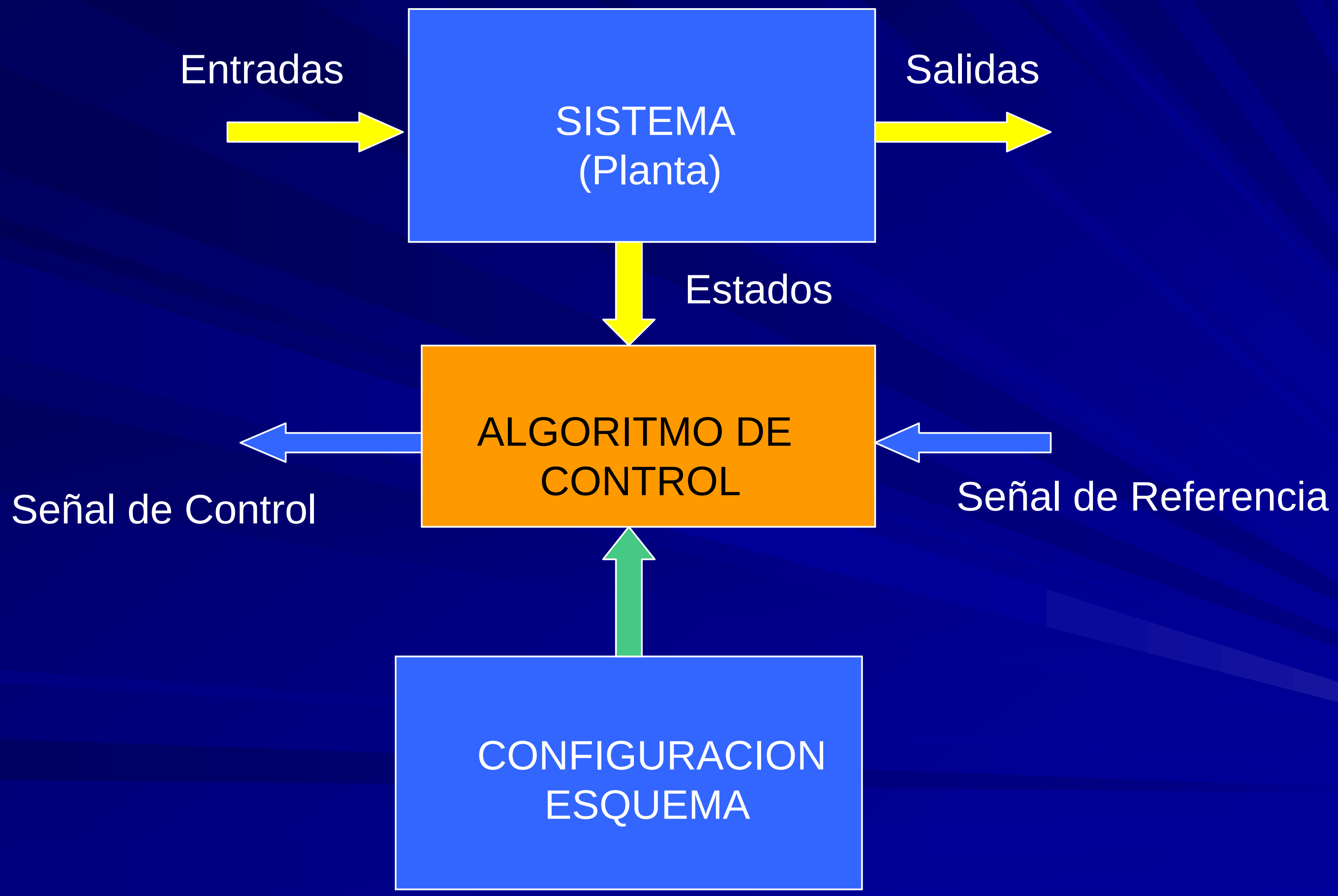
Universidad de Los Andes
Facultad de Ingeniería
Departamento de Sistemas de Control
Opción Control y Automatización
Control 2

Especificaciones para el diseño de sistemas de control

Prof. Mariela CERRADA LOZADA

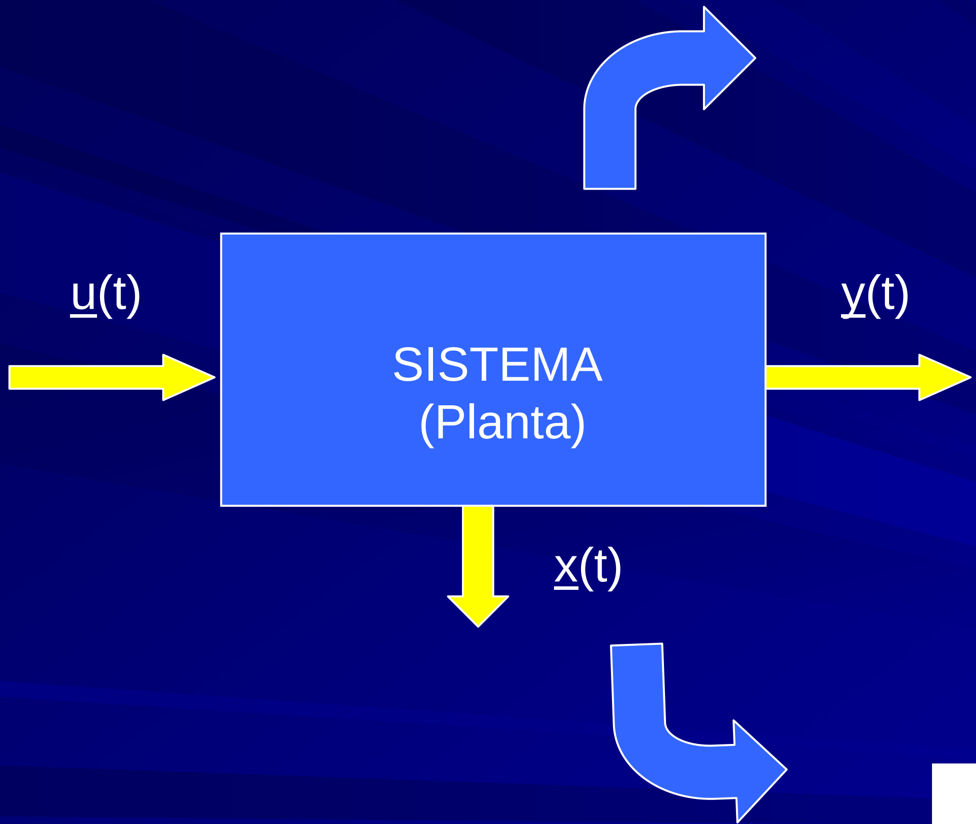
El problema de diseño



Modelo del Sistema

Modelo no lineal

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = f\left(\underline{x}(t),\underline{u}(t),t\right); \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$
$$\underline{y}(t) = h\left(\underline{x}(t),\underline{u}(t),t\right) \qquad (1)$$



Sistemas invariantes en el tiempo

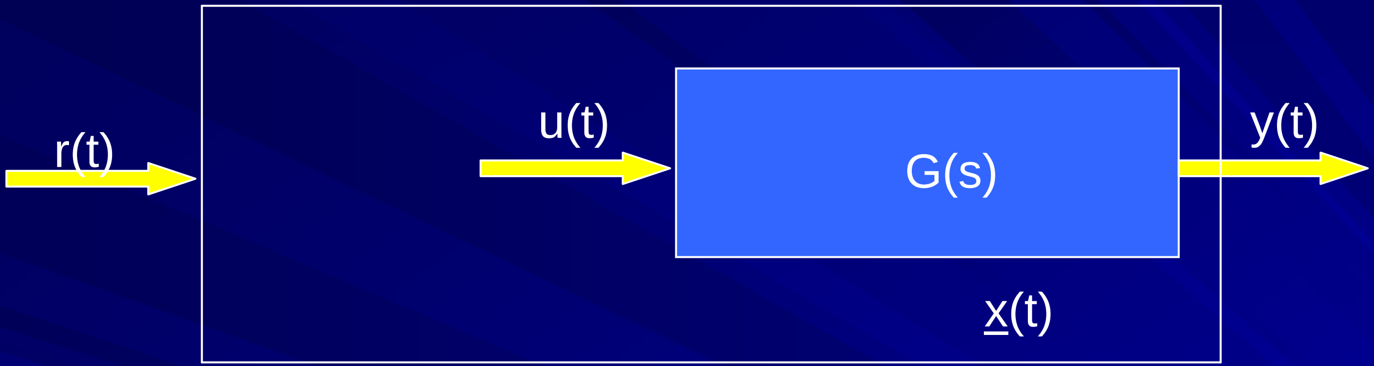
Linealización

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t); \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$
$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \qquad (2)$$

Modelo lineal

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^p\prod_{j=1}^{q}(s+p_i)}; \quad p+q=n<m \qquad (3)$$

El problema de diseño



$G_o(s)$

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_0} \qquad (4)$$

El comportamiento de un sistema de control depende únicamente de su función de transferencia global $G_o(s)$, y no depende explícitamente de la planta G(s). Luego el problema de diseño es, en esencia, la búsqueda de Go(s) estable, para alcanzar especificaciones de diseño

El problema de diseño

Dos enfoques básicos de diseño usando configuraciones realimentadas:
- Menos sensibles a ruidos y perturbaciones de planta.

(a) Se escoge una configuración realimentada y un compensador con parámetros a diseñar. El sistema resultante tiene las especificaciones deseadas

(b) Se determina la función de transferencia Go(s) y luego se escoge la configuración realimentada y se calculan los compensadores,

Se usan controladores (compensadores) descritos por funciones de transferencia propias o estrictamente propias (físicamente realizables)

Se garantiza que el sistema de control tenga un “planteamiento correcto” (para evitar la amplificación de ruidos a alta frecuencia)

El sistema debe ser “totalmente estable”

Pueden imponerse restricciones a la magnitud de las señales actuantes

Criterios de desempeño

- Estabilidad: es el requerimiento fundamental.

  – Estabilidad en SLIT: $$y(t) = y_{natural}(t) + y_{forzada}(t) \quad (5)$$

  a. Criterios de Estabilidad de Routh-Hurwitz (estabilidad absoluta)
  b. Estabilidad en el sentido de Lyapunov: Segundo Método de Lyapunov.
  c. Métodos frecuenciales para el estudio de estabilidad relativa (MF y MG)
  - Estabilidad en sistemas no lineales, invariantes en el tiempo:
    a. Estabilidad Local (aproximaciones lineales de los sistemas no lineales)
    b. Estabilidad Global (uso de funciones de Lyapunov)

Desempeño en estado estacionario

- Precisión: se debe minimizar el error del sistema debido a entradas de referencia y perturbaciones. La precisión es definida en términos de constantes de error (posición, velocidad, aceleración).

$$e(t) = r(t) - y(t)$$
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) \Leftrightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) \quad (6)$$

Atención!! r(t) y y(t) tienen las mismas unidades!!!

Criterios de desempeño

- Precisión (continuación): En términos de Go(s):
  - Si r(t) es un escalón R(s)=a/s. Entonces:

$$e_{ss} = a - y_{ss} \Rightarrow y_{ss} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} aG_o(s) = a\frac{\beta_0}{\alpha_0}$$
$$e_{ss} = a - a\frac{\beta_0}{\alpha_0} = a(1-\frac{\beta_0}{\alpha_0}) \qquad (7)$$

Luego el error de precisión será “cero” cuando Go(0)=1, (es decir $\alpha o=\beta o$).

Supongamos que deseamos diseñar Go(s) tal que el error de posición sea finito, acotado, entonces:

$$\left|a(1-\frac{\beta_0}{\alpha_0})\right| < \gamma \Rightarrow \left|a(\frac{\alpha_0-\beta_0}{\alpha_0})\right| < \gamma$$
$$-\gamma\alpha_0 < a(\alpha_0-\beta_0) < \gamma\alpha_0 \Rightarrow -a\alpha_0-\gamma\alpha_0 < -a\beta_0 < \gamma\alpha_0 - a\alpha_0 \qquad (8)$$
$$\alpha_0(a+\gamma) > a\beta_0 > \alpha_0(a-\gamma)$$

Si consideramos el error relativo:

$$e_{ss} = \frac{(a-a\frac{\beta_0}{\alpha_0})}{a} = 1-G_0(0) \qquad (9)$$

→

$$\alpha_0(1+\gamma) > \beta_0 > \alpha_0(1-\gamma) \qquad (10)$$

Atención α_0 está definido porque Go(s) es garantizado estable !!!

