

Diseño de Controladores PID

Control 2

Prof. Mariela CERRADA

Definición del Problema de Compensación

- El lugar de las raíces como método que permite visualizar información sobre la respuesta transitoria y estabilidad.
- Control Proporcional: Permite escoger una ganancia K adecuada que permite alcanzar una especificación de respuesta transitoria, limitada a aquella que está sobre el lugar de las raíces (**Diseño rígido**)

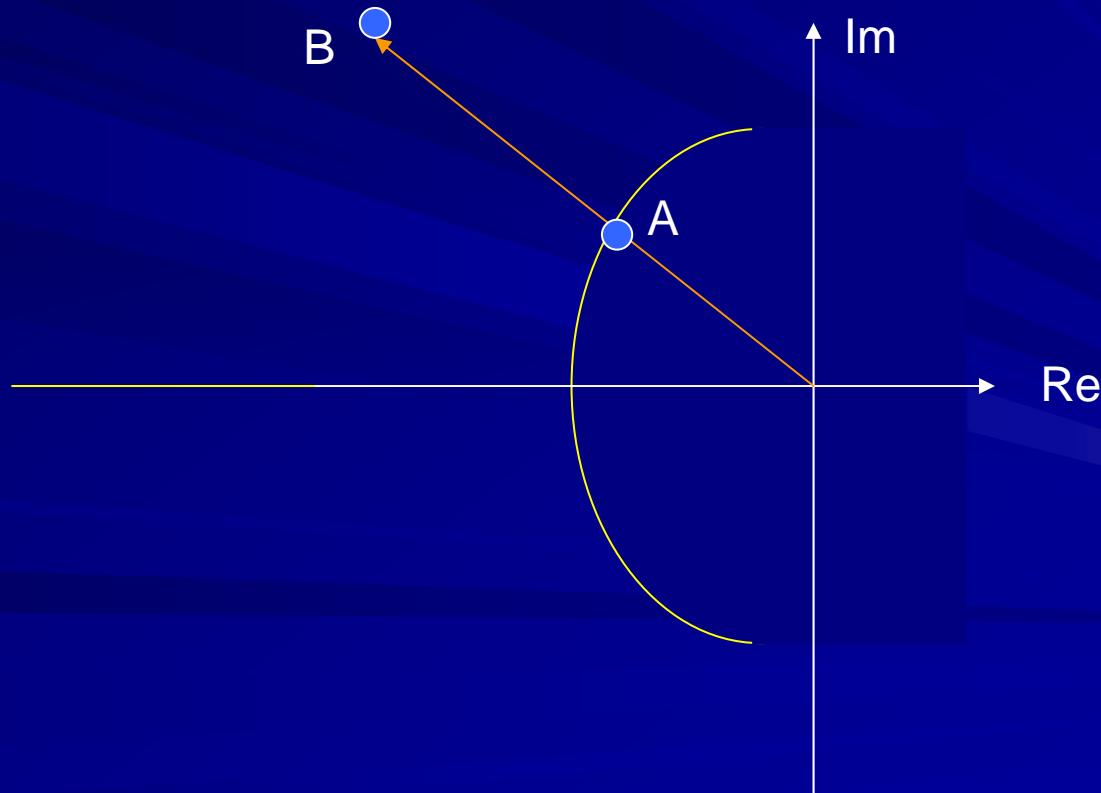
$$u(t) = K e(t) \quad \text{Ley de control Proporcional}$$



Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema con realimentación unitaria

Definición del Problema de Compensación

- Flexibilidad del diseño: Posibilidad de diseñar respuestas que no están sobre el lugar de las raíces.



Definición del Problema de Compensación

■ Solución:

Compensar el sistema, añadiendo polos y/o ceros adicionales. El lugar de las raíces del sistema compensado contiene al conjunto de polos dominantes para algún valor de ganancia del sistema.

Características del método de compensación:

- Permite mejorar la respuesta transitoria y la estacionaria de manera independiente.
- Los compensadores pueden ser adicionados en la cadena directa antes de la planta o en la cadena de realimentación.
- No presentan carga adicional o problemas de diseño.
- Pueden ser implementados con redes activas (amplificadores operacionales) o pasivas (redes RLC).
- Los compensadores puedes ser ideales (Tipo PID) o no ideales (Tipo Adelanto-Atraso).

Controlador del tipo PID

- Los controladores del tipo PID son compensadores que permiten incorporar acciones Proporcionales-Integrales-Derivativas sobre la señal de error del sistema.

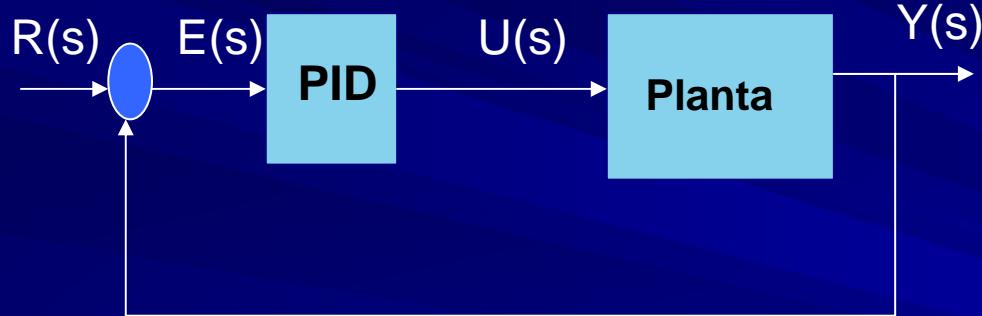


Figura 3. Compensación en serie

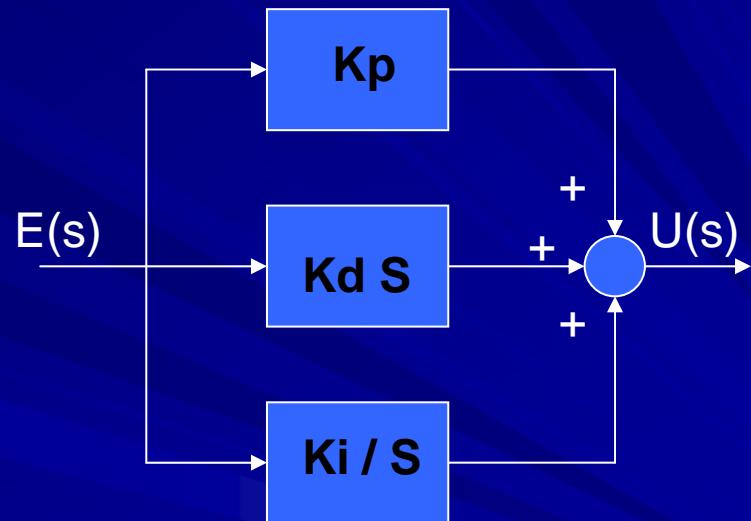


Figura 4. Control PID

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt \quad \longrightarrow$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_d s E(s) + K_i \frac{1}{S} E(s)$$

Controlador del tipo PD: Mejorando la respuesta transitoria

- Los controladores del tipo PD solo incorporan las acciones Proporcionales Derivativas, que permiten incorporar mejoras sobre la respuesta transitoria.

