



# Diseño de Controladores PID

---

Sistemas de Control  
Prof. Mariela CERRADA

# Controlador del tipo PI: Mejorando la respuesta estacionaria

- Los controladores del tipo PI solo incorporan las acciones Proporcionales Integrales, aumentando en 1 el tipo del sistema y, en consecuencia, permiten incorporar mejoras sobre la respuesta estacionaria.

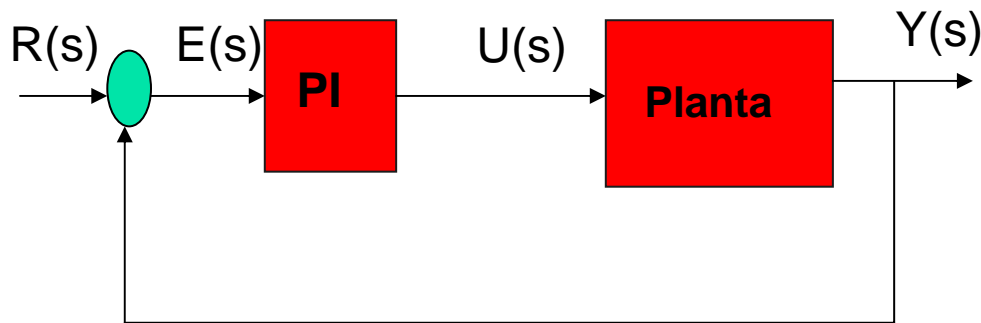


Figura 1. Compensación PI

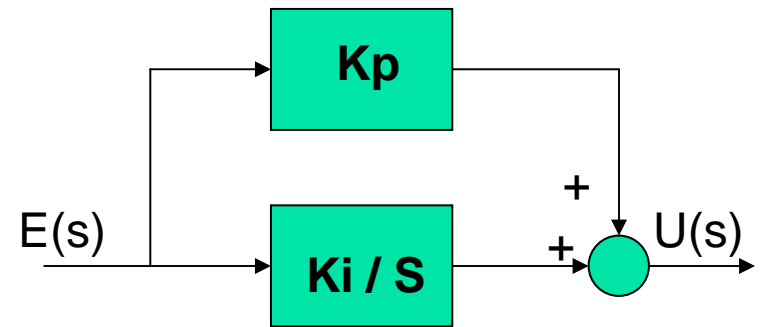
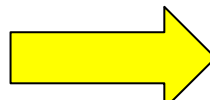


Figura 2. Control PI

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt$$



$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{1}{s} E(s)$$

Función de Transferencia  
del Controlador

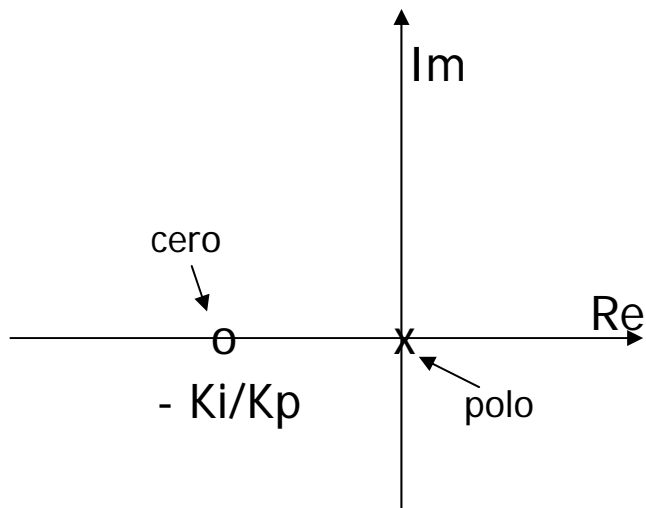
$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_i + K_p s}{s} = \frac{K_p (s + \frac{K_i}{K_p})}{s}$$