Criterios de desempeño

- Precisión (continuación): En términos de Go(s):
  - Si r(t) es una rampa R(s)=a/s². Entonces:

$$e_{ss}=0 \ \text{ si } \ y_{ss}=\lim_{t\to\infty} y(\text{t})=at=r(t) \quad (11)$$

Consideremos: $$Y(s)=\frac{a}{s^2}G_0(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s^2}+\text{términos asociados a } G_0(s) \quad (12)$$

Calculando los coeficientes de la expansión:

$$k_2=[\frac{a}{s^2}G_0(s)s^2]\Big|_{s=0}$$
$$k_1=\frac{d}{ds}[\frac{a}{s^2}G_0(s)s^2]\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}[aG_0(s)]\Big|_{s=0} \quad (13)$$

Y dado que Go(s) es estable, entonces:

$$y_{ss}(t)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s^2}\Rightarrow y_{ss}(t)=k_1+k_2t=aG_0'(0)+aG_0(0)t \quad (14)$$

Se puede encontrar que:

$$G'_0(0)=\frac{\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0}{\alpha_0^{\,2}} \quad \text{y} \quad G_0(0)=\frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad (15)$$

Entonces, retomando (11):

$$y_{ss}=at \ \text{ si}$$
$$G_0(0)=1\Rightarrow \alpha_0=\beta_0$$
$$\text{y} \quad (16)$$
$$G'_0(0)=0\Rightarrow \alpha_1=\beta_1$$

Criterios de desempeño

- Precisión (continuación):

Por otro lado, notemos que se tendrá un error de velocidad finito si:

$$G_0(0) = 1 \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0 \quad \text{y} \quad G'_0(0) \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq \beta_1 \qquad (17)$$

$\rightarrow$ $y_{ss}(t)$ y $r(t)$ tienen la misma pendiente

y se tendrá un error de velocidad infinito si:

$$G_0(0) \neq 1 \Rightarrow \alpha_0 \neq \beta_0 \qquad (18)$$

$\rightarrow$ $y_{ss}(t)$ y $r(t)$ NO tienen la misma pendiente

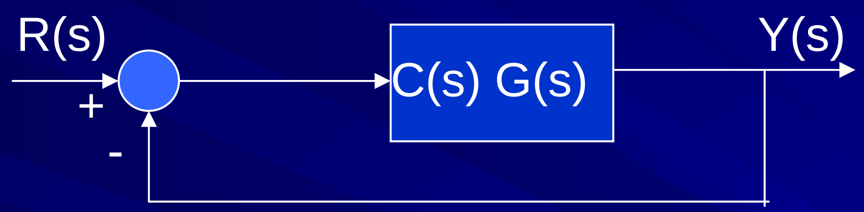
Considerando en este caso el error relativo y asumiendo Go(0)=1, tenemos un inecuación para determinar un error finito:

$$e_{ss} = \frac{(at - atG_0(0) - aG'_0(0))}{a} = (1 - G_0(0))t - G'_0(0) \Rightarrow |G'_0(0)| < \lambda$$

Problema de seguimiento (tracking): Cualquier entrada de referencia.
Problema de regulación (regulating): Entrada de referencia “cero”.

Criterios de desempeño

- Precisión (continuación): CASO ESPECIAL DE REALIMENTACION
  - Definición de las constantes de error para un SLIT realimentado



$$G_0(s)=\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$$ donde: $$G_l(s)=C(s)G(s)=\frac{N_l(s)}{s^q D_l(s)}$$ y G(0) es estable. Entonces:

Si C(s)G(s) es tipo 1, entonces el error de posición es “cero”
Si C(s)G(s) es tipo 2, entonces el error de velocidad es “cero”
Si C(s)G(s) es tipo 3, entonces el error de aceleración es “cero”

Consideremos, que C(s)G(s) es tipo 1, luego:

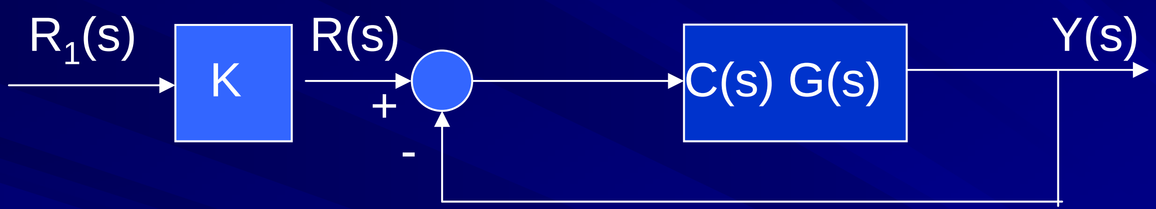
$$G_0(s)=\frac{N_l(s)}{sD_l(s)+N_l(s)}\Rightarrow G_0(0)=\frac{N_l(0)}{N_l(0)}=1 \quad !!!$$

Observemos que aún si existen variaciones en $N_l(s)$ y/0 $D_l(s)$, el sistema aún puede “seguir” a la referencia!! ES UN DISEÑO ROBUSTO!!!

Criterios de desempeño

- Precisión (continuación):

Supongamos C(s)G(s) de tipo 0 y la incorporación de una ganancia K:



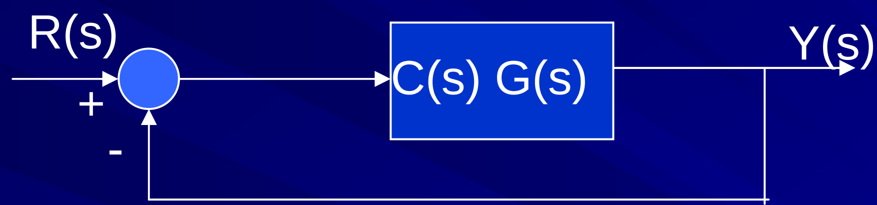
$$G_0(s) = \frac{N_l(s)}{D_l(s) + N_l(s)} \Rightarrow G_0(0) \neq 1 \quad !!!$$

Si se elige $$K = \frac{D_l(0) + N_l(0)}{N_l(0)} \Rightarrow G_{10}(0) = 1 \Rightarrow y_{ss}(t) = r(t)$$

Observemos que si existen variaciones en $N_l(s)$ y/0 $D_l(s)$, el sistema NO puede "seguir" a la referencia!! NO ES UN DISEÑO ROBUSTO!!!

Criterios de desempeño

- Precisión (continuación): CASO ESPECIAL DE REALIMENTACION
  - Definición de las constantes de error para un SLIT realimentado



Si *r(t) = A* (entrada escalón) ➡ $e_{ss} = \dfrac{A}{1+K_p}; \quad K_p = \lim_{s \to o} G(s)$

Si *r(t) = A t* (entrada rampa) ➡ $e_{ss} = \dfrac{A}{K_v}; \quad K_v = \lim_{s \to o} sG(s)$ (7)

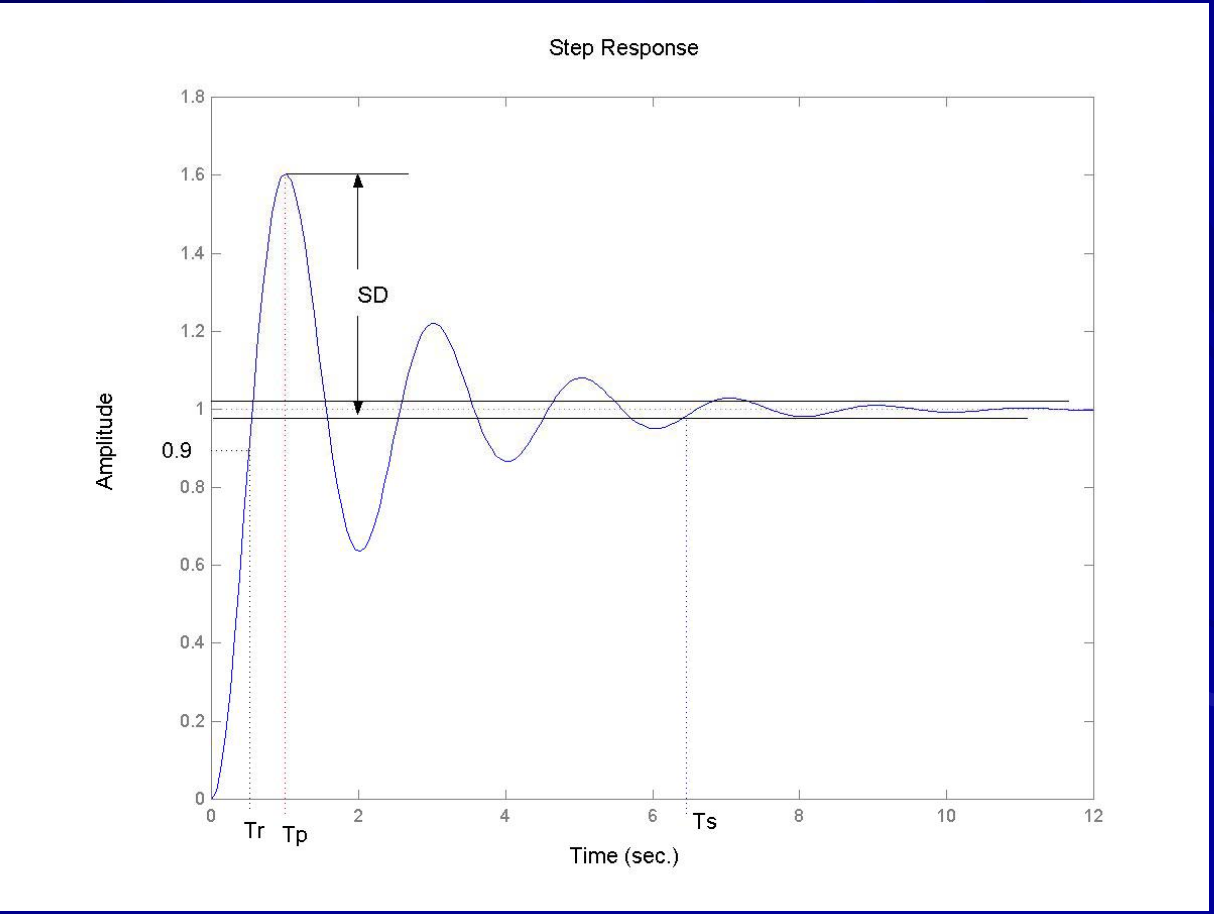
Si *r(t) = (A/2)* t^2 (entrada parábola) ➡ $e_{ss} = \dfrac{A}{K_a}; \quad K_a = \lim_{s \to o} s^2 G(s)$

Criterios de desempeño

- Respuesta transitoria
  - Sobredisparo
  - Tiempo de asentamiento o de respuesta
  - Tiempo pico
  - Tiempo de subida

Estas especificaciones han sido derivadas del comportamiento transitorio de un SLIT de segundo orden.

En caso de sistema de orden superior, éstos podrán describirse con las especificaciones anteriores si existe un par de polos dominantes



Diseño de Sistemas de Control

Se refiere al proceso de modificación del sistema de control realimentado, con el fin de alcanzar las especificaciones de estabilidad, precisión y respuesta transitoria deseadas

¿Modificación? consiste en incorporar elementos al sistema

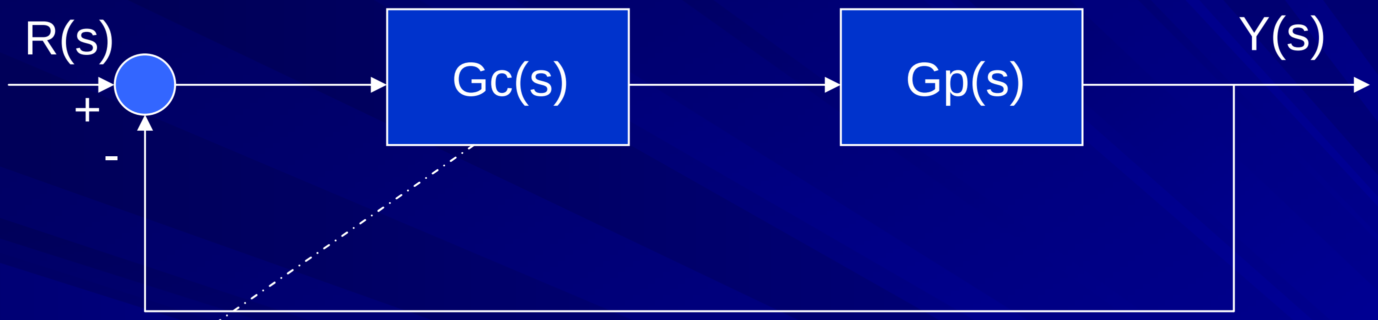
¿Para qué? permiten generar una señal de entrada al sistema, llamada “señal de control”

Señal de Control que “estabiliza” al sistema (cumple requerimientos de estabilidad) y lo “compensa” (incremento de la precisión y velocidad de respuesta).

Compensar el sistema: añadir polos y/o ceros adicionales.

Configuraciones de Compensación para SLIT

1. Compensación en cascada



Compensadores tipo:
adelanto de fase,
atraso de fase,
adelanto-atraso de fase,
PI
PD
PID

Objetivo:
Compensar el sistema, añadiendo polos y/o ceros adicionales en lazo abierto.

Efecto:

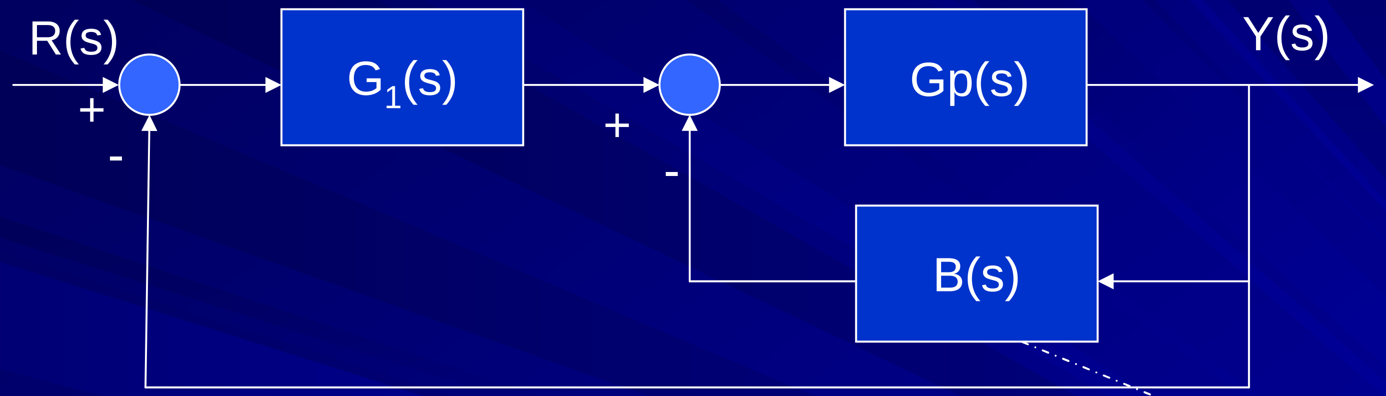
-Permite mejorar la respuesta transitoria y la estacionaria de manera independiente.