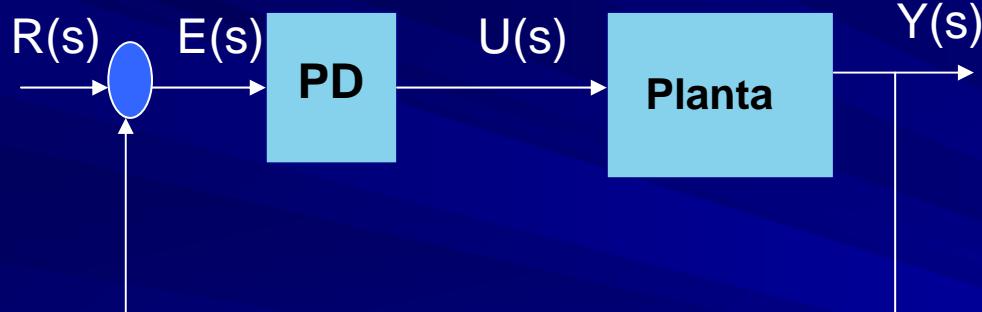


Figura 5. Compensación PD



Figura 6. Control PD

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_d s E(s)$$

Función de Transferencia de Controlador

$$G_c(s) = K_p + K_d s = K_d \left(s + \frac{K_p}{K_d} \right)$$

Interpretación del Controlador PD: dominio temporal

- El efecto del controlador PD es incorporar un cero en $s = -K_p/K_d$ en la cadena directa y una nueva ganancia K_p que permite ajustar la ganancia total del sistema compensado. El controlador NO altera el TIPO del sistema.

Interpretación del control PD:

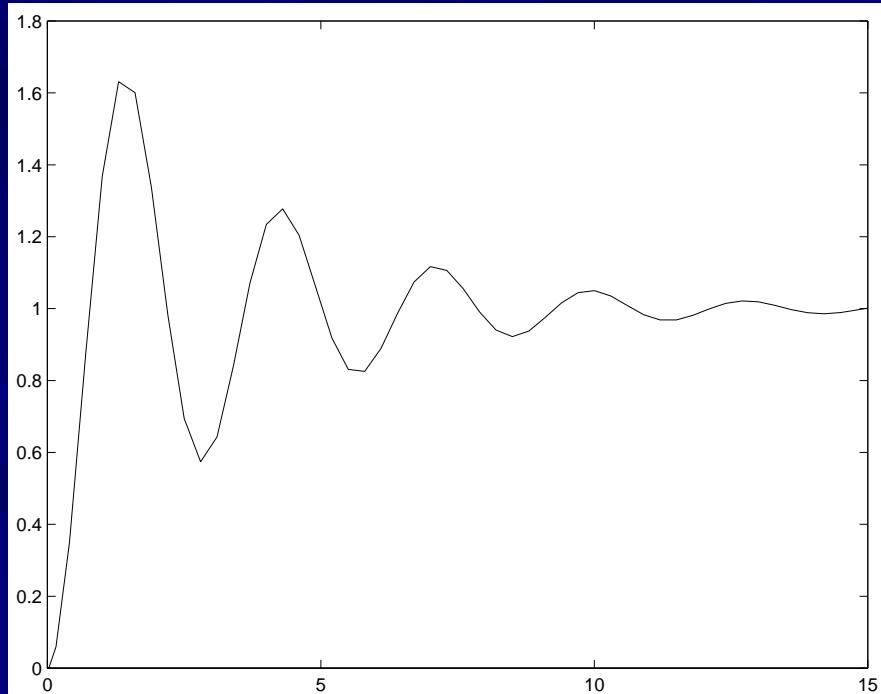


Figura 7. Respuesta de salida $y(t)$ de un sistema de segundo orden realimentado unitariamente

Interpretación del Controlador PD: dominio temporal

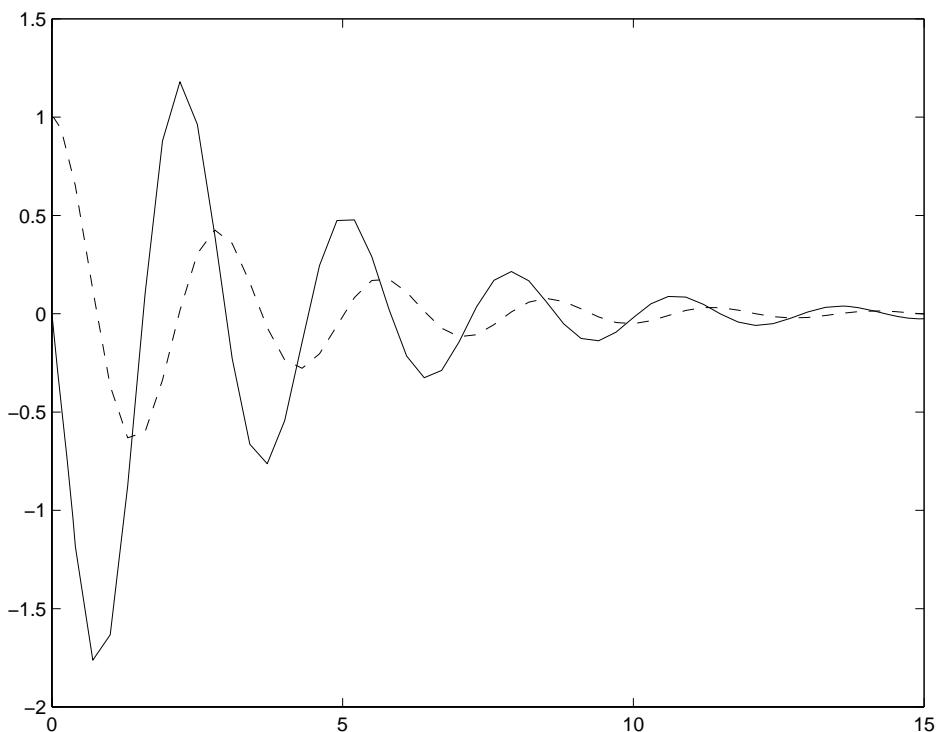


Figura 8. Señal de error (- -). Derivada
del error (-)

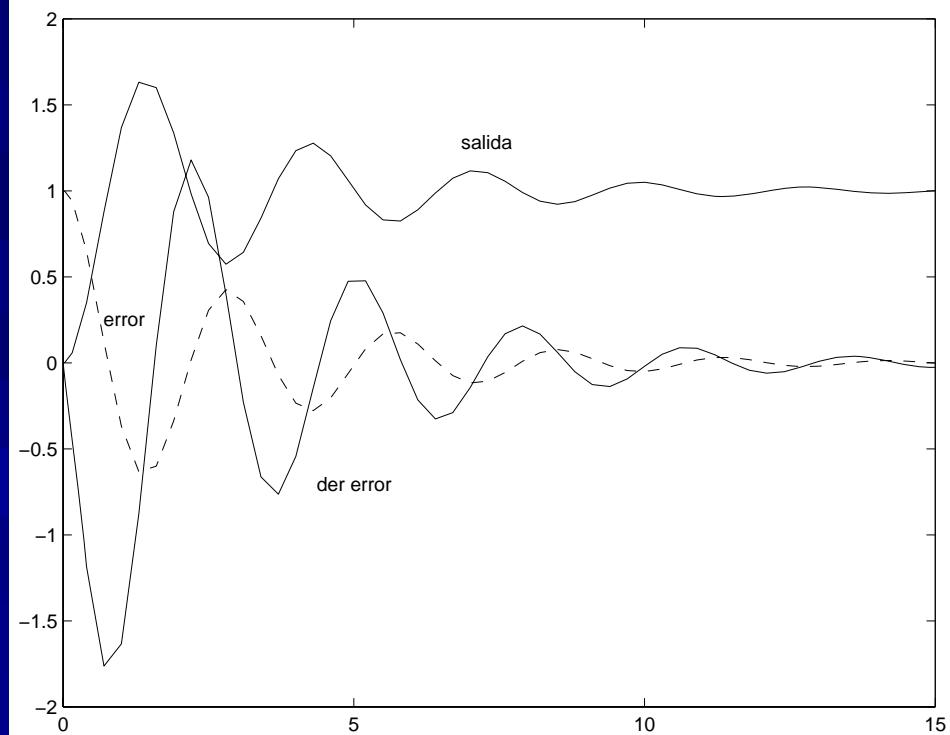


Figura 9. Salida, error, derivada del error

Interpretación del Controlador PD: dominio temporal

El control Proporcional tiende a producir grandes sobrepasos y oscilaciones debido a la magnitud del error, que genera acciones de control positivas muy elevadas y sucesivas acciones de control negativas poco adecuadas en relación al sobrepaso que se está generando

La incorporación de la acción derivativa **compensa** el efecto del control proporcional disminuyendo la magnitud de la acción de control positiva y aumentando negativamente las acciones de control negativas cuando es necesario a fin de reducir los sobrepasos.

