términos de $G(s)$ para la construcción del Diagrama de Fase de Bode del Ejemplo 1 (primer método)

| Términos de $G(s)$ | Intervalo de frecuencias ω (en rad.s^{-1}) | | | | |
|------------------------------------|---|------------|-------------|------------|-----------------|
| | (0;0,1] | (0,1;0,2] | (0,2;10] | (10;20] | (20; ∞) |
| $\frac{1}{s}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s+1$ | 0 | +45 | +45 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{1-s}$ | 0 | +45 | +45 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{1-0,5s}$ | 0 | 0 | +45 | +45 | 0 |
| Pendiente total por década: | 0 | +90 | +135 | +45 | 0 |

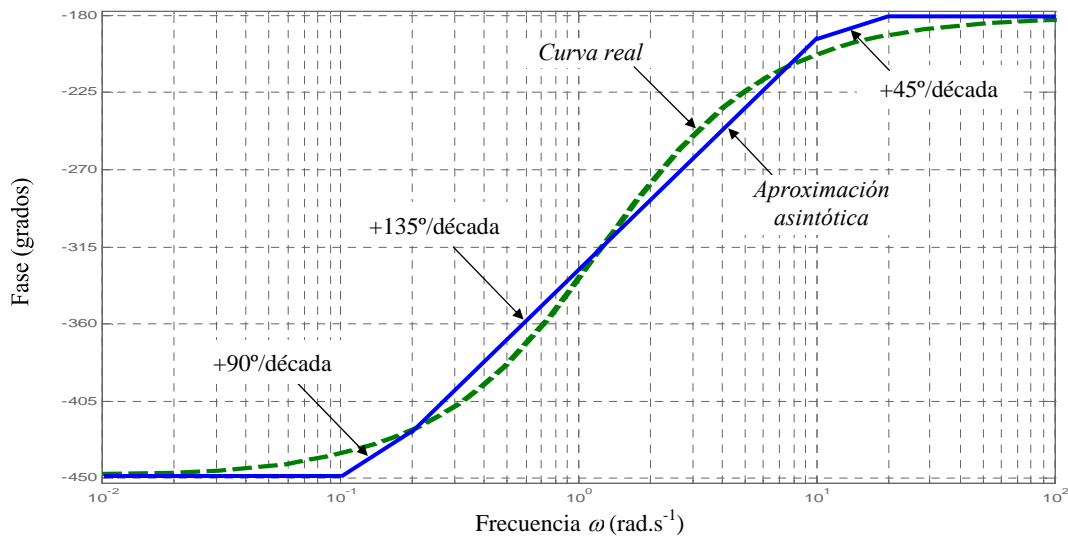


Figura 3.1.3 Diagrama de fase del Ejemplo 1 (primer método)

Trazado de las asíntotas del diagrama de fase (segundo método)

El segundo procedimiento que se propone para trazar rápidamente las asíntotas de un diagrama de fase es diferente al anterior y muy simple de aplicar. En primer lugar, se calcula la

contribución en fase de cada término de la función de transferencia a partir de las frecuencias de corte. Para cada término, la contribución angular del mismo antes del corte es nula y después del corte aporta el máximo valor que le corresponde: ya sea $+90^\circ$ ó -90° , para términos de primer orden, ya sea $+180^\circ$ ó -180° para términos de segundo orden. Las asíntotas siempre son rectas horizontales que forman escalones, a diferencia del método anterior en el que las asíntotas son rectas con pendiente unidas entre sí. Estas asíntotas recogen la curva aproximada del sistema, pues representan el mínimo o máximo valor de fase posible. Justamente, el hecho de trazar asíntotas escalonadas y constantes, por intervalos de frecuencias, le confiere al método una simplicidad sin igual, aunque podría presentar diferencias notorias con la curva real.

El segundo paso es el trazado de una curva aproximada de la fase; para ello suele tomarse como regla hacer pasar dicha curva por las distancias medias entre cada par de asíntotas consecutivas y, luego, trazar la curva haciéndola partir de la asíntota para bajas frecuencias hasta hacerla llegar a la asíntota de altas frecuencias, ambas calculadas previamente.