-Pueden ser implementados con redes activas (amplificadores operacionales) o pasivas (redes RLC).

Los compensadores pueden ser ideales (Tipo PID) o no ideales (Tipo Adelanto-Atraso).

Configuraciones de Compensación para SLIT

2. Compensación realimentada (minor feedback loop)



Realimentación de velocidad

$$B(s) = bs$$

Objetivo:

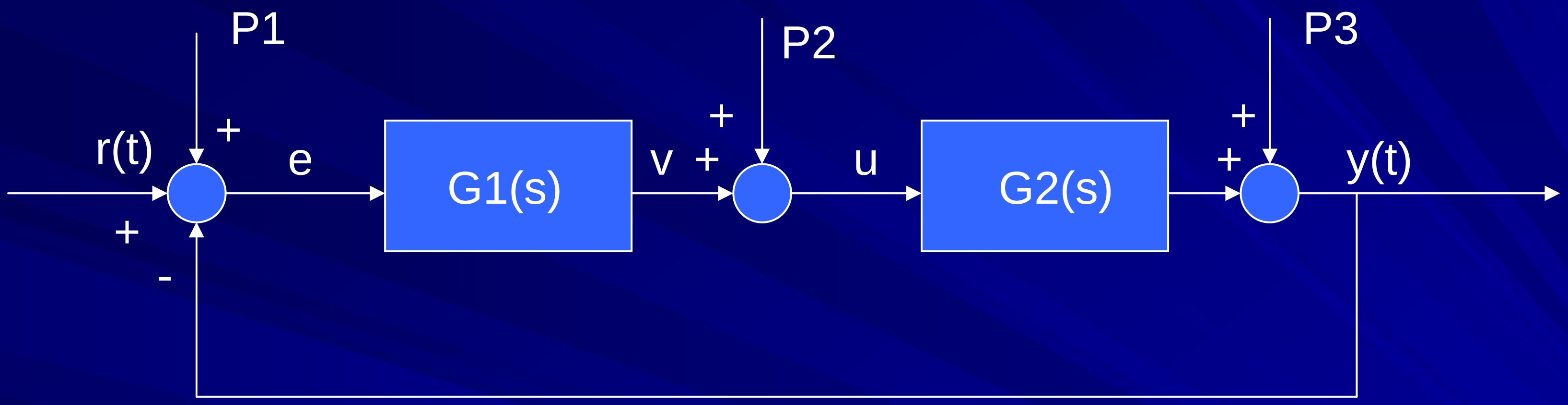
Compensar el sistema, modificando los polos del sistema en lazo cerrado sin aumentar el orden del sistema.

Efecto:

-Permite mejorar la respuesta transitoria, sin embargo usado sin compensación en la cadena directa aumenta el error en estado estacionario.

Restricciones

- Ruido y perturbaciones:



Planta nominal: Considera el peor caso en el cual puede estar la planta

Planta perturbada: Considera el estado actual de la planta

La función de transferencia nominal es usada en el diseño y la diferencia entre la planta nominal y la perturbada es considerada como una perturbación interna

Un buen sistema de control debe ser capaz de seguir la entrada de referencia y rechazar el efecto de ruidos y perturbaciones!!

Restricciones

- Compensadores propios y planteamiento correcto:
  - Los compensadores usados en el diseño deben tener funciones de transferencia propias:
    - No se requieren operaciones puras de diferenciación
    - Son realizables físicamente (tienen asociada una ecuación diferencial de estado)
  - Un sistema de control puede no tener una función de transferencia Go(s) propia aún cuando todos sus componentes tengan funciones de transferencia propias (ver ejemplo 6.5.1)

Supongamos $G_1(s) = \frac{-(s+1)}{s+2}; G_2(s) = \frac{s}{s+1}$ $\Rightarrow$ $G_0(s) = -0.5s$ Es impropia!!

¿Implicaciones prácticas?

Supongamos la existencia de un ruido P1(t)=0.01sin(10000t) y r(t)=sin t. Entonces:

$$y(t) = -0.5\frac{d}{dt}(\sin t + 0.01\sin 10000t)$$
$$= -0.5\cos t - 50\cos 10000t$$

Amplificación del ruido!!!

Restricciones

- Compensadores propios y planteamiento correcto (Continuación...)

  Definición: Un sistema se dice *bien-planteado* o *propio en lazo cerrado* si las funciones de transferencia de cada posible par entrada-salida del sistema es propio.

En el caso de un sistema realimentado, el sistema está bien-planteado si y solo si:

(8) $\Delta(\infty) \neq 0$ → Δ Función característica

Determinante en la fórmula de Mason !!

Para el caso del diagramas de bloques anterior → $\Delta(\infty) = 1 + G_1(s)G_2(s)\big|_{s\to\infty}$

Si $G_1(s) = \dfrac{-(s+1)}{s+2}; G_2(s) = \dfrac{s}{s+1}$ → $\Delta(\infty) = 1 - 1 = 0$

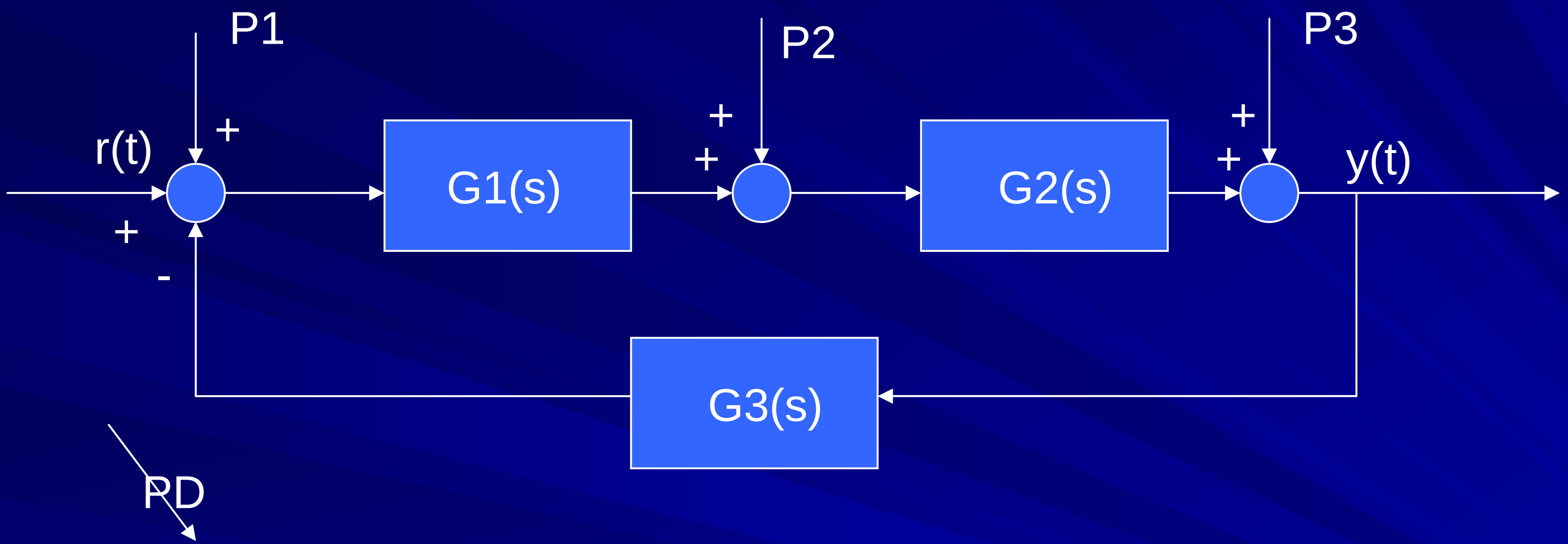
Si $G_1(s) = \dfrac{-(s+1)}{s+2}; G_2(s) = \dfrac{2s}{s+1}$ → $\Delta(\infty) = 1 - 2 = -1$ Bien-planteado!!!

Si G2(s) es estrictamente propia y G1(s) es propia la condición (8) se cumple!!!

Nota: si alguna F.T es impropia, (8) no puede ser usada.

Restricciones

- Compensadores propios y planteamiento correcto (Continuación...)



$$G_1(s) = \frac{(s+2)}{2}; G_2(s) = \frac{s+1}{s+1}; G_3(s) = \frac{4s+3}{s+2}$$

$$G_0(s) = \frac{(s+2)}{(4s+5)}$$

Bien-planteado!!

Compensadores propios → necesidad de evitar el uso de diferenciación!!

Sistemas bien planteados → necesidad de evitar la amplificación de ruidos a altas frecuencias!!

Restricciones

- Estabilidad Total:

Definición: Un sistema se dice totalmente estable si y solo si la función de transferencia en lazo cerrado de cada posible par entrada-salida es estable.

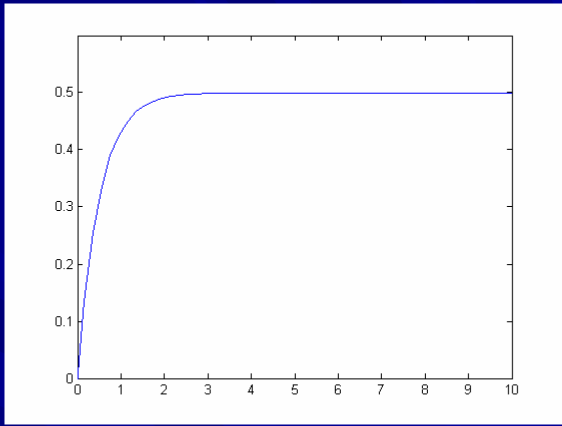
¿Implicaciones?

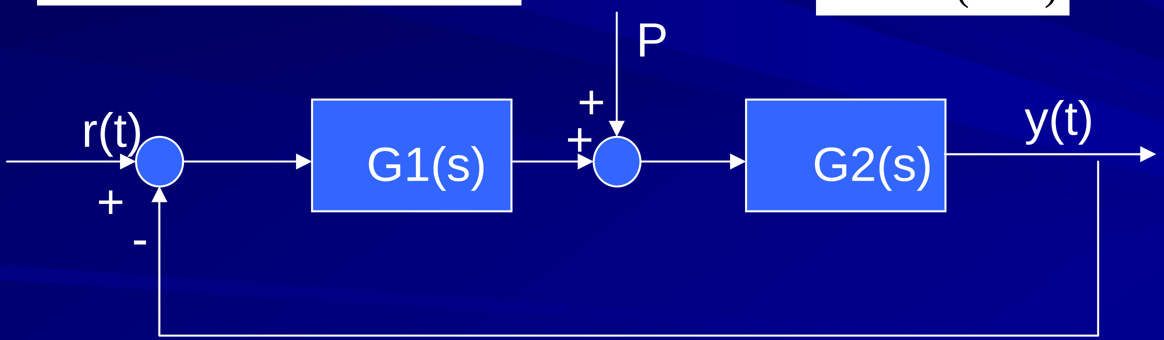
1. Cancelación de polos y ceros inestables

$$G_1(s)=\frac{(s-1)}{(s+1)};G_2(s)=\frac{1}{s-1};P=0$$

$$G_0(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

Estable!!

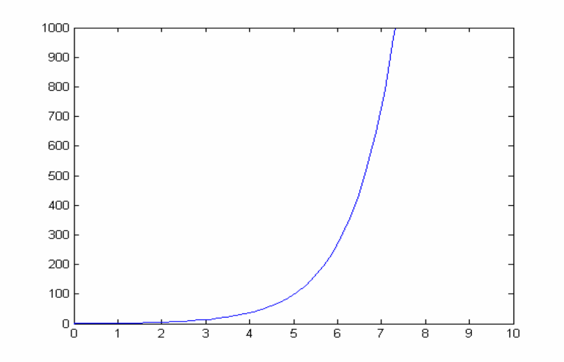




$$G_{Py}(s)=\frac{(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

Inestable!!

Una cancelación de polo-cero inestable NO elimina el polo inestable, sólo lo esconde!!



Restricciones

- Estabilidad Total (continuación):

Un sistema es totalmente estable si y solo si los polos de Go(s) y sus polos escondidos son todos estables.