Efectos → Reducir los sobrepasos negativos y positivos

Interpretación del Controlador PD: dominio frecuencial

El control PD se comporta como un filtro **paso alto**, agregando fase positiva (adelanto de fase) al sistema no compensado.

Esta característica permite:

- Mejorar al margen de fase de un sistema de control y en consecuencia mejorar la estabilidad relativa del sistema
- La curva de magnitud del controlador “empuja” la frecuencia de cruce de ganancia hacia un valor mas alto.
- Incremento del ancho de banda: reduce los tiempos de respuesta pero acentúa los ruidos a alta frecuencia.

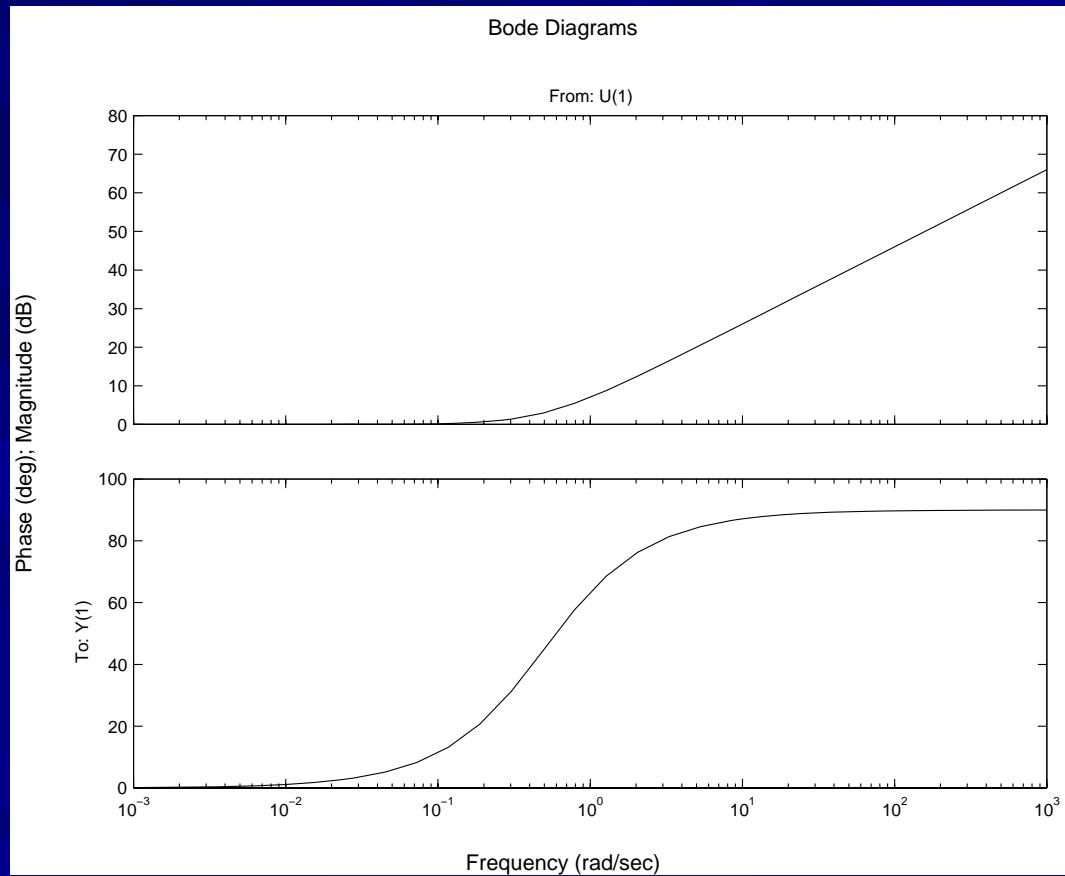


Figura 10. Diagrama de Bode del control PD

Interpretación del Controlador PD: lugar de las raíces

La adición del cero en lazo abierto produce un desplazamiento del lugar de las raíces del sistema no compensado hacia la izquierda. Este nuevo cero “atrae” una de las ramas y mejorando la estabilidad relativa del sistema (disminuye el número de ramas hacia el infinito)