Otro dato para mejorar el dibujo de la curva aproximada es que la misma debe empalmarse con la asíntota horizontal de bajas frecuencias durante la década antes de la frecuencia de corte más baja, y no fuera de este intervalo; también debe empalmarse con la asíntota horizontal de altas frecuencias durante la década posterior a la frecuencia de corte más alta, y no fuera de este intervalo; de esta manera la curva resultante representará una aproximación suficientemente buena de la curva real de la fase.

En la tabla 3.1.3 se muestra el cálculo de los aportes en fase para cada término del Ejemplo 1, así como la contribución total en fase la cual indica el valor de la asíntota para cada intervalo analizado de frecuencias. Los valores correspondientes a la distancia media entre cada par de asíntotas horizontales (justo en las frecuencias de corte) son:

$$\omega = 1: \quad \Phi = (-90^\circ + 90^\circ) / 2 = 0^\circ;$$

$$\omega = 2: \quad \Phi = (90^\circ + 180^\circ) / 2 = 135^\circ.$$

En la Fig. 3.1.4 se observan las asíntotas horizontales en trazo continuo, la curva real en trazo discontinuo, y la curva aproximada en línea punteada. Obsérvese que la curva aproximada pasa por los valores medios de fase calculados en el párrafo anterior, para las frecuencias $\omega = 1$ y $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$. Aunque hay diferencias entre la curva aproximada y la curva real, las tendencias generales se reflejan en el diagrama obtenido.

Tabla 3.1.3 Contribución angular de los términos de $G(s)$ para la construcción del Diagrama de Fase de Bode del Ejemplo 1 (segundo método)

| Términos de $G(s)$ | Intervalo de frecuencias ω (en rad.s^{-1}) | | |
|----------------------|---|---------------------|--------------|
| | $0 < \omega \leq 1$ | $1 < \omega \leq 2$ | $\omega > 2$ |
| $\frac{1}{s}$ | -90 | -90 | -90 |
| $s + 1$ | 0 | +90 | +90 |
| $\frac{1}{1 - s}$ | 0 | +90 | +90 |
| $\frac{1}{1 - 0,5s}$ | 0 | 0 | +90 |
| Fase total: | -90 | +90 | +180 |

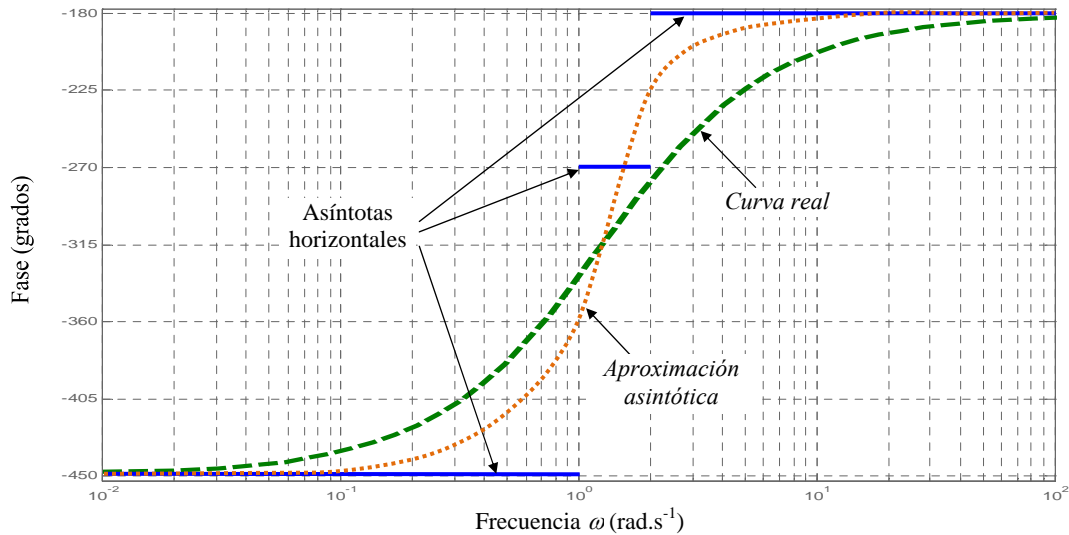


Figura 3.1.4 Diagrama de fase del Ejemplo 1 (segundo método)