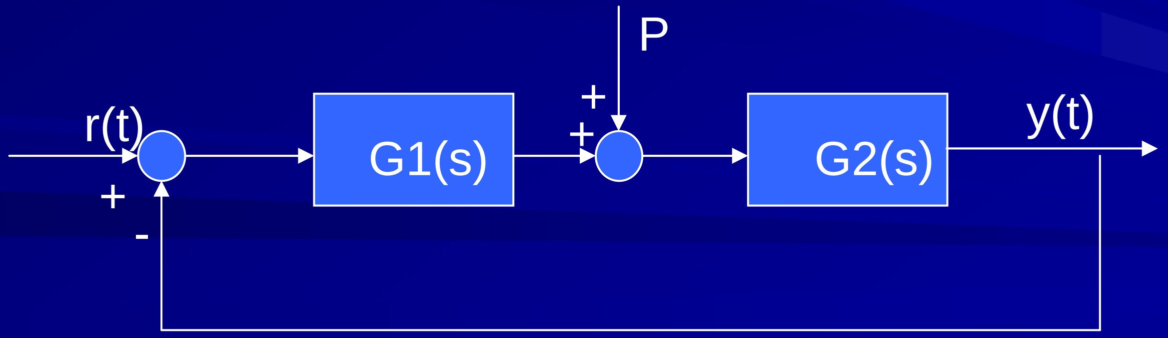
Un sistema no es totalmente estable si existe una cancelación polo-cero inestable!!

Cancelación imperfecta: Una cancelación exacta es imposible en la práctica!!
¿Implicaciones?

1. Cancelación imperfecta de polos y ceros inestable

$$G_1(s)=\frac{(s-0.9)}{(s+1.1)};G_2(s)=\frac{1}{s-1};P=0 \Rightarrow G_0(s)=\frac{s-0.9}{(s+2.0674)(s-0.9674)}$$

Inestable!!



Restricciones

- Estabilidad Total (continuación):

¿Implicaciones?

2. Cancelación de polos y ceros estables

$$G_1(s)=\frac{(s^2+0.1s+100)}{s(s+2)};G_2(s)=\frac{3}{(s^2+0.1s+100)};P=0 \;\Rightarrow\; G_0(s)=\frac{3}{(s^2+2s+3)}$$

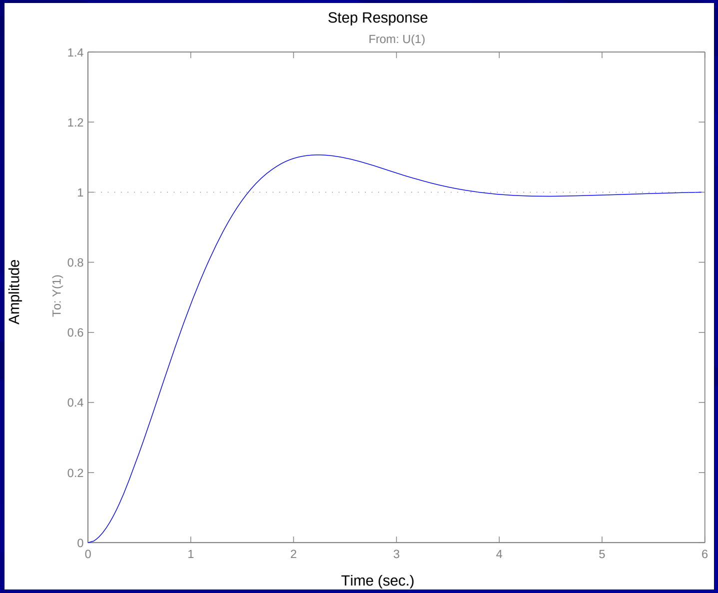
polos → -1 + 1.414i
-1 - 1.414i

$$G_1(s)=\frac{(s^2+0.09s+99)}{s(s+2)};P=0$$

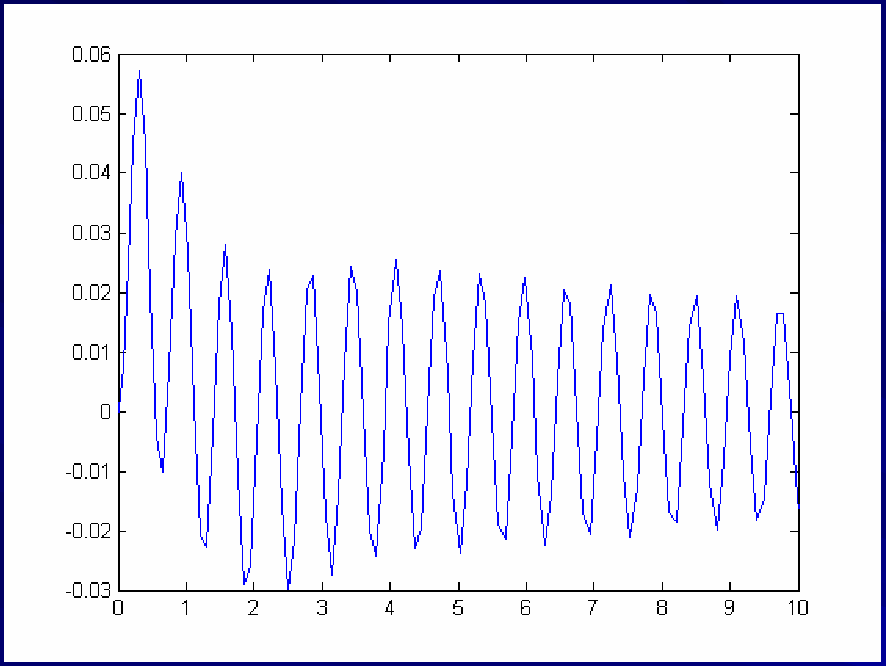
$$G_0(s)=\frac{3s^2+0.27s+297}{(s^4+2.1s^3+103.2s^2+200.27s+297)}$$

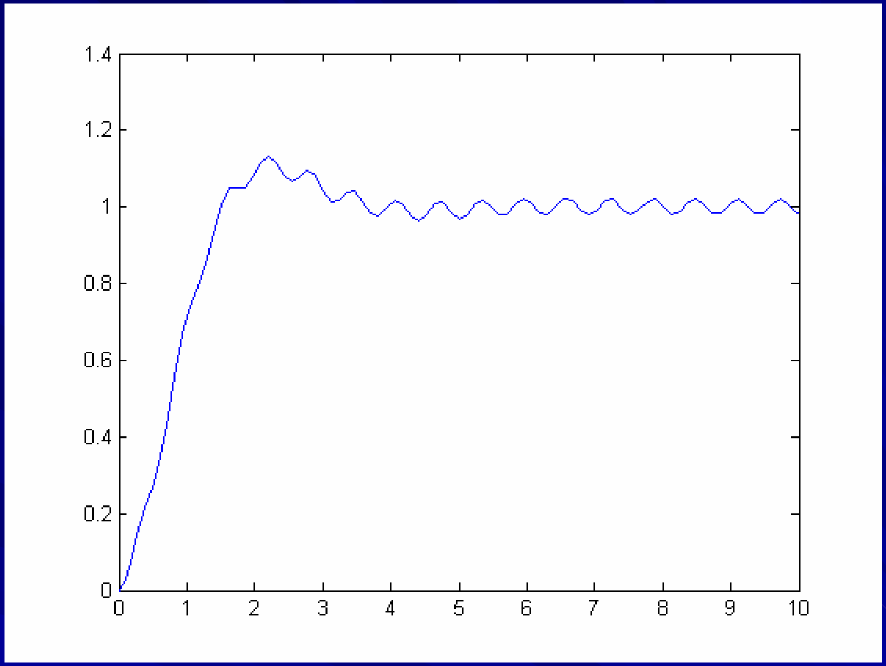
ceros → -0.045 + 9.95i
-0.045 - 9.95i

polos → -0.05 +10.001i
-0.05 -10.001i
-0.9996 + 1.404i
-0.9996- 1.404i



Cancelación de polos y ceros estables





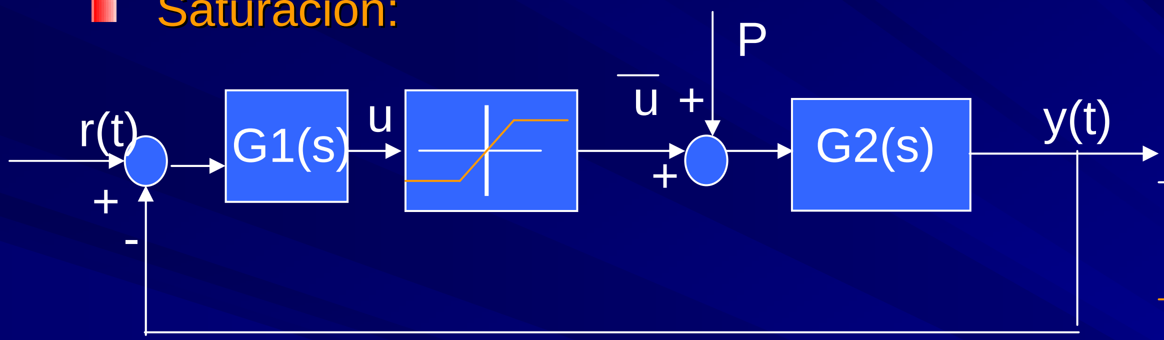
Salida debida a la perturbación

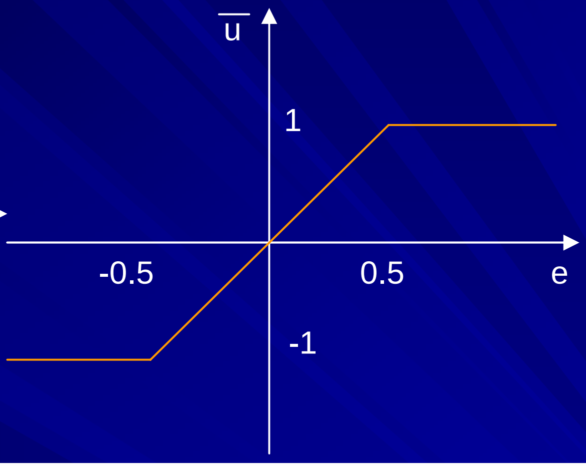
Efecto de la perturbación

Si ocurre una cancelación de polos-ceros estables muy cercanos al eje imaginario O con partes imaginarias grandes los ruidos o perturbaciones pueden excitar una salida de la planta oscilatoria y de respuesta lenta

Restricciones

- Saturación:

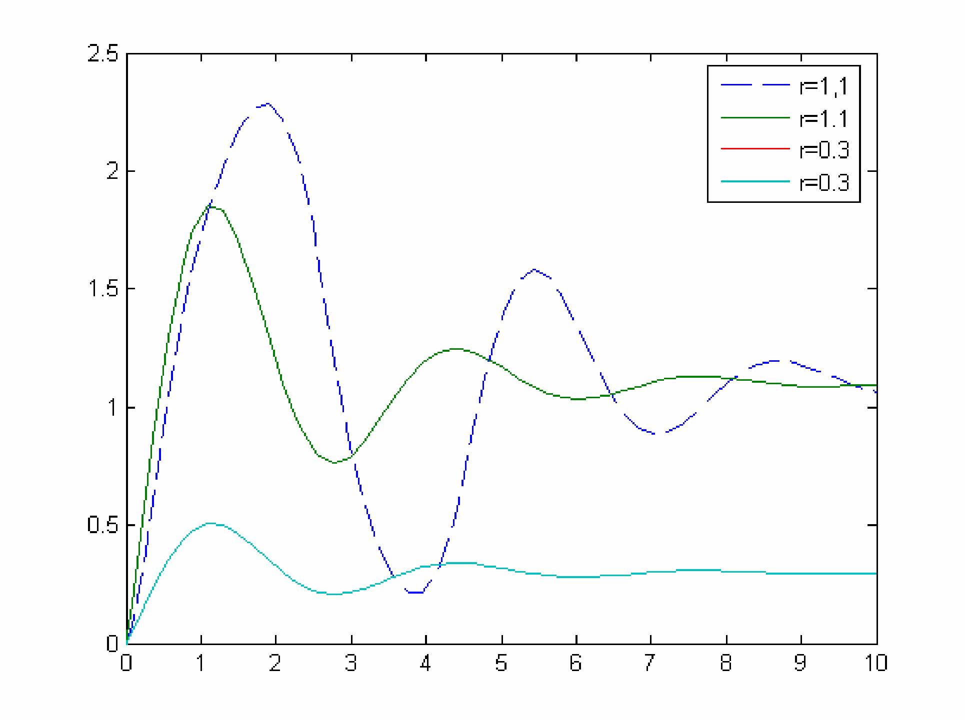




$$G_1(s) = 2; G_2(s) = \frac{(s+2)}{s(s-1)}; P = 0$$

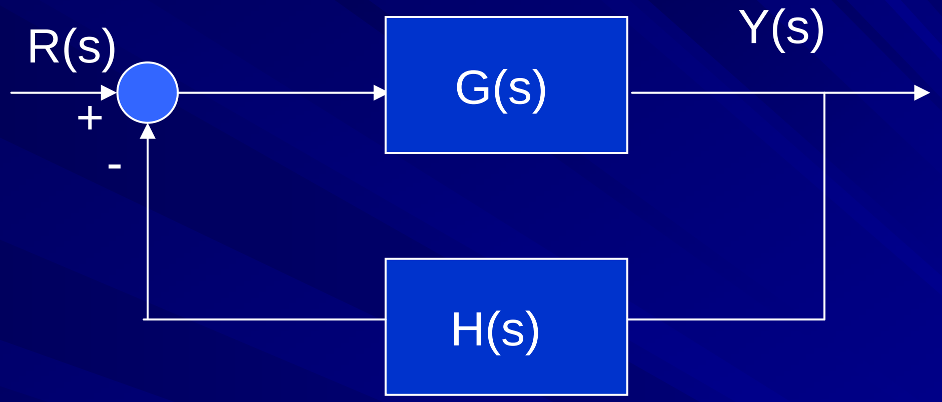
$$G_0(s) = \frac{2(s+2)}{(s^2+s+4)}$$

¿Implicaciones?