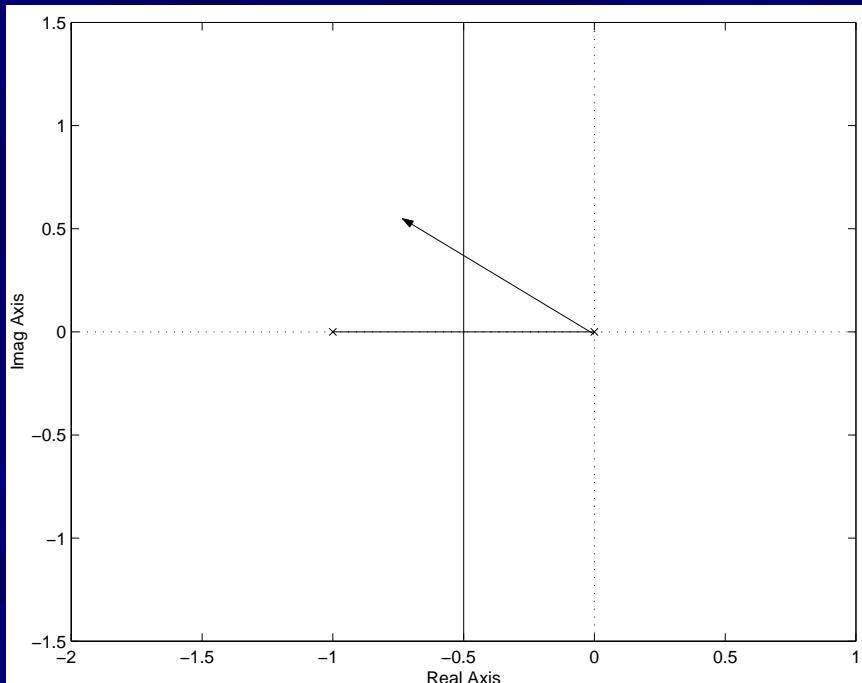


Figura 11. LR de un sistema de 2do. orden

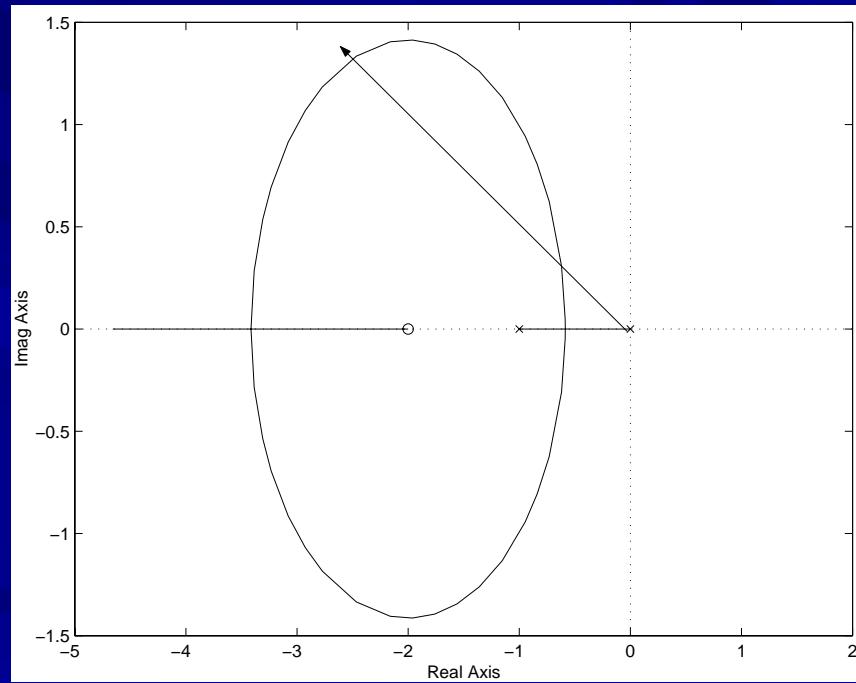


Figura 12. Efectos del control PD sobre el lugar de las raíces de la fig.11

Interpretación del Controlador PD: lugar de las raíces

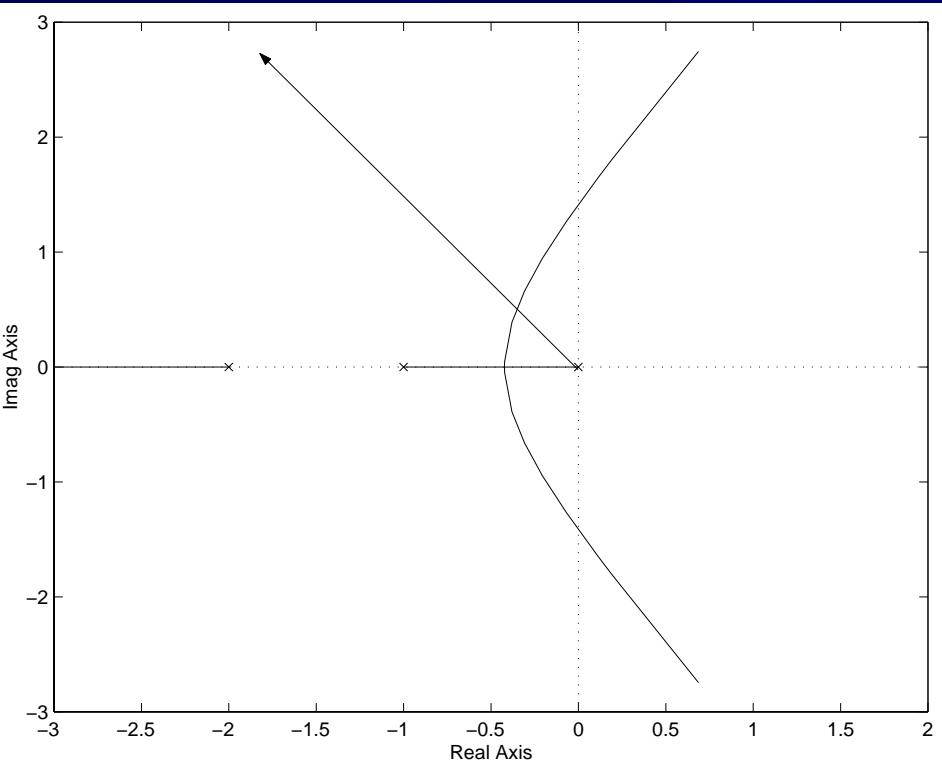


Figura 13. LR de un sistema de 3er. orden.

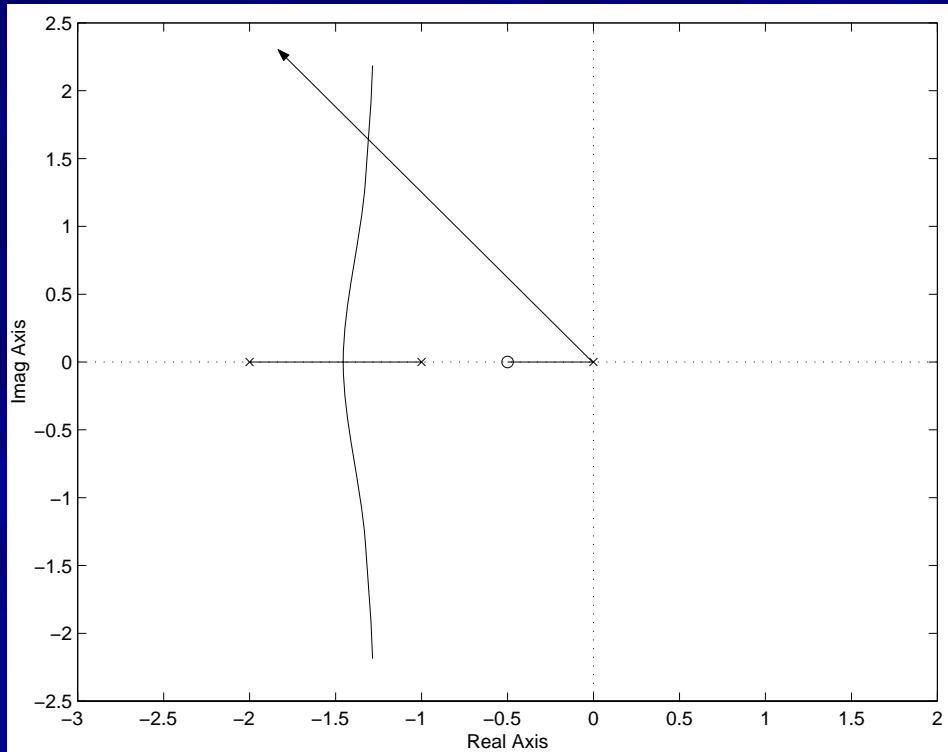


Figura 14. Efectos del un control PD sobre el lugar de las raíces de la fig.13

Interpretación del Controlador PD: lugar de las raíces

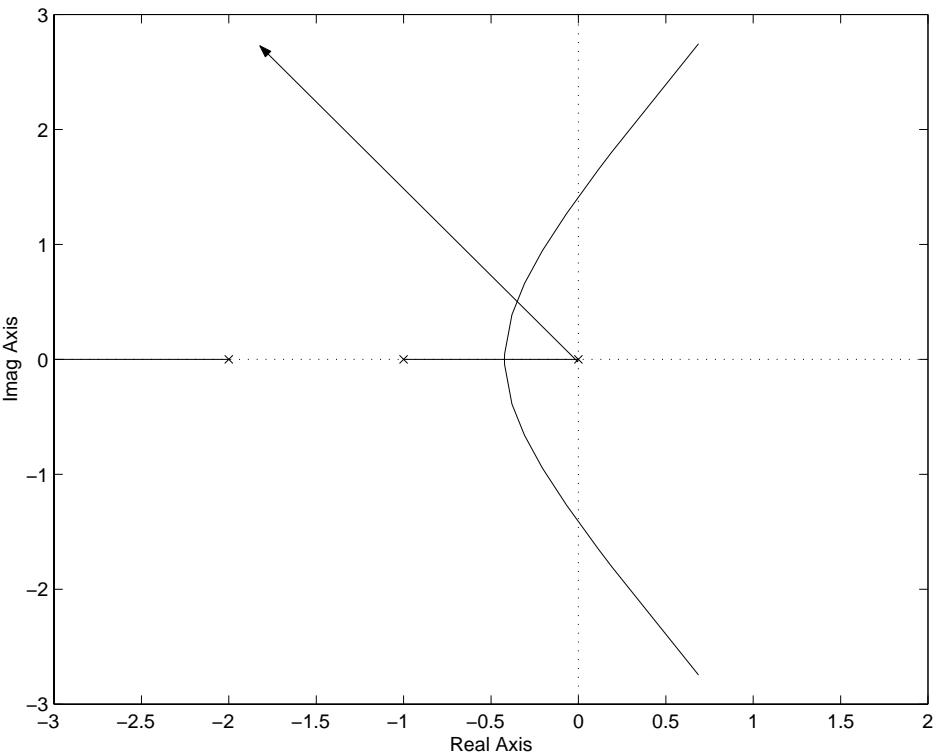


Figura 15. LR de un sistema de 3er. orden.