# Interpretación del Controlador PI: dominio temporal

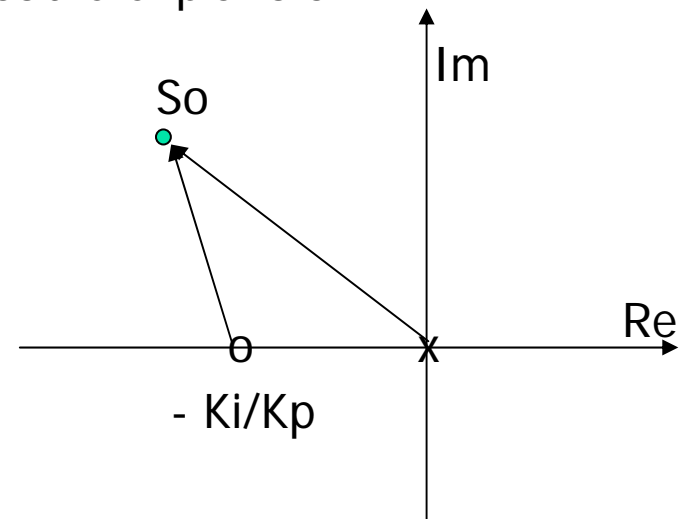
- El efecto del controlador PI es incorporar un polo en el origen y un cero en  $z_c = -K_i/K_p$  en la cadena directa. La ganancia  $K_p$  permite ajustar la ganancia del sistema compensado.

Observar que:  $|Z_c| > |p|$

Esto hace que el controlador PI agregue fase negativa sobre un punto  $S_0$  de referencia sobre el plano  $s$



**Figura 3.** Posición relativa de polos y ceros en un PI





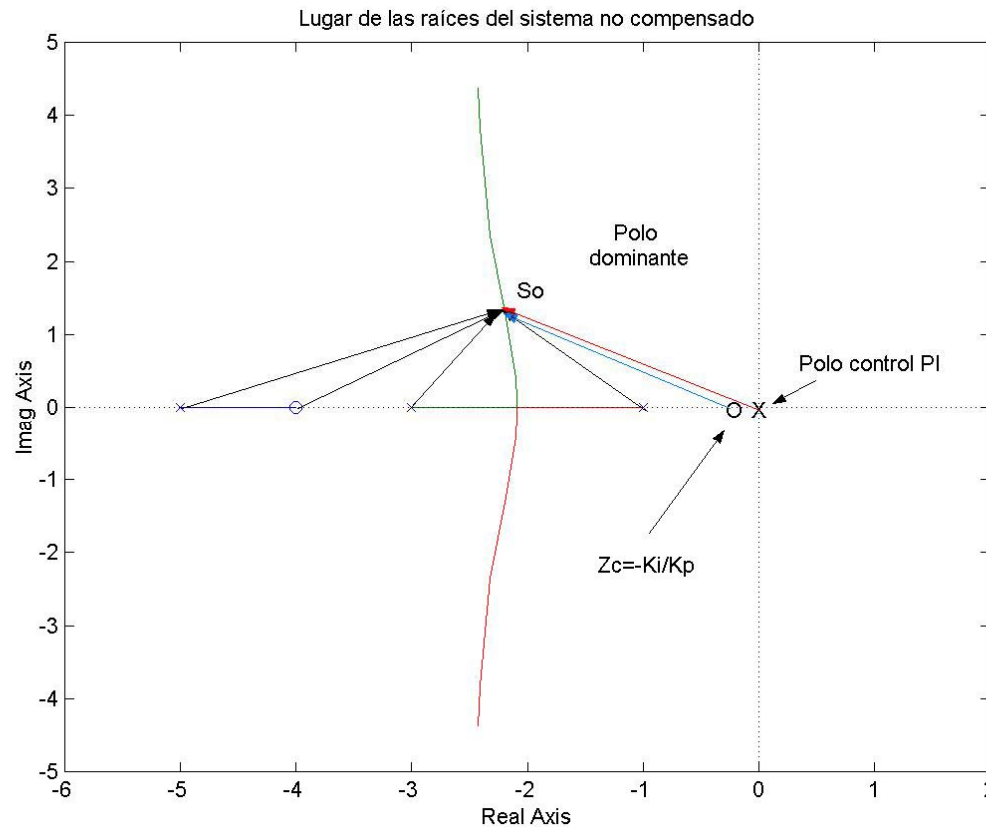
# Interpretación del Controlador PI: dominio temporal