Sensibilidad

Consideremos:



$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Si $|G(s)H(s)| >> 1$ para las frecuencias de interés, entonces $T(s) \approx \frac{1}{H(s)} \Rightarrow Y(s) \approx \frac{R(s)}{H(s)}$

Si H(s)=1, entonces $Y(s) \approx R(s)$, aún para variaciones en la planta!!!

Consideremos una perturbación $\Delta G(s)$ en la planta, entonces sin realimentación:

$$\overline{G}(s) \approx G(s) + \Delta G(s) \Rightarrow \overline{Y}(s) = (G(s) + \Delta G(s))R(s) = G(s)R(s) + \Delta G(s)R(s)$$

$$\Rightarrow \Delta Y(s) = \Delta G(s)R(s)$$

Cambio en la salida es proporcional al cambio en la planta, sin considerar la realimentación !!

Sensibilidad

¿Qué ocurre en lazo cerrado?

$$\overline{T}(s)=\frac{(G(s)+\Delta G(s))}{1+(G(s)+\Delta G(s))H(s)} \Rightarrow \overline{Y}(s)=\frac{(G(s)+\Delta G(s))}{1+(G(s)+\Delta G(s))H(s)}R(s)$$

Considerando que $\overline{Y}(s)=Y(s)+\Delta Y(s)$ entonces:

$$\Delta Y(s)=\frac{(G(s)+\Delta G(s))}{1+(G(s)+\Delta G(s))H(s)}R(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$\Delta Y(s)=\frac{(G(s)+\Delta G(s))(1+G(s)H(s))-G(s)(1+G(s)H(s)+\Delta G(s))H(s))}{(1+G(s)H(s)+\Delta G(s)H(s))(1+G(s)H(s))}R(s)$$

$$\Delta Y(s)=\frac{\Delta G(s)}{(1+G(s)H(s)+\Delta G(s)H(s))(1+G(s)H(s))}R(s)$$

Considerando de nuevo la condición $|G(s)H(s)|>>1>>|\Delta G(s)H(s)|$, entonces:

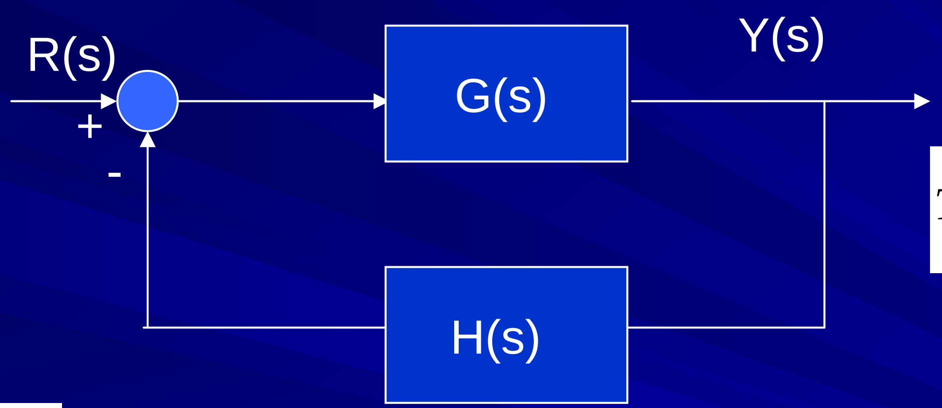
$$\Delta Y(s)=\frac{\Delta G(s)}{(1+G(s)H(s))^2}R(s)$$

En lazo cerrado, el cambio en la salida se reduce por un factor $(1+G(s)H(s))^2$!!!

Sensibilidad

La SENSIBILIDAD se define como el cambio porcentual en la FT del sistema de control en LC respecto al cambio porcentual en algún parámetro ó FT del sistema en LA.

Consideremos:



$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$S_G^T = \frac{\Delta T / T}{\Delta G / G} = \frac{\Delta T}{\Delta G}\frac{G}{T}$$

En el límite:

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T}$$

Función de sensibilidad del sistema !!

Sin considerar la realimentación, entonces

$$T(s) = G(s) \Rightarrow S_G^T = 1\frac{G}{G} = 1$$

El sistema el muy sensible !!!

Sensibilidad

Calculando $S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T}$ se tiene que: $\frac{\partial T}{\partial G} = \frac{(1+GH)-GH}{(1+GH)^2} = \frac{1}{(1+GH)^2}$

$$S_G^T = \frac{1}{(1+GH)^2}\frac{G}{\frac{G}{1+GH}} \Rightarrow S_G^T = \frac{1}{1+GH}$$

Observe el rol de la condición $|G(s)H(s)| >> 1$!!

Atención: Recuerde las condiciones de estabilidad para un aumento considerable de la magnitud de GH !!!!

Por otro lado, haciendo cálculos similares se obtiene que:

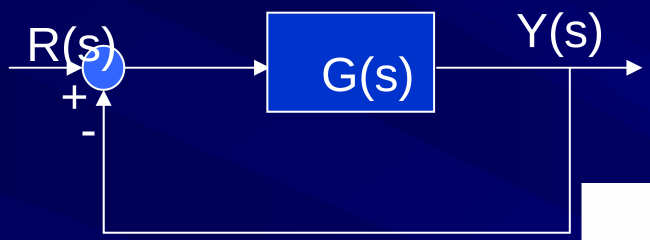
$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H}\frac{H}{T} \Rightarrow S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$$

Observe de nuevo el rol de la condición $|G(s)H(s)| >> 1$

¿¿Qué se concluye??

El signo negativo indica que un cambio porcentual negativo deteriora el comportamiento del sistema

Sensibilidad



$$G(s) = \frac{1}{(s+\alpha)}$$

$$S_\alpha^T(s) = ??$$

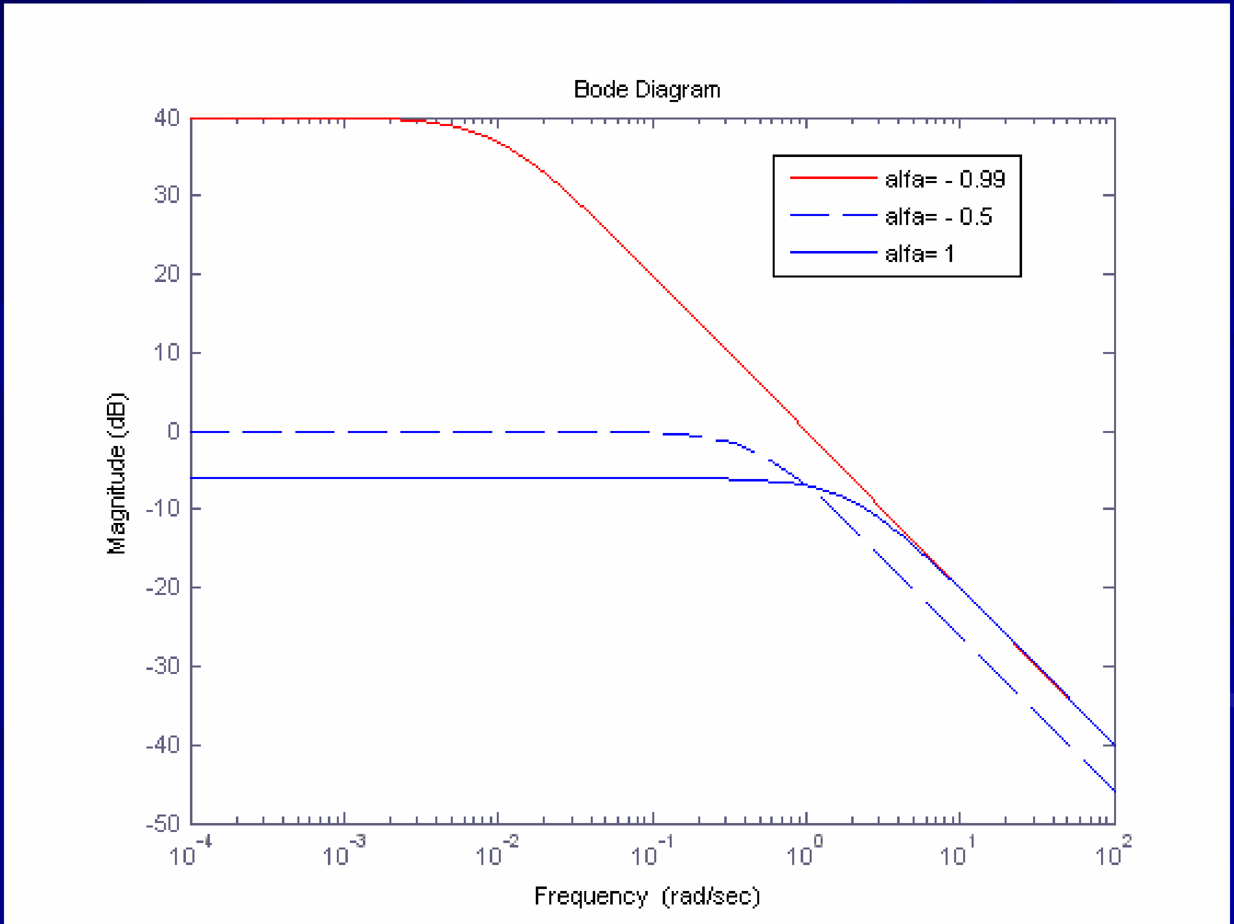
$$T(s) = \frac{1}{s+\alpha+1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{1}{(s+\alpha+1)^2}$$

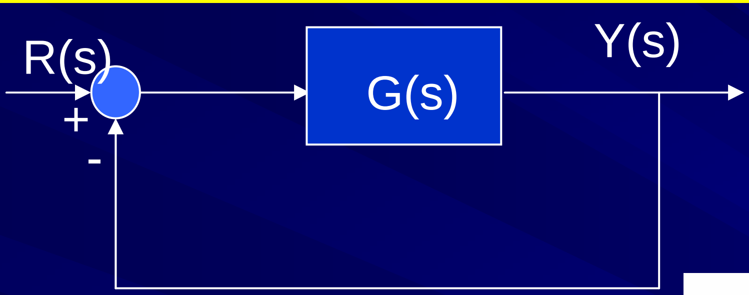
$$S_\alpha^T(s) = \frac{-\alpha}{s+\alpha+1}$$

$$\alpha = -0.99$$

Valor nominal crítico
(sistema inestable!!)



Sensibilidad



$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)} \Rightarrow S_K^T(s)=??$$

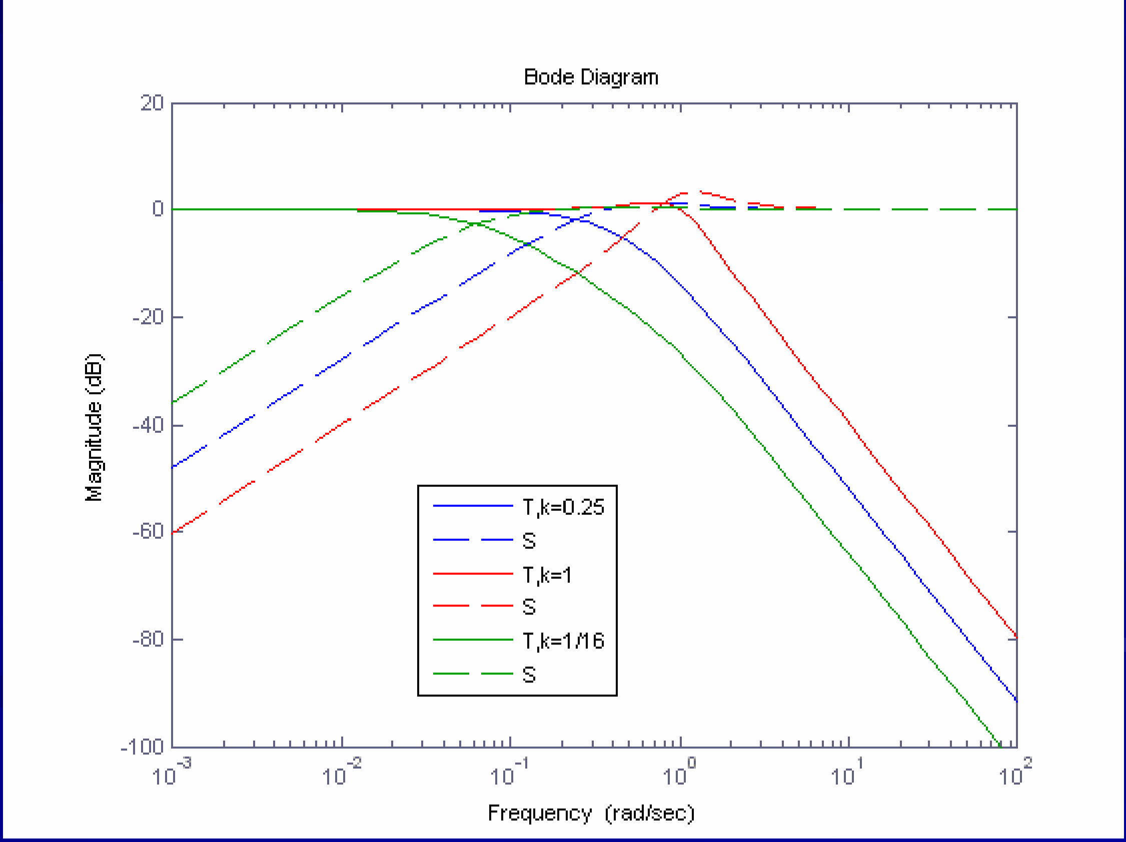
$$T(s)=\frac{K}{s^2+s+K}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha}=-\frac{(s^2+s+K)-K}{(s^2+s+K)^2}$$