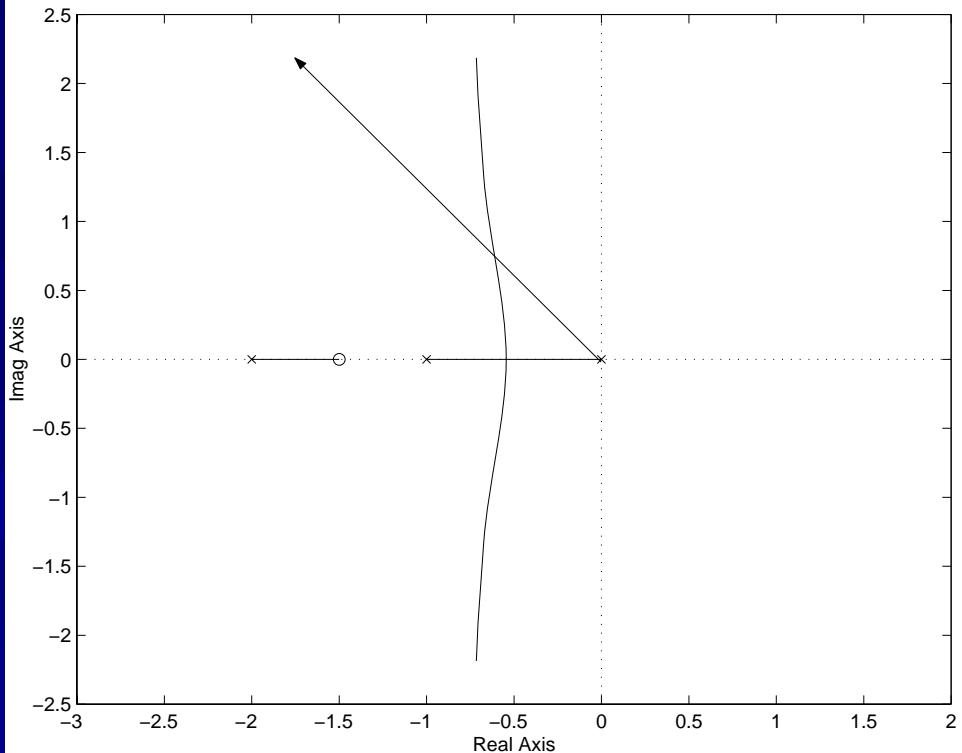


Figura 16. Efectos del un control PD sobre el lugar de las raíces de la fig.15

Interpretación del Controlador PD: lugar de las raíces

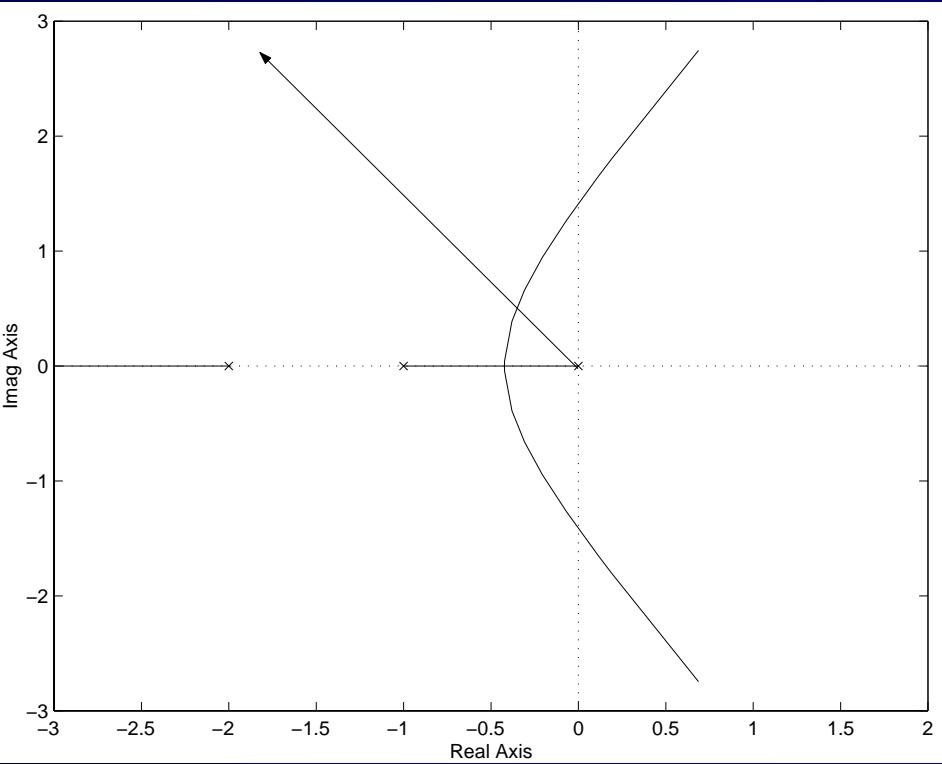


Figura 17. LR de un sistema de 3er. orden.

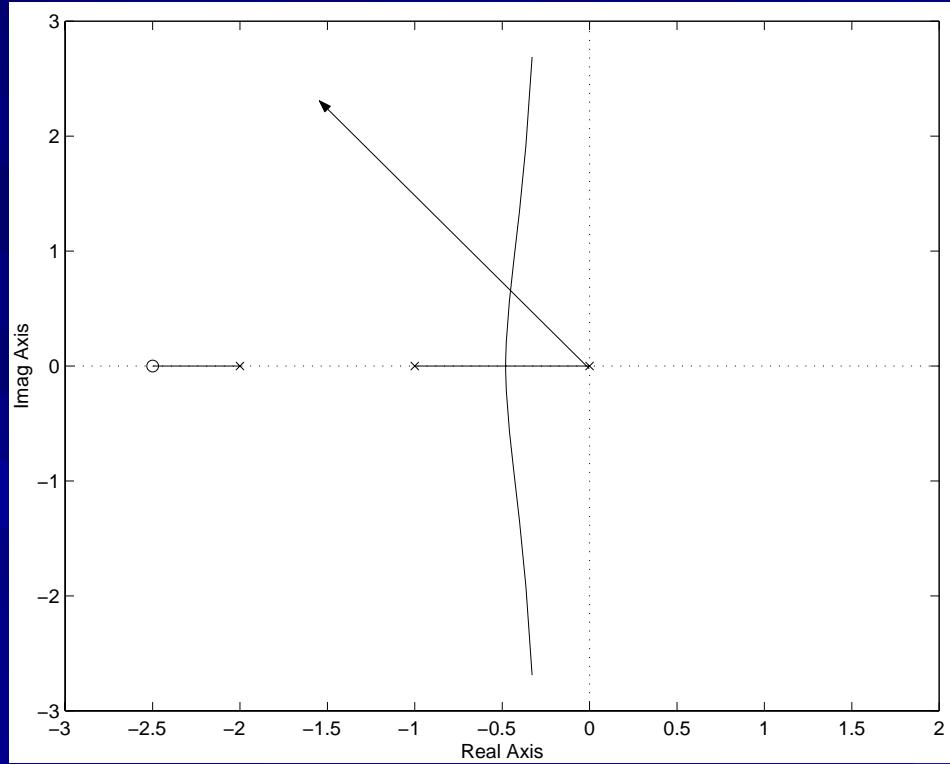


Figura 18. Efectos del un control PD sobre el lugar de las raíces de la fig.17

Diseño del Controlador PD: Método del lugar de las raíces (Algoritmo I)

Principio de diseño

Evaluar la contribución angular del sistema no compensado en el punto de diseño (polo en lazo cerrado asociado a una respuesta transitoria específica). La diferencia con +/-180° debe ser la contribución angular del cero del controlador.