---

El controlador PI tiende a trasladar hacia la derecha el lugar de las raíces del sistema compensado, es decir, hacia la región inestable (contrariamente al efecto del control PD). En consecuencia:

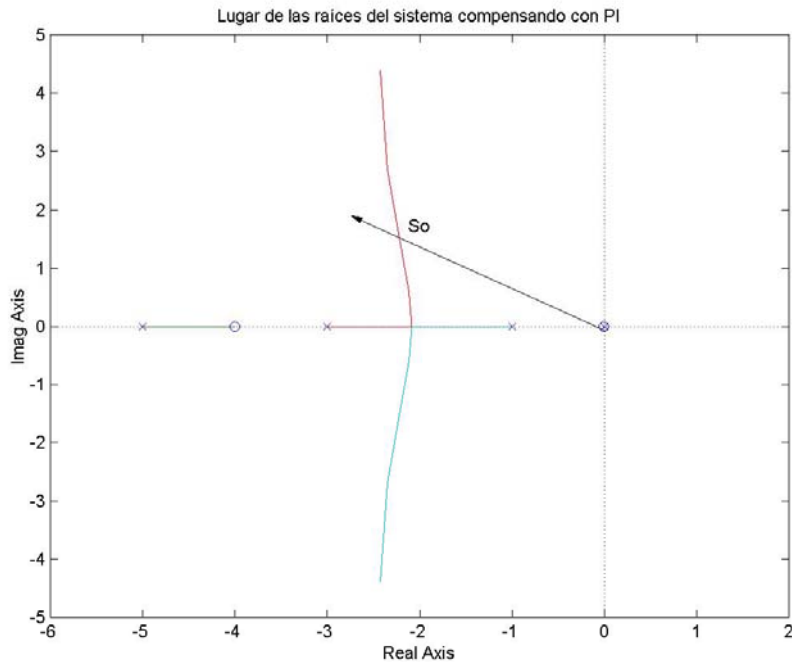
El tiempo de asentamiento puede hacerse más largo y desmejorarse el amortiguamiento si el compensador no está bien diseñado

# Interpretación del Controlador PI: Lugar de las raíces

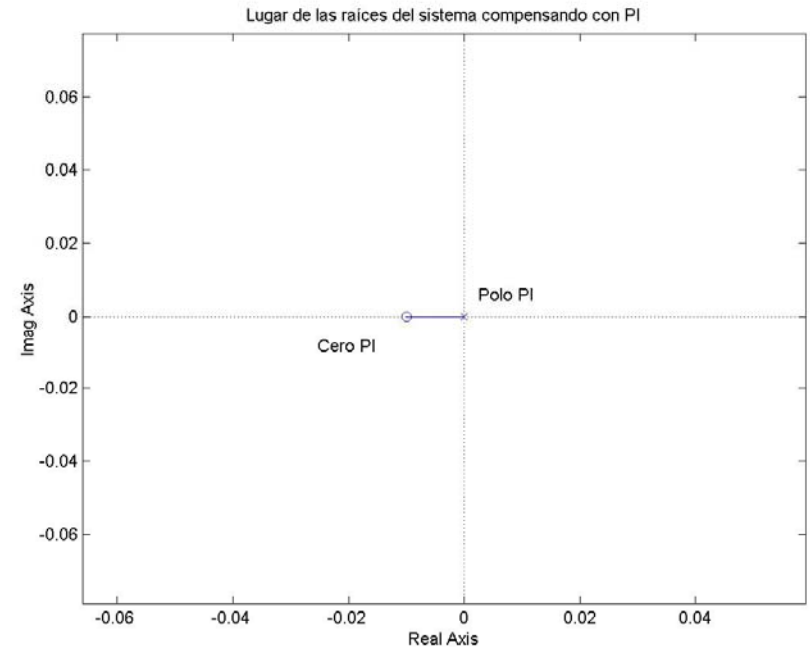


**Figura 4.** Incorporación de un control PI (aporte de Fase)

# Interpretación del Controlador PI: Lugar de las raíces



**Figura 5.** Sistema Compensado con PI



**Figura 6.** Sistema Compensado con PI (Zoom)

# Interpretación del Controlador PI: dominio frecuencial

El control PI se comporta como un filtro **pasa baja**, agregando fase negativa (retraso de fase) al sistema no compensado.