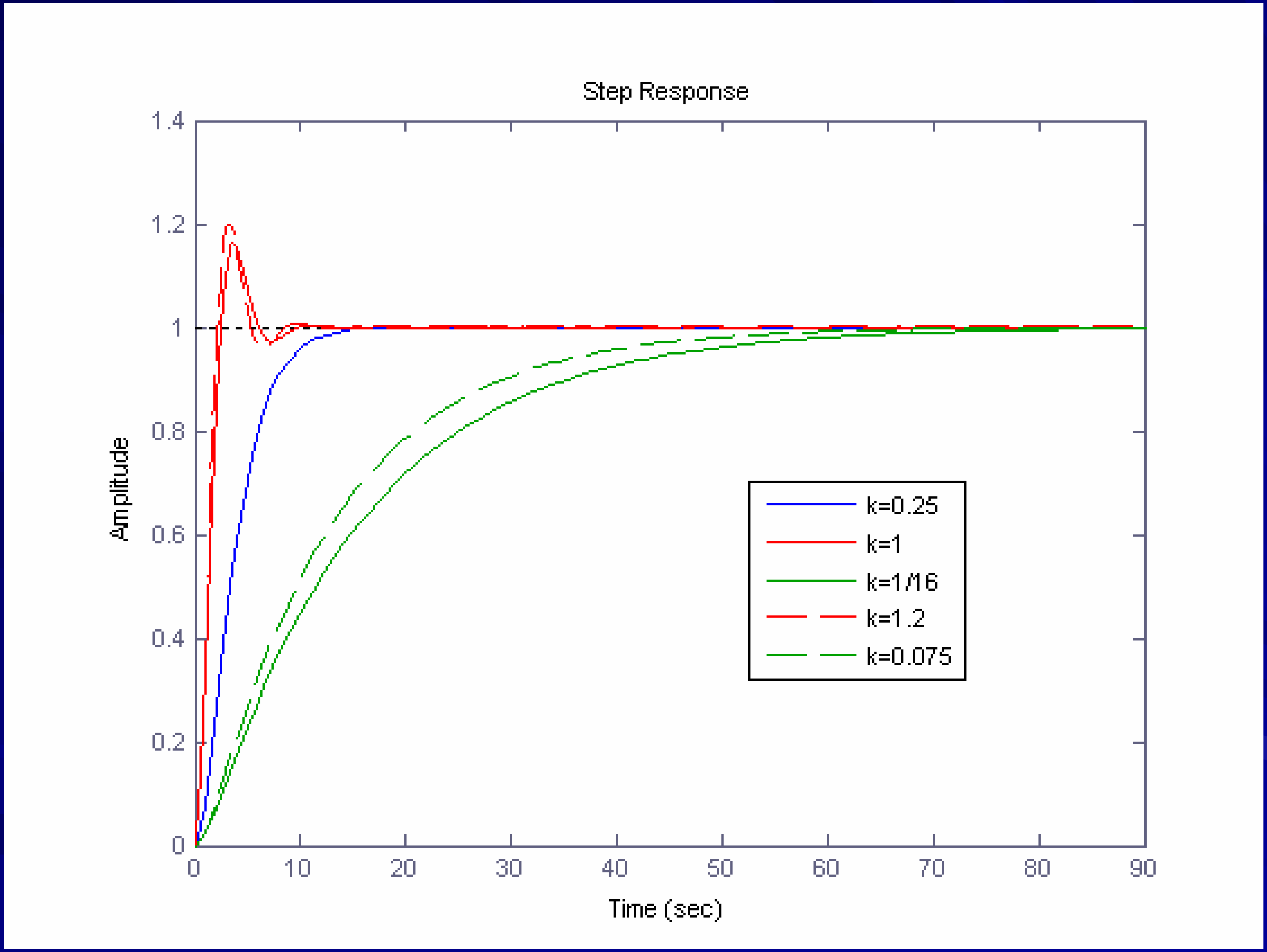
$$S_K^T(s)=\frac{s(s+1)}{s^2+s+K}$$

$$K=0.25$$

Valor nominal crítico
(salida criticamente amortiguada)

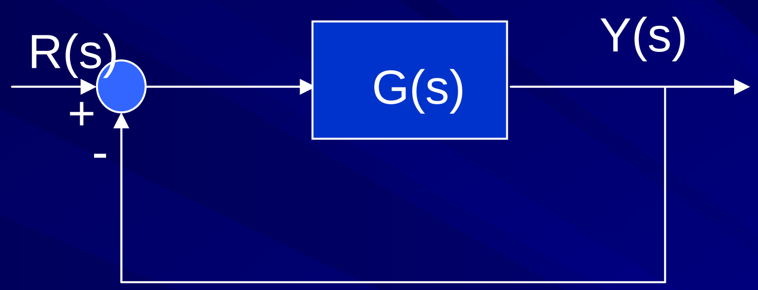


Sensibilidad



Sensibilidad

Consideremos:



$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$S_G^T = \frac{1}{1+G(s)}$$

Observemos que: $$S_G^T + T(s) = \frac{1}{1+G(s)} + \frac{G(s)}{1+G(s)} = 1$$

S y T no pueden ser pequeñas en magnitud al mismo tiempo !!

T(s), FT en lazo cerrado, es la función de sensibilidad complementaria

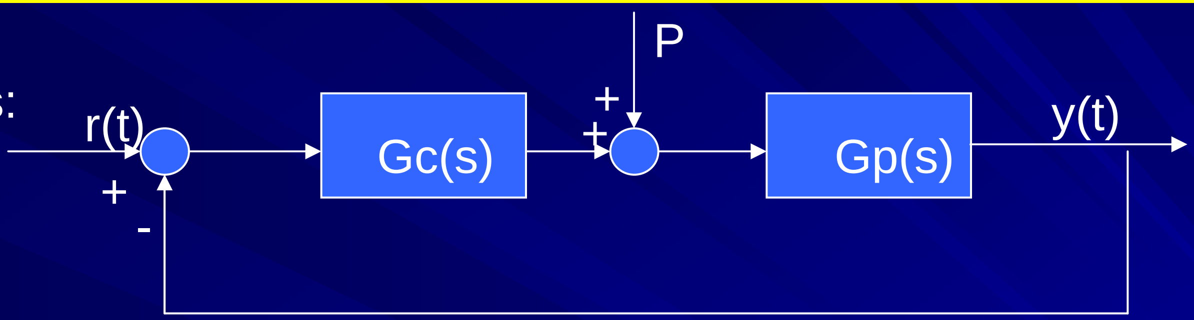
Si "S" es pequeña, entonces: $$T(s) \approx 1 \Rightarrow Y(s) \approx R(s)$$

En general, $|G(s)|$ es pequeña a altas frecuencias, en sistemas fisicamente realizables (sistemas que se comportan como filtros pasa-bajo). Entonces:

$$S_G^T \approx 1 \xrightarrow{S_G^T + T = 1} |T(s)| \approx 0$$

Sensibilidad

Consideremos:



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

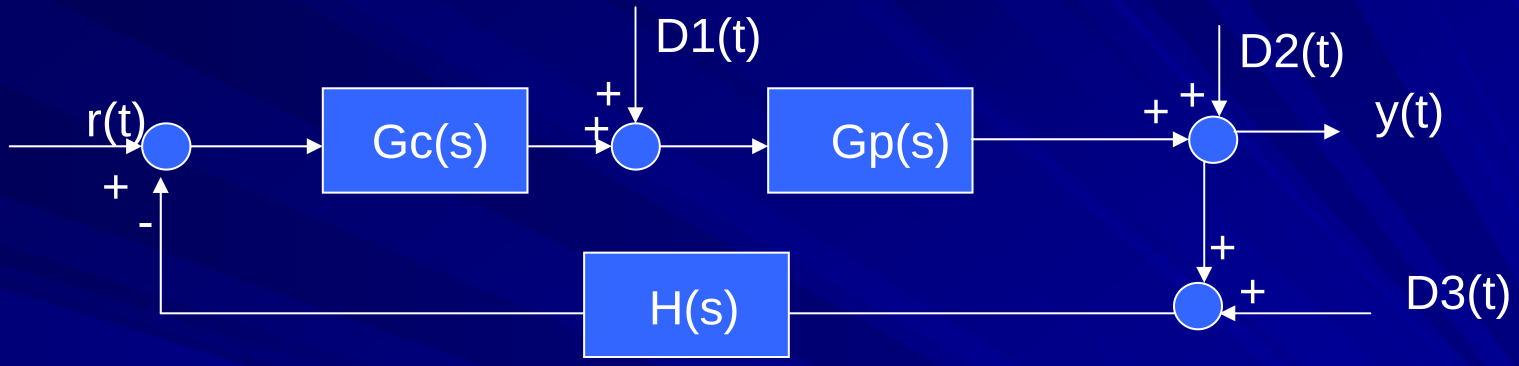
Entonces:

a. Se requiere $\left| G_c(s) G_p(s) \right| >> 1$ en bajas frecuencias para disminución de la sensibilidad del sistema en cuanto a cambios en Gp(s)

b. Aumentar la ganancia de lazo a través de Gc(s) para rechazo de ruidos (perturbaciones externas). Si $\left| G_c(s) G_p(s) \right| >> 1$ entonces $\frac{Y(s)}{P(s)} \approx \frac{1}{G_c}$

Sensibilidad

Consideremos:



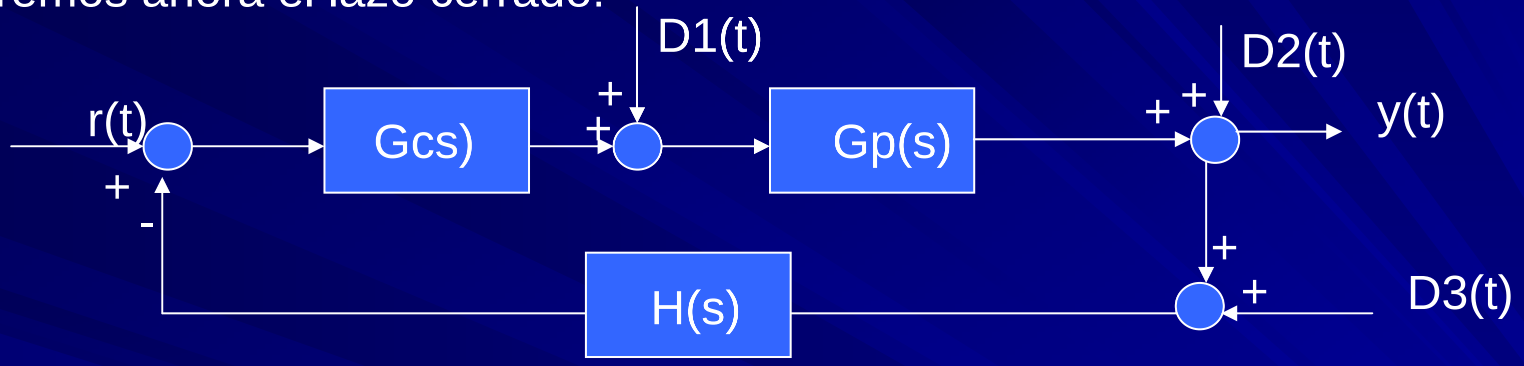
Consideremos la ausencia del sensor (H(s)=0, Lazo abierto). Entonces:

$$Y(s) = D_2(s) + G_p(s)D_1(s) + G_c(s)G_p(s)R(s)$$

a. La señal D2(s) no es rechazada
b. L señal D1(s) pasa a través de la planta

Sensibilidad

Consideremos ahora el lazo cerrado:



$$Y(s)=\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)+\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}D_1(s)+\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}D_2(s)+\frac{G_c(s)G_p(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}D_3(s)$$

Teniendo en cuenta que $S_G^T=\dfrac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}$ y $T(s)=\dfrac{G_c(s)G_p}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}$, entonces:

$$Y(s)=T(s)R(s)+S(s)G_p(s)D_1(s)+S(s)D_2(s)+T(s)H(s)D_3(s)$$

Sensibilidad

Teniendo en cuenta que $Y(s) = T(s)R(s) + S(s)G_p(s)D_1(s) + S(s)D_2(s) + T(s)H(s)D_3(s)$

y dado que si $\left|G_c(s)G_p(s)H(s)\right| >> 1 \Rightarrow \left|S(s)\right| << 1$, luego:

a. El ruido D2 es rechazado

b. $T(s) \approx \dfrac{1}{H(s)}$, entonces el ruido D3 no es rechazado

c. La perturbación D1(s) pasa a través de Gp(s)

Ejemplo. Consideremos H(s)=1 y la existencia de la entrada (ruido) D1(s). Entonces, analizando error E(s):

$$E_{D_1(s)}(s) = \frac{-G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} D_1(s)$$

Sensibilidad

Si D1(s) es del tipo escalón, entonces:

$$E_{D_1(s)}(s) = \frac{-G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\frac{1}{s}$$

Estudiando el error en estado estable:

$$\lim_{s\to 0} sE_{D_1(s)}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{-G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}$$

Supongamos Gc(s)Gp(s) de tipo 1, por ejemplo:

$$G_c(s) = \frac{K_1(s+a)}{(s+b)} \qquad G_p(s) = \frac{K_2(s+\alpha)}{s(s+\beta)}$$

Entonces:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE_{D_1(s)}(s) = \frac{-b^2}{K_1 b - K_1 a}$$

Es finito y sólo depende de los parámetros de Gc(s)!!!

