Universidad de Oviedo

INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Tema 4

Funciones de Sensibilidad

Sistemas Automáticos

EPSIG, 4º Ingeniería Industrial (Plan 2001)

Marzo de 2004

Situación del tema en la Asignatura

Análisis Dinámico de Sistemas
2º

Sistemas Automáticos
4º

Titulación de Ingeniero Industrial (Plan 2001)

BT I
El Problema del Control

BT II
Diseño de Reguladores

BT III
Aspectos Tecnológicos del Control

BT IV
Automatización Industrial

T1
Sistemas Automáticos

T2
Metodología de diseño de sistemas de control

T3
Realimentación (prácticas)

T4
Sensibilidad (3h)

Indice de la exposición

- **La sensibilidad en el proceso de diseño**
- **Noción de sensibilidad**
- **Funciones de sensibilidad**
- **Rechazo a perturbaciones**
- **Seguimiento de referencias**
- **Acción de control**
- **Análisis de las acciones P, PI, PD**
- **Robustez**
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- **Integral de Bode y limitaciones en el control**
- **Conclusiones**

Indice de la exposición

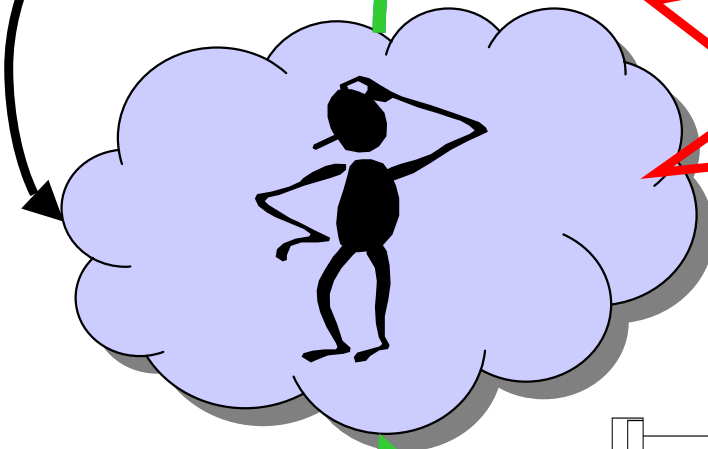
- **La sensibilidad en el proceso de diseño**
- **Noción de sensibilidad**
- **Funciones de sensibilidad**
- **Rechazo a perturbaciones**
- **Seguimiento de referencias**
- **Acción de control**
- **Análisis de las acciones P, PI, PD**
- **Robustez**
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- **Integral de Bode y limitaciones en el control**
- **Conclusiones**

Síntesis

Objetivos

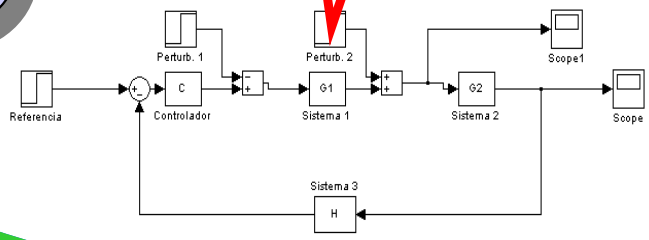
- *Estabilidad*
- *Seguimiento de referencias*
- *Perturbaciones de carga*
- *Ruido de medida*
- *Incertidumbres en el modelo*

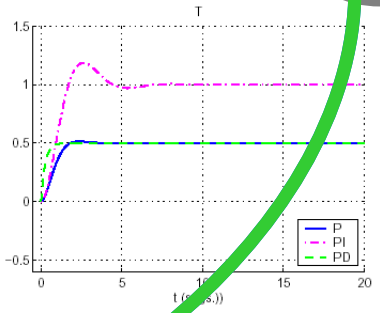
- *Síntesis directa*
- *Técnicas basadas en LR*
- *Técnicas frecuenciales*
- *Técnicas EE (Asig. polos, LQG, etc.)*

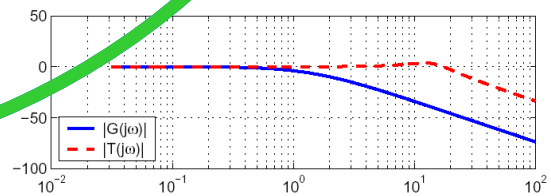


Solución Satisfactoria

Problema de Control







Análisis

El proceso de diseño se asemeja a un bucle de control...

proceso	→	diseño realizado, prototipo
referencia	→	especificaciones
acción de control	→	técnicas de síntesis
medida	→	técnicas de análisis

en definitiva...

el éxito en el diseño
no sólo depende de las técnicas de síntesis
sino también

de un buen ANÁLISIS

del diseño realizado

¿Qué analizar?