Esta característica permite:

- Mejorar el margen de ganancia, pero puede perjudicar la estabilidad, según la posición de la frecuencia de corte.
- Si  $K_p < 1$ , La curva de magnitud del controlador tiene un efecto atenuante, "empujando" la frecuencia de cruce de ganancia hacia un valor mas bajo, disminuyendo el ancho de banda. Esto filtra los ruidos a alta frecuencia pero aumenta los tiempos de respuesta. El margen de fase pudiera mejorarse.

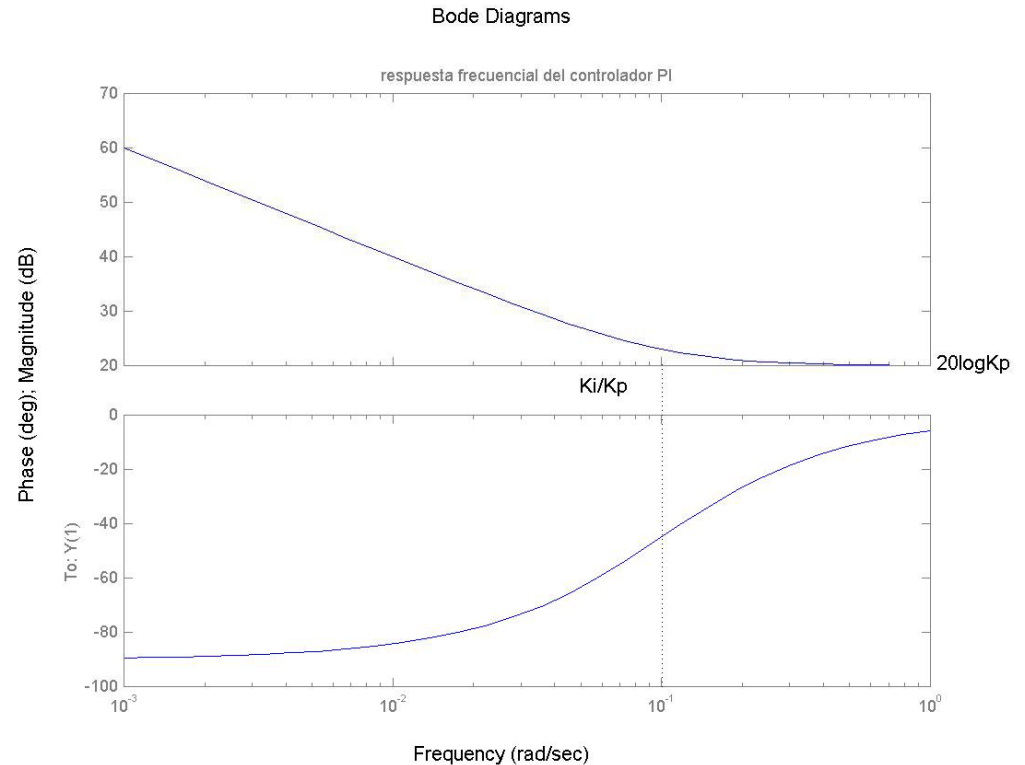


Figura 7. Diagrama de Bode del control PI



# Diseño del Controlador PI

## Principio general de diseño

Aún cuando el controlador PI está concebido para mejorar el error en estado estacionario, este puede diseñarse para lograr algunas mejoras en el estado transitorio. Sin embargo, teniendo en cuenta que el controlador PD puede ser usado para lograr las mejoras en el régimen transitorio de manera adecuada, el PI será diseñado para minimizar, en lo posible, el deterioro del desempeño transitorio que actualmente tiene el sistema, bien sea no compensado o previamente compensado por un control del tipo PD (adelanto de fase). Esto es asegurado localizando el cero del controlador muy cerca del polo en origen, con valores de  $K_p$  alrededor de 1.



# Diseño del Controlador PI: Método del lugar de las raíces

## Principio de diseño

La contribución angular del controlador PI debe ser muy pequeña para generar un cambio insignificante sobre el lugar de las raíces actual, el cual satisface un comportamiento en estado transitorio determinado.

La ganancia  $K_i$  del controlador se ajusta, a partir de la condición de magnitud, para satisfacer una condición de error en estado estable.