Observemos que

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left|\frac{G_p}{1+G_cG_p}\right|$$

Sensibilidad

Observemos que $e_\infty = \underset{s\to 0}{Lim}\left|\dfrac{G_p}{1+G_cG_p}\right|$

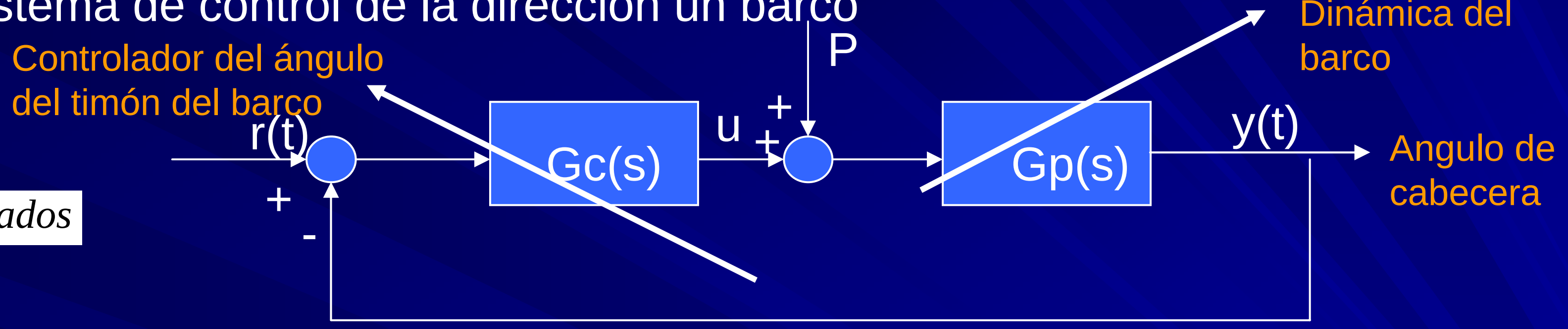
Entonces, si $|G_c(s)G_p(s)| >> 1 \Rightarrow |S(s)| << 1$ para $s \to 0$, se tiene que $e_\infty \approx \dfrac{1}{|G_c|}$

Luego la entrada (ruido) D1 será rechazado si $|G_c| >> 1$

Ejercicio: que ocurre si el integrador esta en Gp???

Sensibilidad

Ejemplo: Sistema de control de la dirección un barco



$r(t) = 10\,grados$

Planta nominal

$$G_p(s) = \frac{4.6847*10^{-4}}{s(s+6.8624*10^{-3})}$$

$$G_c(s) = \frac{1.7498(s+1.0071*10^{-2})}{(s+4.9648*10^{-2})}$$

$$G_{p2}(s) = \frac{5.6217*10^{-4}}{s(s+6.8624*10^{-3})}$$

Cambio del 20% en la ganancia

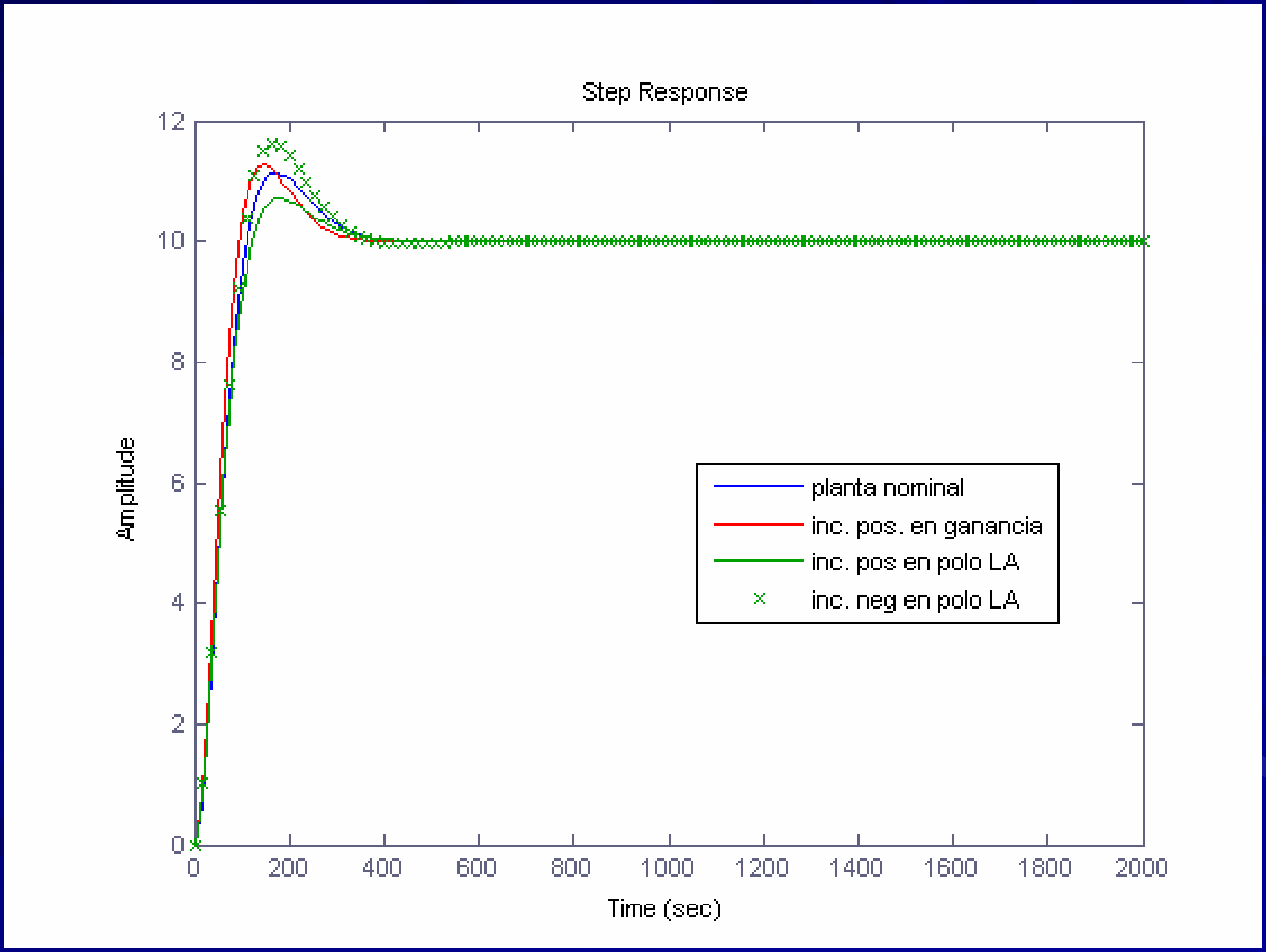
$$G_{p3}(s) = \frac{4.6847*10^{-4}}{s(s+8.2349*10^{-3})}$$

Cambio del 20% en el polo LA

$$G_{p3}(s) = \frac{4.6847*10^{-4}}{s(s+5.4899*10^{-3})}$$

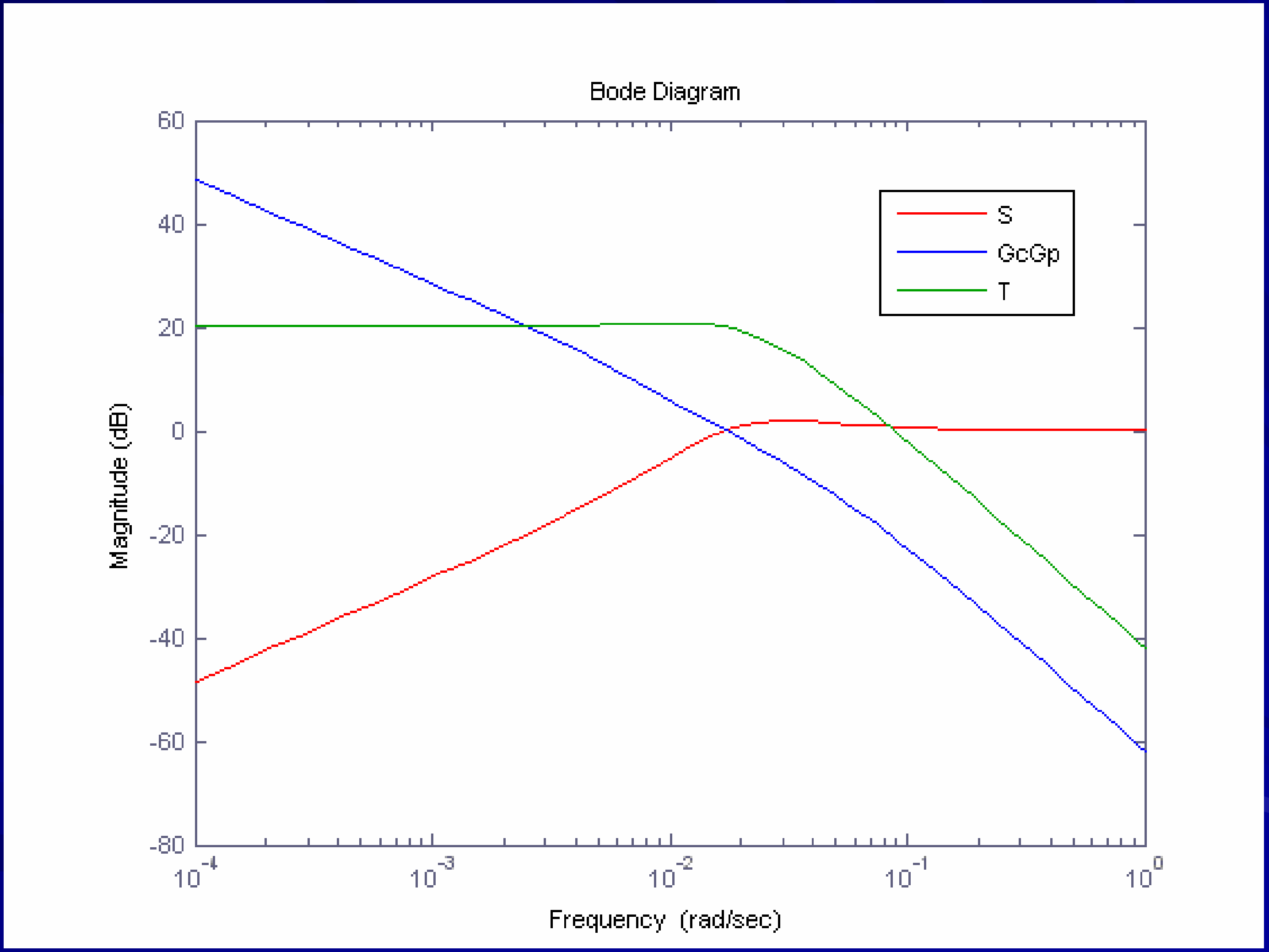
Cambio del 20% en el polo LA

Sensibilidad



Sensibilidad

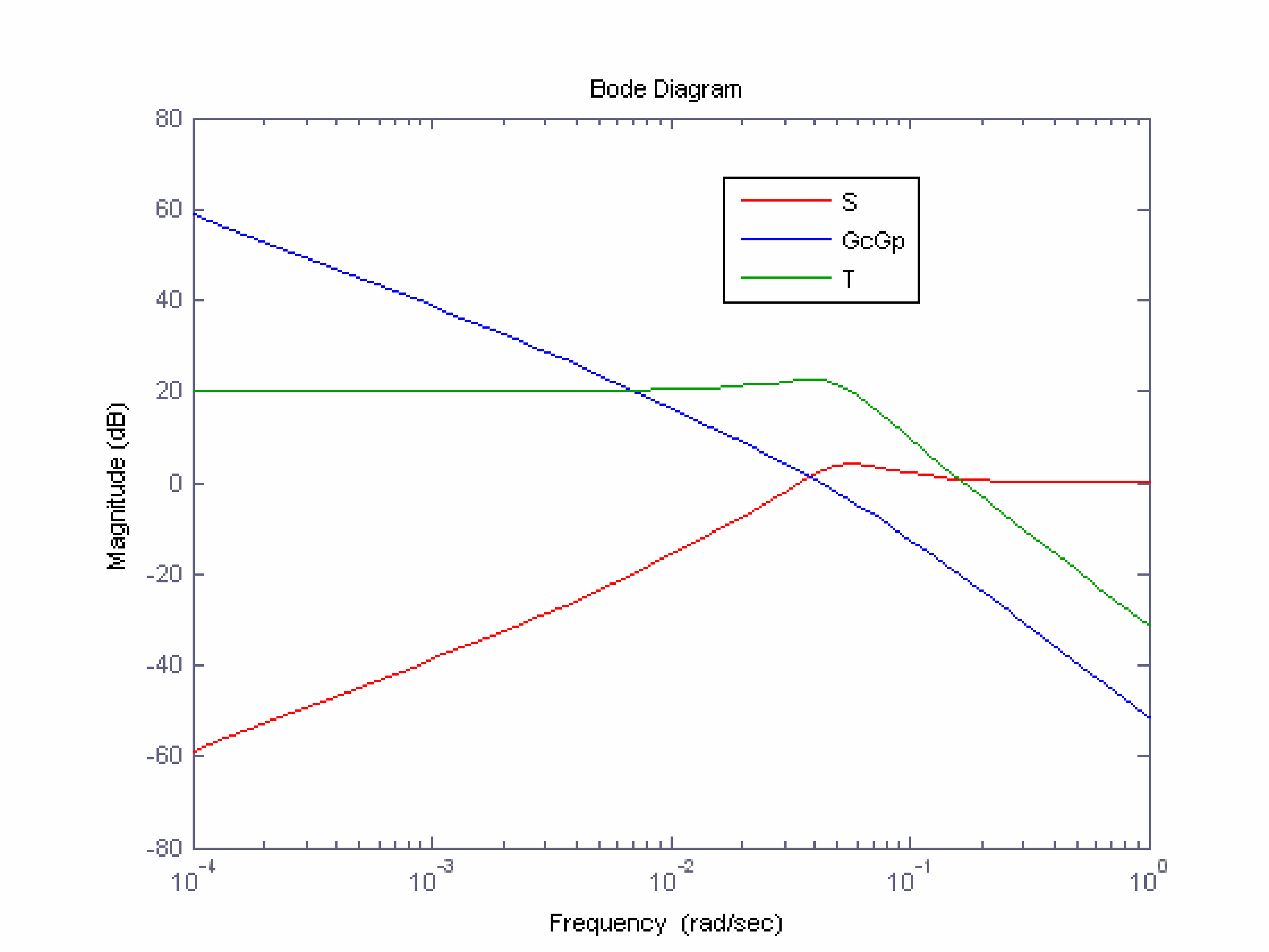
Sensibilidad para el cambio en la ganancia de la planta



Sensibilidad

- Sensibilidad para el cambio en la ganancia de la planta, considerando un aumento de la ganancia de Gc (5 veces)
- Observemos el cambio en la magnitud de la sensibilidad !!