ii. Márgenes de ganancia y de fase

Para calcular el margen de ganancia se procede a buscar el valor de la frecuencia para la cual $\Phi = 180^\circ$. Según lo observado en la Fig. 3.1.4, las curvas de fase alcanzan los 180° solo cuando $\omega \rightarrow +\infty$. (Recuérdese que Matlab ha trazado el diagrama de fase de la Fig. 3.1.4 desfasado en -360° , por lo que el valor de la ordenada -180° corresponde realmente a 180° y el valor de la ordenada -450° corresponde a -90° .) Lo anterior significa que en la expresión (3.1.7) se hace:

$$180^\circ = -90^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega)$$

$$270^\circ = 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \rightarrow \text{solo si } \omega \rightarrow +\infty!$$

El margen de ganancia se obtiene haciendo el siguiente cálculo:

$$\text{MG} = -20 \log(|G_{la}(j\omega)|_{\omega \rightarrow +\infty}) \rightarrow +\infty.$$

Para calcular el margen de fase se busca el valor de frecuencia para el cual la curva de amplitud logarítmica interseca el eje de 0 dB. En la Fig. 3.1.2 se observa que esta frecuencia está comprendida entre 0,4 y 0,5 rad.s⁻¹. Analíticamente, se busca la frecuencia en la que $|G_{la}(j\omega)| = 1$, esto es:

$$\frac{0,5}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}} = 1 \rightarrow \omega = 0,486 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Al sustituir en la expresión del ángulo de fase este valor de frecuencia se tiene:

$$\Phi = -90^\circ + 2 \tan^{-1}(0,486) + \tan^{-1}(0,5 \times 0,486) = -24,50^\circ.$$

Finalmente, el margen de fase es:

$$\text{MF} = 180^\circ + \Phi = 180^\circ - 24,50^\circ = 155,5^\circ.$$

En la Fig. 3.1.5 se indican los márgenes de ganancia y de fase calculados. El diagrama mostrado se obtiene ejecutando en Matlab el comando:

```
margin(0.5*[1 1],conv([-0.5 1 0],[-1 1]))
```

el cual dibuja a la vez los diagramas de magnitud y fase y señala en el diagrama los márgenes de ganancia y de fase.

Dado que estos valores se pueden calcular analíticamente, se puede ejecutar la siguiente secuencia de comandos en Matlab sin necesidad de apoyarse en ningún diagrama frecuencial:

```
sys=tf(0.5*[1 1],conv([-0.5 1 0],[-1 1]))
```

```
allmargin(sys)
```

obteniéndose la información solicitada:

```
GMFrequency: Inf
GainMargin: Inf
PMFrequency: 0.4858
PhaseMargin: 155.4775
DMFrequency: 0.4858
```

```
DelayMargin: 5.5855
Stable: 0
```

donde `GainMargin` y `PhaseMargin` son los márgenes de ganancia y fase calculados, respectivamente, `GMFrequency` es la frecuencia para la cual se calculó el margen de ganancia (o frecuencia de cruce de fase), `PMFrequency` es la frecuencia para la cual se calculó el margen de fase (o frecuencia de cruce de ganancia), y la condición `Stable:0` indica que el sistema no es estable en lazo cerrado. Cuando se obtiene `Stable:1` el sistema es estable en lazo cerrado.

La Fig. 3.1.5 ha sido obtenida con un valor de ganancia $k = 1$. Para cualquier valor positivo de la ganancia k , la expresión de la amplitud logarítmica es:

$$|G_{la}(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G_{la}(j\omega)| = 20 \log(k) + 20 \log(0,5) - 20 \log(\omega) - 10 \log(1 + 0,25\omega^2) \quad (3.1.8)$$

mientras que la fase sigue expresándose por (1.7). Un valor de $k > 1$ agrega a la amplitud una cantidad positiva, en decibeles, trasladando toda la curva de la amplitud hacia arriba. Un valor de ganancia $0 < k < 1$ agrega a la amplitud una cantidad negativa, en decibeles, haciendo desplazar toda la curva de la amplitud hacia abajo.