## Enfoque de diseño I

Sea  $G_p(s)$  la función de transferencia de la planta:

$$G_p(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m s + z_i}{s^q \prod_{j=1}^n s + p_j} \quad (1)$$

Sean  $e_\infty < e_d$  una condición de error en estado estable que produce

una constante de error  $Ke$  y  $S_0$  un polo del sistema en lazo cerrado, determinando el comportamiento transitorio deseado.

# Diseño del Controlador PI: Método del lugar de las raíces.

Denote como  $z_c$  al cero del controlador, es decir:  $z_c = -\frac{K_i}{K_p}$

1. Elija un valor muy pequeño de  $z_c$ .
2. Elija el valor de  $K_i$  para satisfacer condiciones de error en estado estable, resolviendo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{q+1} G_c(s) G_p(s) = \frac{K_p (s + \frac{K_i}{K_p})}{s} G_p(s) = K_{ed}; \quad (2)$$

3. Resuelva la siguiente ecuación, para  $K_p$ :  $K_p = \frac{K_i}{z_c} \quad (3)$

4. Dibuje el lugar de las raíces del sistema compensado y encuentre el punto  $S$  que ocurre para  $KK_p$ . **Verifique su cercanía al punto deseado *So* y elija un nuevo valor para  $K_p$  si es necesario.**

# Diseño del Controlador PI: Método del lugar de las raíces.

El diseño del controlador también puede idearse para no satisfacer una determinada cota de error. En este sentido, el aumento del tipo del sistema compensado es considerado como condición suficiente.

## Enfoque de diseño II

1. Elija un valor muy pequeño de  $Z_c$ .
2. Dibuje el lugar de las raíces del sistema compensado y encuentre el valor de ganancia  $KK_p$ . Para el cual el punto deseado  $S_0$  (o uno muy cercano a él) pertenece al Lugar de las raíces. *Encuentre el valor de  $K_p$* . Recuerde la FT en LA:

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K_p(s + \frac{K_i}{K_p})}{s} G_p(s)$$

3. Resuelva para  $K_i$ :

$$z_c K_p = K_i \quad (4)$$

# Diseño del Controlador PI: Método frecuencial

## Principio de diseño

Localizar la frecuencia de corte del controlador  $\omega_c = \frac{K_i}{K_p}$  con un valor de  $K_i$  que permita lograr especificaciones de error en estado estable.

## Enfoque de diseño I

Sea  $G_p(s)$  la función de transferencia de la planta:

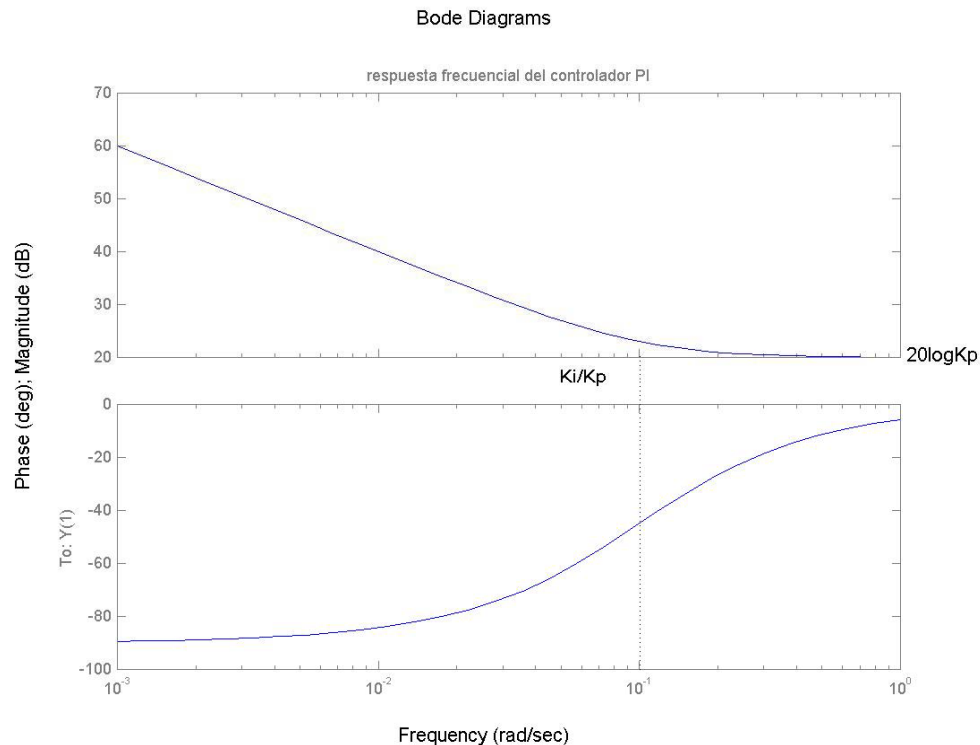
$$G_p(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m s + z_i}{s^q \prod_{j=1}^n s + p_j} \quad (5)$$