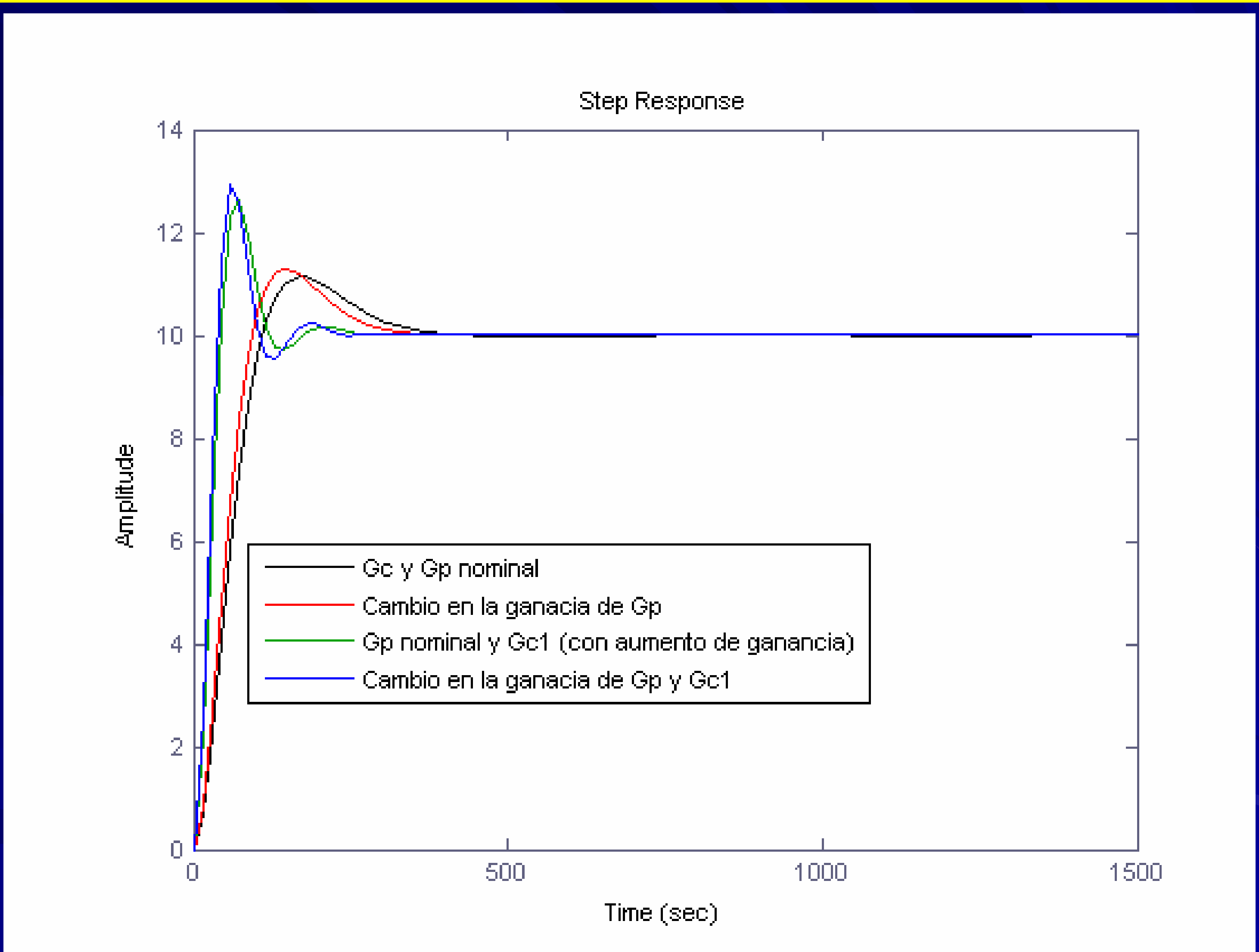
¿Qué significa?



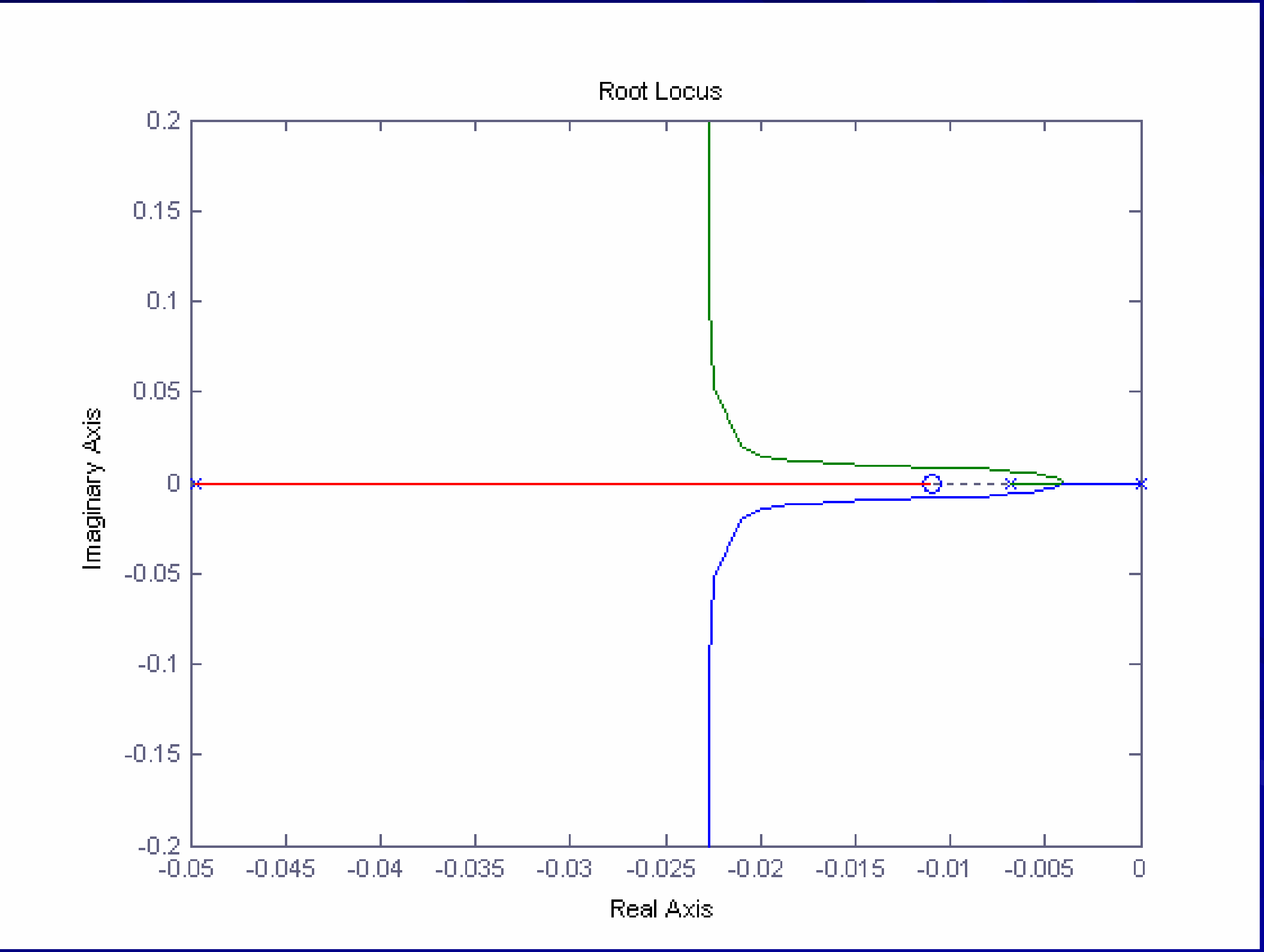
Sensibilidad

Sensibilidad para el cambio en la ganancia de la planta, considerando un aumento de la ganancia de Gc

¿Qué significa este resultado en relación con el cambio en la función de sensibilidad?

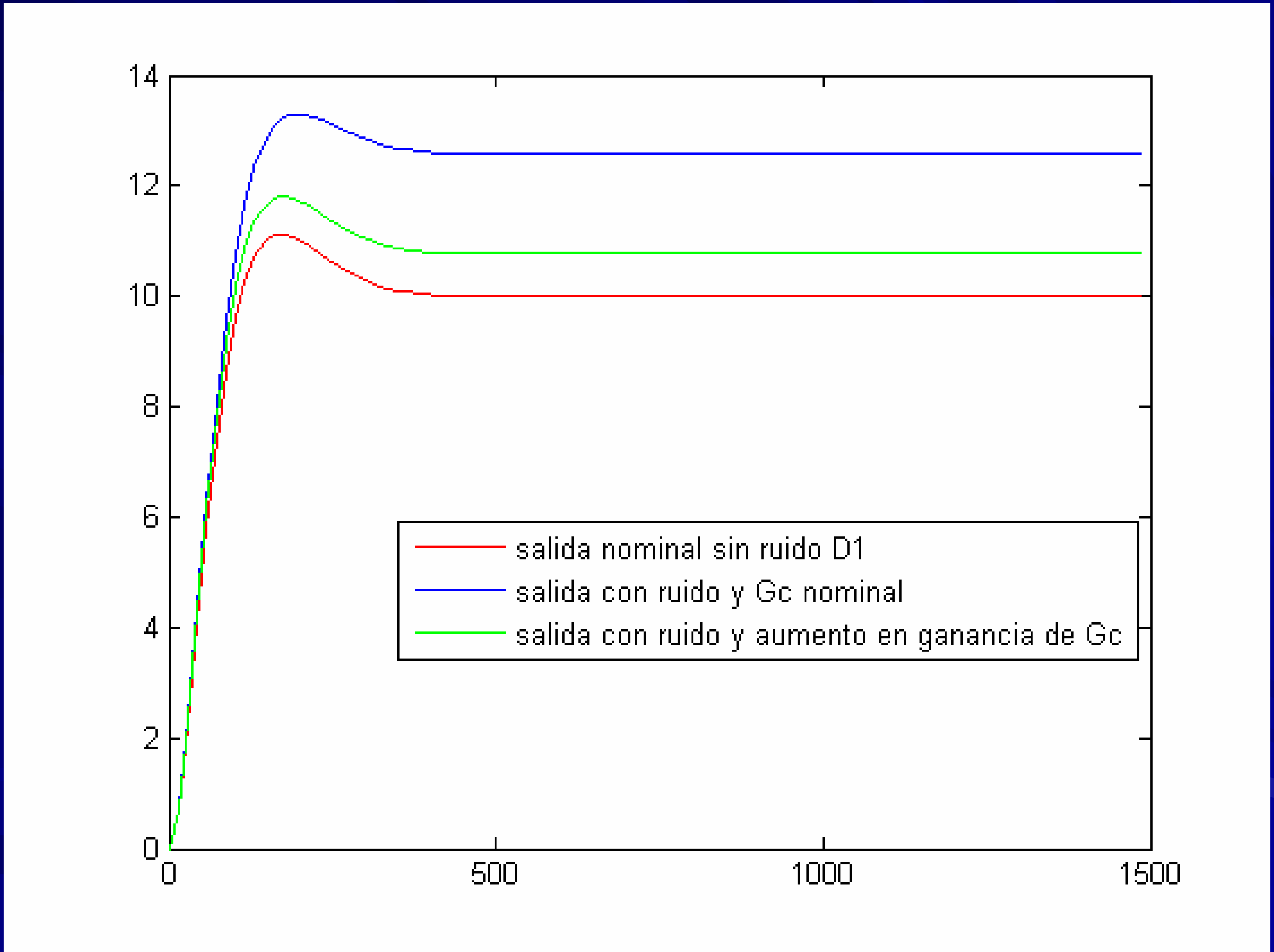


Sensibilidad



Sensibilidad

Rechazo al ruido D1



Sensibilidad

Rechazo al ruido D1 y a la perturbación en la planta