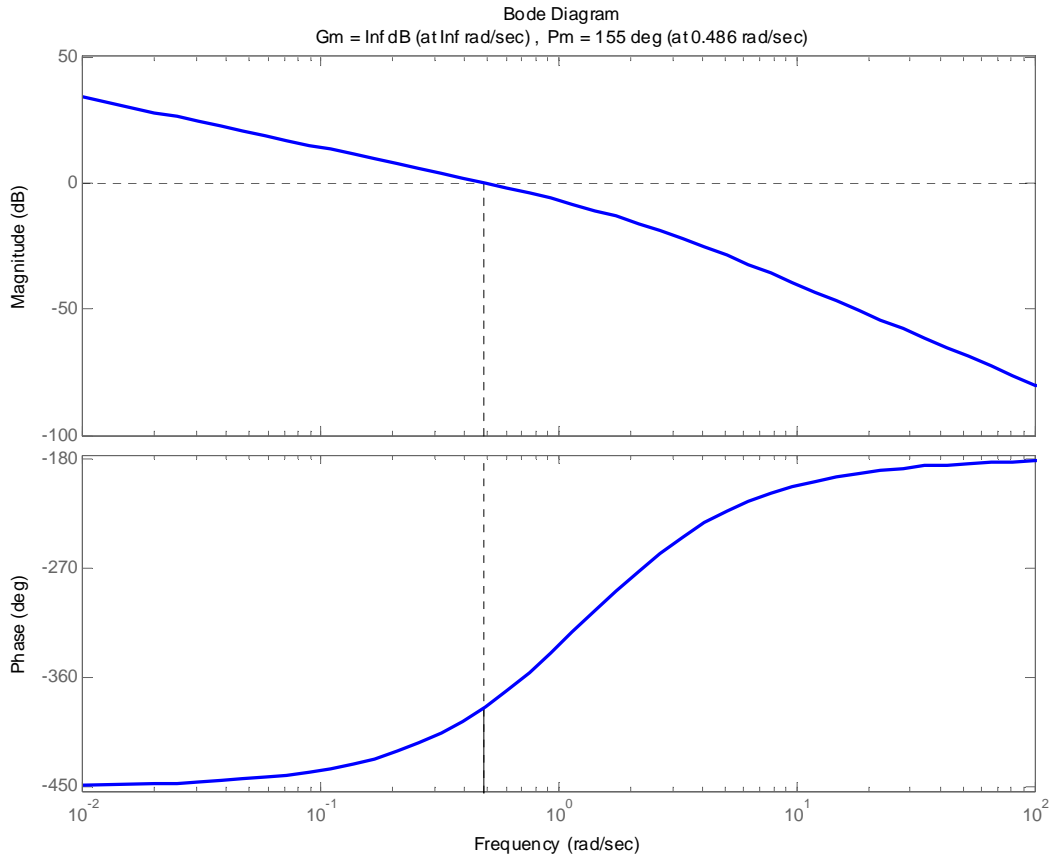


Figura 3.1.5 Márgenes de ganancia y de fase del Ejemplo 1 ($k=1$)

Ahora bien, el margen de ganancia será siempre infinito, dado que no hay frecuencia finita para la cual la curva de la fase cruce el eje de 180° (indicado en la Fig. 3.1.5 en el valor de -180°). El margen de fase aumenta a medida que k aumenta, $k > 1$, puesto que la curva de la magnitud se desplaza hacia arriba y la frecuencia de ganancia unitaria se desplaza a la derecha. Si k disminuye, $0 < k < 1$, el margen de fase disminuye hasta tender a 90° , ya que la curva de amplitud se desplaza hacia abajo y la frecuencia de ganancia unitaria se desplaza hacia la izquierda.