Para propósitos de diseño en el dominio frecuencial, representemos a la función de transferencia del controlador de la siguiente manera:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_i + K_p s}{s} = \frac{K_i \left( \frac{1}{\omega_o} s + 1 \right)}{s} \quad (6)$$

# Diseño del Controlador PI: Método frecuencial

Recordemos la respuesta frecuencial de controlador PI



1. En las altas frecuencias la curva de magnitud del sistema no compensado podrá ser atenuado por efecto del valor de  $20 \log K_p$
2. En las altas frecuencias, el aporte de fase del control PI es  $0^\circ$

**Figura 8.** Diagrama de Bode del controlador PI

# Diseño del Controlador PI: Método frecuencial

1. Dibuje el diagrama de Bode del sistema no compensado y encuentre la frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase
2. Fije el valor de  $K_i$  para satisfacer requerimientos de error en estado estable.
3. Elija un valor muy pequeño de la frecuencia de corte del compensador ( $\omega_o = K_i/K_p$ ) al menos una década por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia.
4. Dibuje el diagrama de Bode del sistema compensado y verifique el nuevo margen de fase.
5. Si no se cumple el margen de fase deseado relocalice el cero del controlador (frecuencia de corte mas pequeña) y recalcule el valor de  $K_p$

# Diseño del Controlador PI: Método frecuencial

## Principio de diseño

Elegir el valor de  $K_p$  para proporcionar un factor de atenuación adecuado sobre la curva de magnitud del sistema no compensado con el fin de lograr el margen de fase deseado.

## Enfoque de diseño II

1. Dibuje el diagrama de Bode del sistema no compensado.
2. Encuentre el valor de frecuencia para el cual se logra el margen de fase deseado  $\theta_d$ . Denote a esta frecuencia como la frecuencia de cruce de ganancia deseada  $\omega_{gd}$ .
3. Elija el valor de  $K_p$  para lograr una atenuación de magnitud, tal que el sistema compensado logre la frecuencia de cruce de ganancia en  $\omega_{gd}$ . En efecto, el valor de  $K_p$  viene dado por:

$$20 \log K_p = -|G_p(\omega_{gd} j)| \quad (7)$$

$$K_p = 10^{-|G_p(\omega_{gd} j)|/20} \quad (8)$$

# Diseño del Controlador PI: Método frecuencial

4. Elegir

$$\omega_0 = \frac{K_i}{K_p} = \frac{\omega_{gd}}{10} \quad (9)$$

$$K_i = \frac{\omega_{gd}}{10} K_p \quad (10)$$

Otra forma de expresar la ecuación (8), no expresada en decibeles es:

$$\left| G_c(\omega_{gd} j) G_p(\omega_{gd} j) \right| \approx \left| K_p G_p(\omega_{gd} j) \right| \approx 1 \quad (11)$$

$$K_p = \frac{1}{\left| G_p(\omega_{gd} j) \right|} \quad (12)$$

Recuerde que alrededor de  $\omega_{gd}$ , la curva de ganancia es afectada solo por  $K_p$

Por otro lado, en virtud de la elección de la frecuencia de corte del controlador, en principio, a una década por debajo de  $\omega_{gd}$ , generalmente se incorpora un término correctivo de error de fase de  $5^\circ$ . Así,  $\omega_{gd}$  se elige para el cual la diferencia de fase es  $\theta_d + 5^\circ$ .