La ganancia del controlador se ajusta posteriormente, a partir de la condición de magnitud. Dicha ganancia puede no satisfacer una condición de error estable.

Algoritmo de diseño I

Sea $G_p(s)$ la función de transferencia de la planta:

$$G_p(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m s + z_i}{s^q \prod_{j=1}^n s + p_j} \quad (1)$$

y $s_0 = -\sigma + j\omega$ un polo asociado a un conjunto de especificaciones temporales.

Denote como Z_c al cero del controlador, es decir:

$$z_c = -\frac{K_p}{K_d}$$

Diseño del Controlador PD: Método del lugar de las raíces (Algoritmo I)

1. Calcule el aporte de fase de $G(s)$ a $s=S_0$

$$\theta = \sum_{i=1}^m \theta_{(s+z_i)} \Big|_{s=-S_0} - \sum_{j=1}^n \theta_{(s+p_j)} \Big|_{s=-S_0} - q\theta_{(s)} \Big|_{s=-S_0} \quad (2)$$

2. Determine la fase a aportar por el controlador

$$\theta_c + \theta = -180^\circ \quad (3)$$

3. Calcule la localización de $-Z_c$, resolviendo

$$\theta_{z_c} \Big|_{-\sigma+j\omega} = \theta_c$$

$$(s+z_c) \Big|_{-\sigma+j\omega} = (-\sigma+z_c) + j\omega$$



$$\theta_c = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{-\sigma+z_c}$$



$$\frac{\omega}{-\sigma+z_c} = \operatorname{tg} \theta_c \quad (4)$$

Diseño del Controlador PD: Método del lugar de las raíces (Algoritmo I)

4. Ajuste la ganancia de lazo del sistema KK_d

$$G_c G_p(s) = KK_d(s + z_c) \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^q \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

Usando la condición de magnitud, encuentre Kd :

$$KK_d = \frac{q|s|_{s_0} \prod_{j=1}^n |s + p_j|_{s_0}}{|s + z_c|_{s_0} \prod_{i=1}^m |s + z_i|_{s_0}} \quad (5)$$

Finalmente determine Kp , a partir del conocimiento de $z_c = -\frac{K_p}{K_d}$

Diseño del Controlador PD: Método del lugar de las raíces (Algoritmo II)

Principio de diseño

Recordemos que la ganancia del sistema compensado viene dada por

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K(K_d s + K_p) \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^q \prod_{j=1}^n (s + p_j)} = KKp \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \quad (6)$$

Así, las constantes finitas de error de posición, de velocidad y de aceleración dependen del valor de la ganancia Kp del Controlador PD.

Algoritmo de diseño II

Sea $G_p(s)$ la función de transferencia de la planta ya definida en (1) y

$$s_0 = -\sigma + j\omega$$

un polo asociado a un conjunto de especificaciones temporales y

$$e_\infty < e_d \quad \text{una condición para el valor del error en estado estable.}$$

Diseño del Controlador PD: Método del lugar de las raíces (Algoritmo II)

1. Elija un valor de K_p que cumpla con las condiciones de error en estado estable.
2. Encuentre el lugar de las raíces del sistema compensado ante la variación del parámetro KK_d del sistema compensado. Verifique que existe un valor de dicho parámetro que aproxime a las especificaciones de comportamiento temporal y, a partir de dicho valor, encuentre el parámetro K_d del controlador.

¿Como encontrar dicho lugar de las raíces?

Recuerde:

$$1 + G_c G_p(s) = 0 \Rightarrow 1 + K(K_d s + K_p) \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^q \prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 0 \quad (8)$$

Tomando la variación de KK_d



$$1 + KK_d \frac{s \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^q \prod_{j=1}^n (s + p_j) + KK_p \prod_{i=1}^m (s + z_i)} = 0 \quad (9)$$

Diseño del Controlador PD: Método Analítico Basado en el lugar de las raíces

El método analítico parte de las siguientes suposiciones:

Sea $s_0 = -\sigma + j\omega$ un polo, en general complejo, asociado a una respuesta temporal deseada. Entonces,

$$\begin{aligned}s_0 &= -\sigma + j\omega = |s_o|e^{j\beta} \\ |s_o| &= \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}; \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\end{aligned}\quad (\text{a})$$

Por otro lado: $G_p(s_0) = |G_p(s_0)|e^{j\psi}; \quad \psi = \arg G_p(s_0) \neq \pm 180^\circ$ (\text{b})

y también: $G_p(s_0)G_c(s_0) = \alpha e^{j\lambda}; \quad \lambda = 180^\circ \text{ y } \alpha = 1$ (\text{c}) (ya que So está Sobre el LR del sistema compensado)

Sea θ_c la fase aportada por el controlador PD, entonces:

$$G_c(s_0) = |G_c(s_0)|e^{j\theta_c} \quad (\text{d})$$

Diseño del Controlador PD: Método Analítico Basado en el lugar de las raíces

A partir de la ecuación (c), se puede verificar que:

$$\left|G_c(s_0)\right| = \frac{1}{\left|G_p(s_0)\right|} \quad (\text{e}) \qquad \psi + \theta_c = \lambda = 180^\circ \quad (\text{f})$$

Entonces:

$$G_c(s_0) = K_p + K_d s_0 = K_p + K_d |s_0|(\cos \beta + j \sin \beta) = \frac{1}{\left|G_p(s_0)\right|} (\cos \theta_c + j \sin \theta_c) \quad (\text{g})$$

Igualando las partes imaginarias de (g)

$$K_d = \frac{\sin \theta_c}{\left|G_p(s_0)\right| |s_0| \sin \beta}$$

Sabiendo de (f) que $\theta_c = \lambda - \psi = 180^\circ - \psi$ y usando la identidad trigonométrica

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b) \quad \text{obtenemos que} \quad \sin \theta_c = \sin \psi$$

Diseño del Controlador PD: Método Analítico Basado en el lugar de las raíces

Se tiene finalmente que

$$K_d = \frac{\sin \psi}{|G_p(s_0)| |s_0| \sin \beta} \quad (h)$$

Igualando las partes reales de (g)

$$K_p + K_d |s_0| \cos \beta = \frac{\cos \theta_c}{|G_p(s_0)|} \quad (i)$$

Desarrollando (i), y usando (h) se tiene:

$$K_p = \frac{\sin \beta \cos \theta_c - \sin \psi \cos \beta}{|G_p(s_0)| \sin \beta} \quad (j)$$

Usando la igualdad (f) y las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$$

obtenemos que $\cos \theta_c = -\cos \psi$

$$\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a + b)$$

obtenemos que (j) se reescribe como:

$$K_p = \frac{-\sin(\psi + \beta)}{|G_p(s_0)| \sin \beta} \quad (j)$$

Usando (h) y (j) se diseña el controlador PD

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo I)

Principio de diseño

Localizar la frecuencia de corte del controlador $\omega_c = \frac{K_p}{K_d}$ para lograr una mejora en el margen de fase en la nueva frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado.