Si la ganancia es negativa, el diagrama de Bode no cambia su forma. Es más, la curva de la magnitud no cambia en absoluto; para ello, compare las expresiones (3.1.8), cuando $k > 0$, y (3.1.9), cuando $k < 0$. La curva de fase no cambia su forma pero está trasladada en 180° debido al aporte adicional del número real negativo, como se observa en las ecuaciones (3.1.10) ó (3.1.11). La expresión de la magnitud, para cualquier valor de k negativo, es:

$$|G_{la}(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G_{la}(j\omega)| = 20 \log |k| + 20 \log(0,5) - 20 \log(\omega) - 10 \log(1 + 0,25\omega^2) \quad (3.1.9)$$

y la expresión de la fase es:

$$\Phi = -180^\circ + \tan^{-1}(\omega) - 90^\circ + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) = -270^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \quad (3.1.10)$$

si se mide la contribución angular del número real negativo en sentido horario, o se expresa por:

$$\Phi = 180^\circ + \tan^{-1}(\omega) - 90^\circ + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) = 90^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \quad (3.1.11)$$

si dicha contribución es medida en sentido antihorario.

Las tendencias de la nueva curva de fase para bajas y altas frecuencias, empleando la expresión (3.1.10), son:

En bajas frecuencias, $\omega = 0$, $\Phi = -270^\circ$.

En altas frecuencias, $\omega \rightarrow +\infty$, $\Phi = 0^\circ$.

Para $k = -1$ se calculan los márgenes de ganancia y de fase. Para calcular el margen de ganancia se procede a buscar el valor de la frecuencia para la cual $\Phi = 180^\circ$ (medido en sentido antihorario). Lo anterior significa que en la expresión (3.1.11) se hace:

$$180^\circ = 90^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega)$$

$$90^\circ = 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \rightarrow \text{cuando } \omega = 0,707 \text{ rad.s}^{-1}.$$

También se puede buscar el valor de la frecuencia para el margen de ganancia haciendo $\Phi = -180^\circ$ (medido en sentido horario). Lo anterior significa que en la expresión (3.1.10) se hace:

$$-180^\circ = -270^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega)$$

$$90^\circ = 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \rightarrow \text{cuando } \omega = 0,707 \text{ rad.s}^{-1},$$

resultado idéntico al calculado en el párrafo previo.

El margen de ganancia se obtiene ahora haciendo el siguiente cálculo:

$$MG = -20 \log(|G_{la}(j\omega = 0,707)|) = -20 \log(0,666) = 3,52 \text{ dB.}$$

Para hallar el margen de fase se busca el valor de frecuencia para el cual $|G_{la}(j\omega)| = 1$, esto es:

$$\frac{0,5}{\omega \sqrt{1 + 0,25\omega^2}} = 1 \rightarrow \omega = 0,486 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Al sustituir en la expresión del ángulo de fase (3.1.10) este valor de frecuencia se tiene:

$$\Phi = -270^\circ + 2 \tan^{-1}(0,486) + \tan^{-1}(0,5 \times 0,486) = -204,5^\circ.$$

Si se utiliza la expresión del ángulo de fase (3.1.11), midiendo los ángulos en sentido antihorario, el valor de frecuencia que se obtiene es:

$$\Phi = 90^\circ + 2 \tan^{-1}(0,486) + \tan^{-1}(0,5 \times 0,486) = 155,50^\circ$$

que equivale a $-204,5^\circ$ medidos en sentido horario.

Finalmente, el margen de fase es:

$$MF = 180^\circ + \Phi = 180^\circ - 204,5^\circ = -24,5^\circ.$$

En la Fig. 3.1.6 se muestra el diagrama de Bode y los márgenes de ganancia y de fase para $k = -1$. Los resultados arrojados por Matlab con la secuencia de comandos:

```
sys=tf(-1*0.5*[1 1],conv([-0.5 1 0],[-1 1]))
allmargin(sys)
```

son:

```
GMFrequency: 0.7071
GainMargin: 1.5000
PMFrequency: 0.4858
PhaseMargin: -24.5225
DMFrequency: 0.4858
DelayMargin: 12.0519
Stable: 0
```

los cuales coinciden con los mostrados en el diagrama de la Fig. 3.1.6. Nótese que el valor:

GainMargin: 1.5000

es la medida del margen de ganancia adimensional, $|G_{la}(j\omega = 0,707)|^{-1}$, equivalente al valor de margen de ganancia ya calculado en dB. Esto es:

$$MG = 20 \log \left(\frac{1}{|G_{la}(j\omega = 0,707)|} \right) = 20 \log \left(\frac{1}{0,666} \right) = 20 \log(1,50) = 3,52 \text{ dB.}$$

Si la ganancia aumenta en magnitud, $|k| > 1$, la curva de la amplitud se desplaza hacia arriba. Por consiguiente, el margen de fase mejora significativamente pero el margen de ganancia empeora. Si la ganancia disminuye en magnitud, $0 < |k| < 1$, el margen de ganancia mejora pero es entonces el margen de fase el que se ve desmejorado.

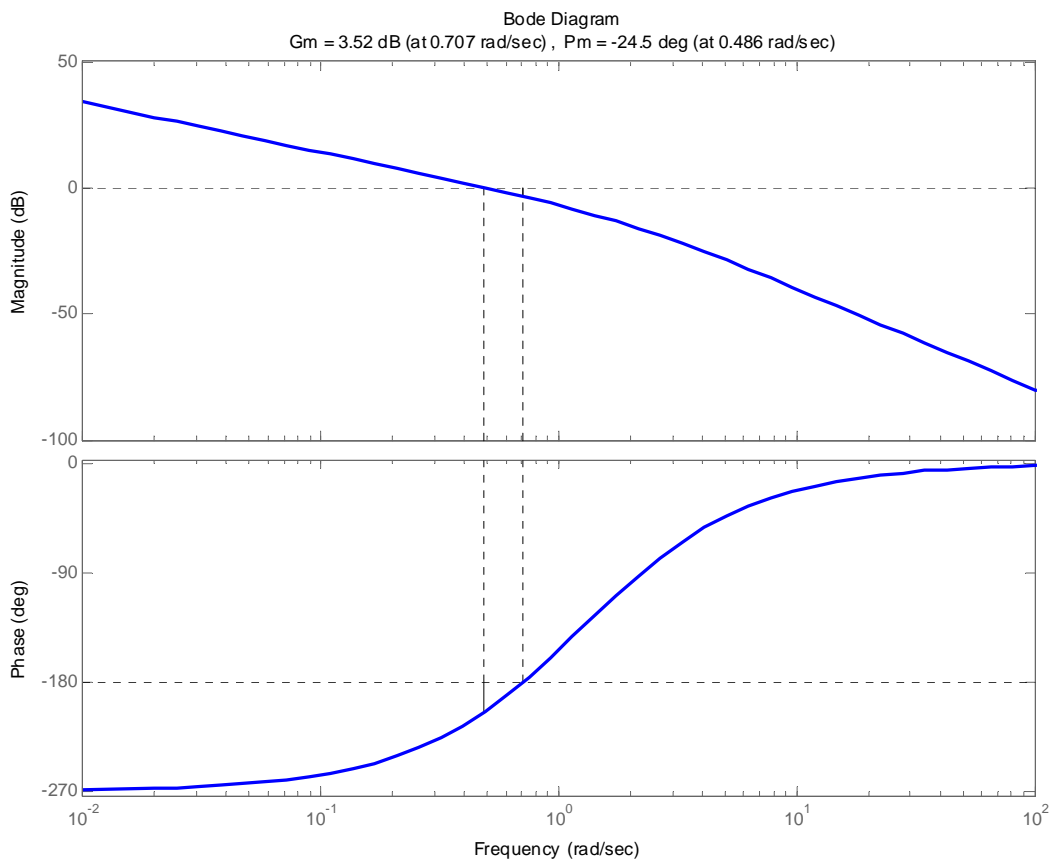


Figura 3.1.6 Márgenes de ganancia y de fase del Ejemplo 1 ($k=-1$)