Algoritmo de diseño I

Sea $G_p(s)$ la función de transferencia de la planta:

$$G_p(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^q \prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (10)$$

Para propósitos de diseño en el dominio frecuencial, representemos a la función del transferencia del controlador de la siguiente manera:

$$G_c = K_p + K_d s = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right) = K_p \left(1 + \frac{1}{\omega_c} s\right) \quad (11)$$

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo I)

Tomando en cuenta la respuesta frecuencial:

$$G_c(j\omega) = K_p \left(1 + \frac{\omega}{\omega_c} j\right) \quad (12)$$

La fase de $G_c(j\omega)$ viene dada por: $\theta_c = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ (13)

Sea θ_m la fase aportada por el controlador en $\omega = \omega_m$. De esta manera:

$$\theta_m = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_m}{\omega_c}\right) \quad (13a)$$

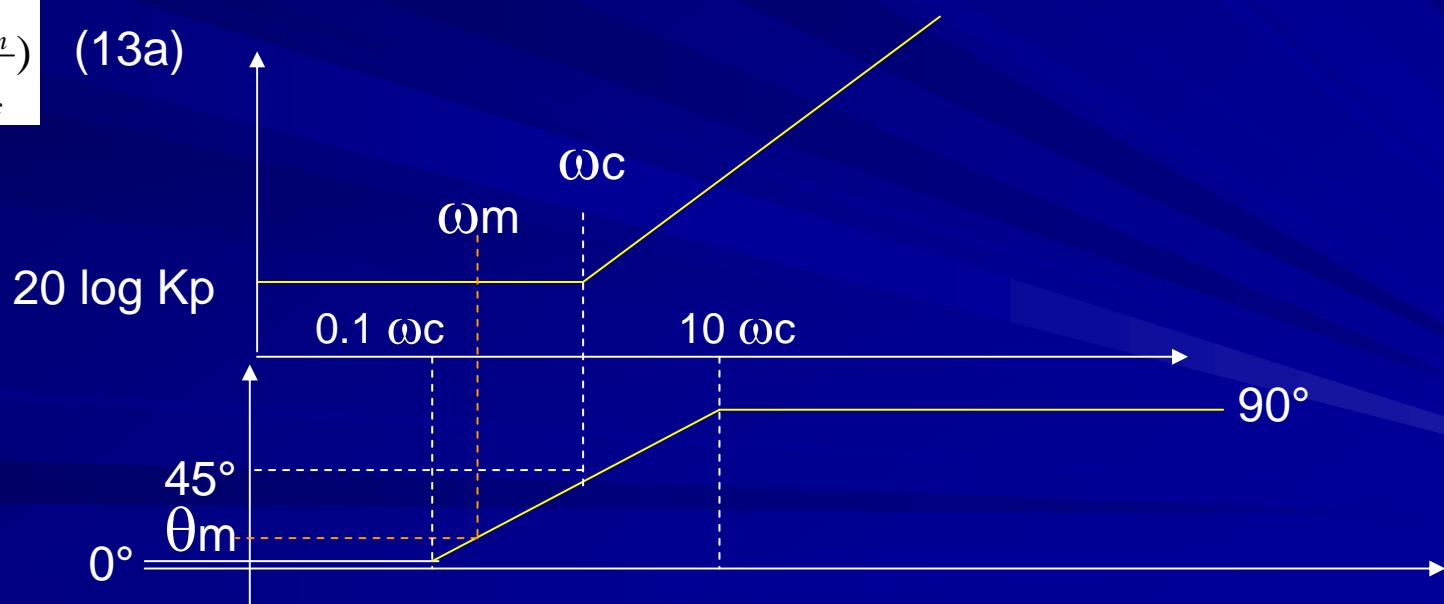


Figura 19. Diagrama de Bode del controlador PD

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo I)

El diseño en el dominio frecuencial se orienta para satisfacer otra especificación del dominio temporal, tomando en cuenta las siguientes ecuaciones que relacionan especificaciones de respuesta frecuencia con especificaciones de respuesta transitoria:

$$\Phi_M = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}} \quad (13b) \quad \text{Si} \quad \xi < 0.7 \quad \longrightarrow \quad \Phi_M = 0.01\xi$$

$$\operatorname{tg}\Phi_M = \frac{8}{\omega_g T_s} \quad (13c)$$

Φ_M es el margen de fase

ω_g es la frecuencia de cruce de ganancia

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo I)

1. Fije el valor de K_p para alcanzar la frecuencia de cruce de ganancia deseada ω_g
2. Dibuje el diagrama de Bode del sistema compensado con K_p , es decir, tome la siguiente planta:

$$G_p(s) = KK_p \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^q \prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (14)$$

3. Encuentre el margen de fase del sistema Φ_{MF} y determine la contribución angular θ_m del controlador, para alcanzar el margen de fase deseado θ_d . Recuerde agregar un poco más de fase deseada en virtud del desplazamiento de la frecuencia de cruce de ganancia ω_g del sistema no compensado por efecto de la incorporación del cero de controlador. Así,

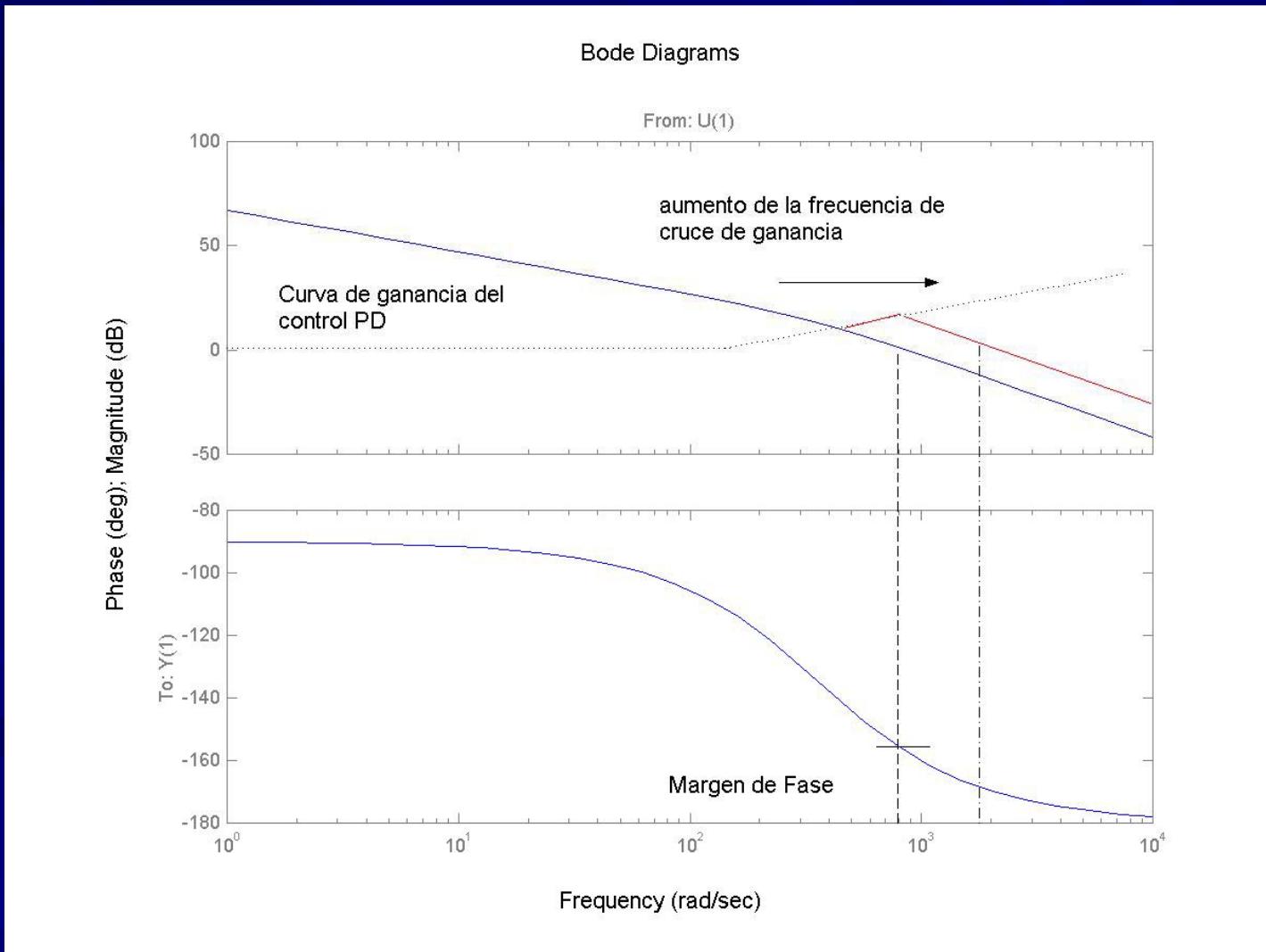
$$\theta_m = \theta_d - \Phi_{MF} + e_\theta \quad (15)$$

Donde e_θ representa el aumento de fase considerado

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo I)

4. Elija ω_c a la izquierda de la frecuencia de cruce de ganancia si $\theta_c > 45^\circ$ ó a la derecha si $\theta_c < 45^\circ$. Puede obtenerse un estimado solucionando la ecuación (13a) para $\omega_m = \omega_g$.
5. Dibuje el nuevo Diagrama de Bode compensado y ajuste el controlador si es necesario.

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo I)



Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo II)

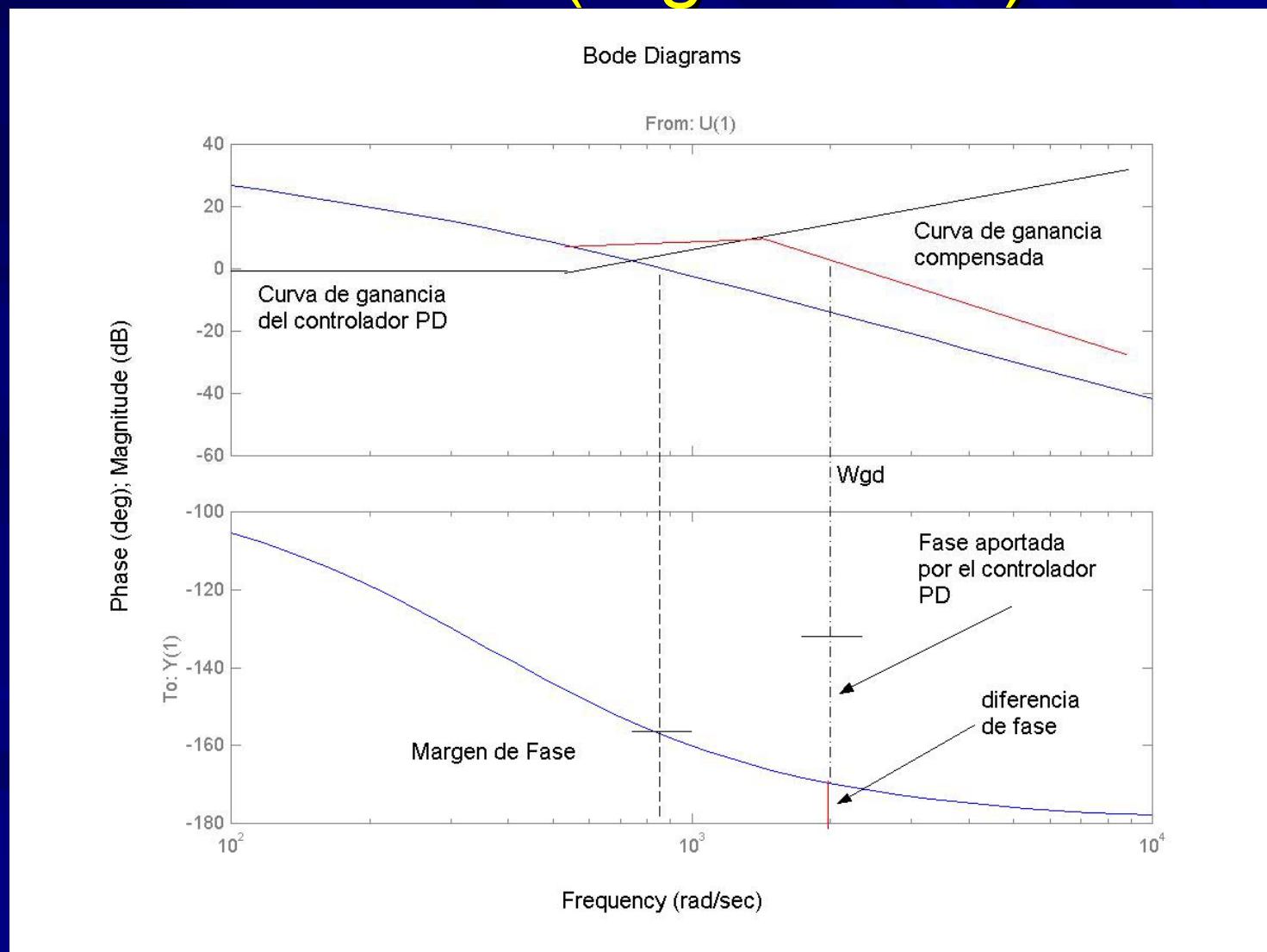
Principio de diseño

Seleccionar la frecuencia de corte del controlador para lograr el margen de fase deseado en dicha frecuencia, satisfaciendo requerimientos de error en estado estable.

Algoritmo de diseño II

1. Dado un margen de fase deseado θ_d y un tiempo de respuesta deseado T_s , encuentre la frecuencia de cruce de ganancia ω_{gd} deseada usando la ecuación (16).
2. Elija un valor de K_p que satisfaga requerimientos de error en estado estable
3. Dibuje el diagrama de Bode del sistema dado en la ecuación (14).
4. Ubique la frecuencia ω_{gd} y compare respecto a la frecuencia de cruce de ganancia actual. Si es posible alcanzar ω_{gd} , entonces escoga la frecuencia de corte del controlador para lograr el margen de fase deseado, según el algoritmo anterior.

Diseño del Controlador PD: Método frecuencial (Algoritmo II)



Diseño del Controlador PD: Método Analítico Basado en la Respuesta Frecuencial

El siguiente método analítico está basado en asumir que el sistema compensado alcanzará el margen de fase deseado θ_d en una frecuencia de cruce de ganancia deseada ω_{gd} . Esto es:

$$|G_c G_p(j\omega_{gd})| \approx 1 \quad (17)$$

$$\arg G_c G_p(j\omega_{gd}) \approx -180^\circ + \theta_d \quad (18)$$

Entonces, si θ_c es la fase que debe aportar el controlador para cumplir con (18), se tiene que:

$$G_c(j\omega_{gd}) = K_p + jK_d\omega_{gd} = |G_c(j\omega_{gd})|(\cos \theta_c + j \sin \theta_c) \quad (19)$$

Usando (17)



$$K_p + jK_d\omega_{gd} = \frac{1}{|G_p(j\omega_{gd})|}(\cos \theta_c + j \sin \theta_c) \quad (20)$$

Diseño del Controlador PD: Método Analítico Basado en la Respuesta Frecuencial

Algoritmo de diseño

Siguiendo el principio de diseño del algoritmo II basado usando respuesta frecuencial, sea ω_{gd} la frecuencia de cruce de ganancia deseada para el sistema compensado y θ_c la fase que debe aportar el controlador PD para alcanzar el margen de fase deseado θ_d

Entonces, igualando las partes reales e imaginarias de ambos lados de la ecuación (20), se tiene:

$$K_p = \frac{\cos \theta_c}{\left|G_p(s)\right|_{s=j\omega_{gd}}} \quad (21)$$

$$K_d = \frac{\sin \theta_c}{\omega_{gd} \left|G_p(s)\right|_{s=j\omega_{gd}}} \quad (22)$$

$$\text{Observe que de (18), se tiene que: } \theta_c = \arg G_c(j\omega_{gd}) = -180^\circ + \theta_d - \arg G_p(j\omega_{gd}) \quad (23)$$

Y esto no es más que lo expresado en la ecuación (15) pero con relación a la frecuencia de cruce de ganancia deseada ω_{gd} como se plantea en el algoritmo I Usando el método frecuencial !!!.