Grado de cumplimiento de los objetivos:

- Estabilidad
- Seguimiento de referencias
- Efecto de las perturbaciones

... pero también

- Acción de control
- Ruido de medida
- Incertidumbres en el modelo

Funciones de Sensibilidad

Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

Noción de Sensibilidad

Definiciones

Definición de la RAE:

Capacidad de respuesta a muy pequeñas excitaciones, estímulos o causas.

Definición más utilizada en Control:

Variación relativa de una función de transferencia frente a variaciones relativas de uno o más parámetros

$$S_q^G = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{q}{G}$$

Noción de Sensibilidad

$$S_q^G = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}{\frac{\Delta q}{q}}$$

Intuitivamente,
la sensibilidad tiene relación con:

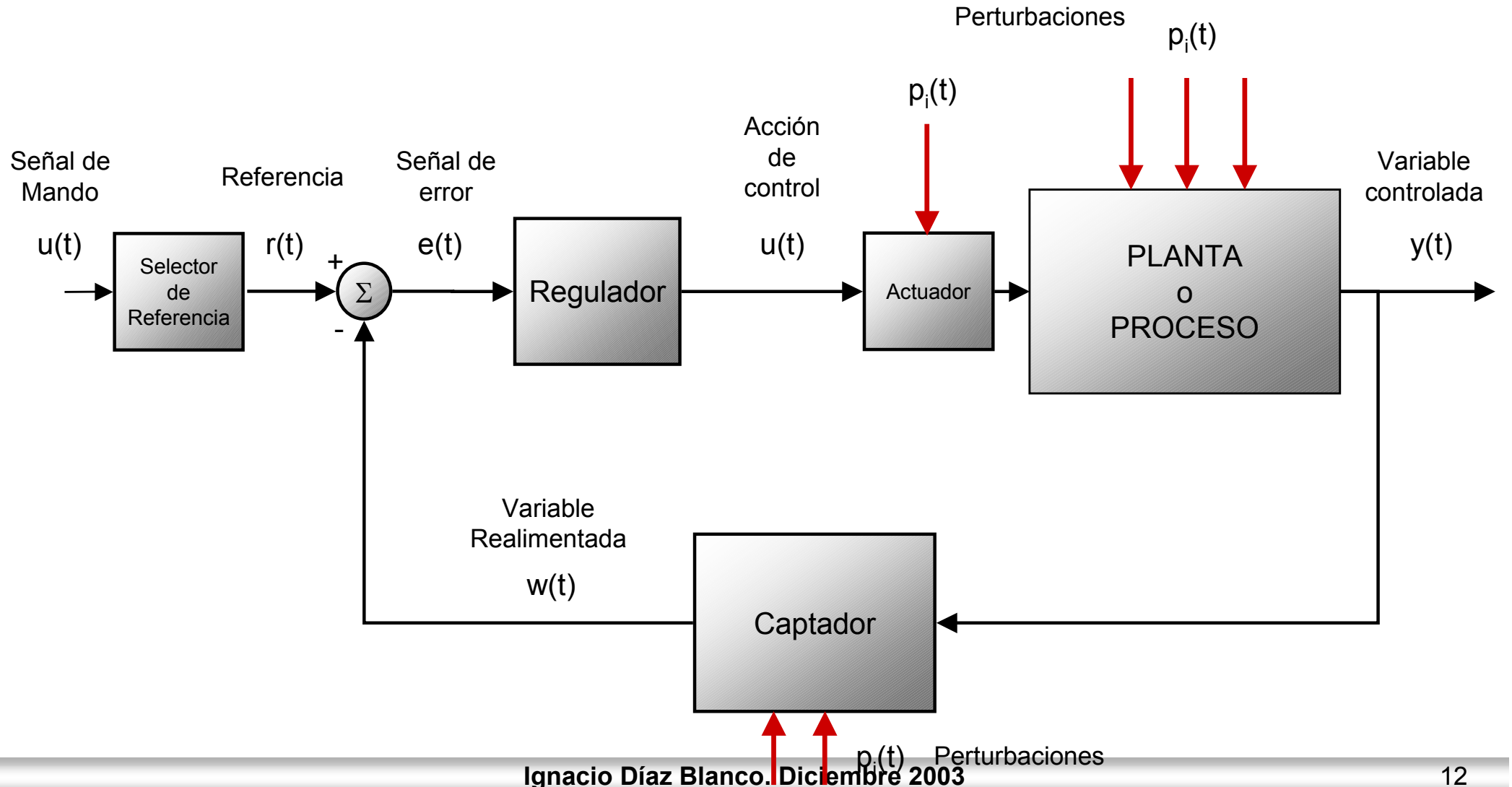
- **Respuesta ante cambios en la consigna**
- **Respuesta ante perturbaciones**
- **El efecto del ruido de medida**
- **La estabilidad relativa** *(muy sensible=fácil de inestabilizar)*
- **La robustez** (*muy sensible=poco robusto*)

Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- **Funciones de sensibilidad**
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

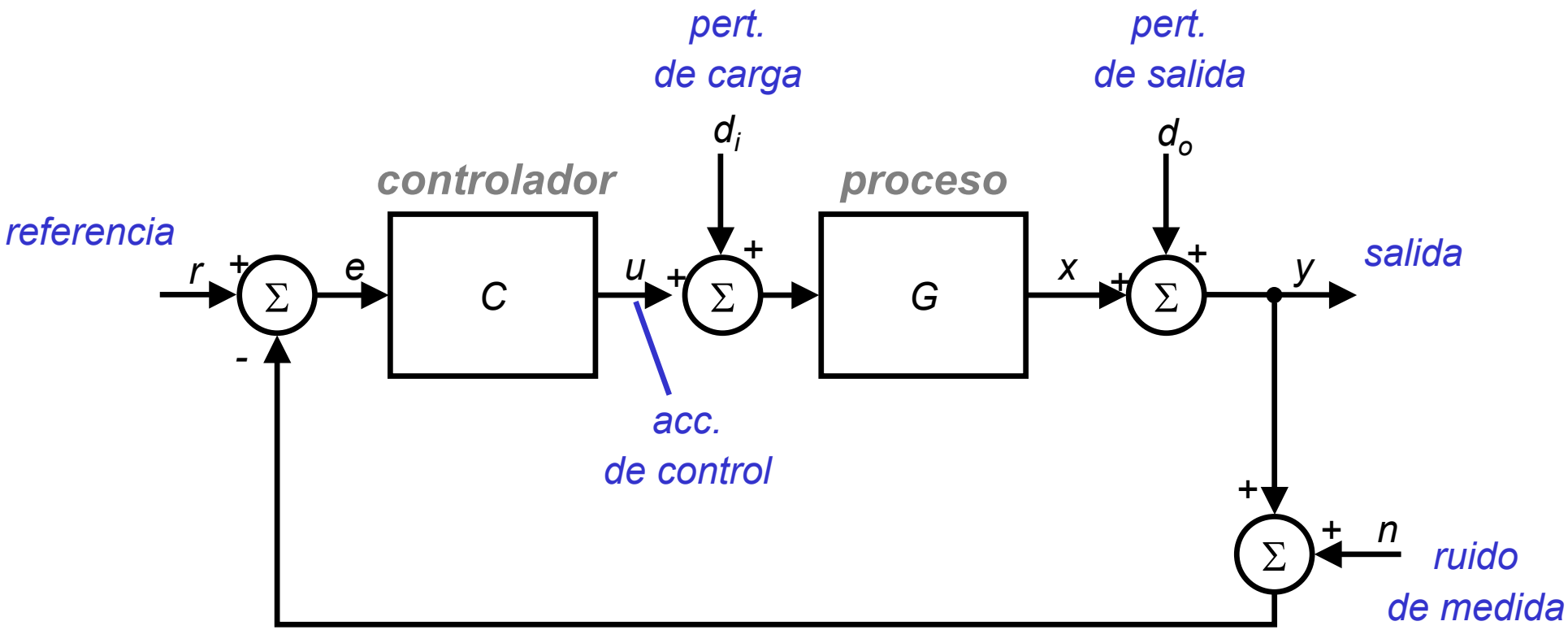
Funciones de sensibilidad

Bucle básico de control



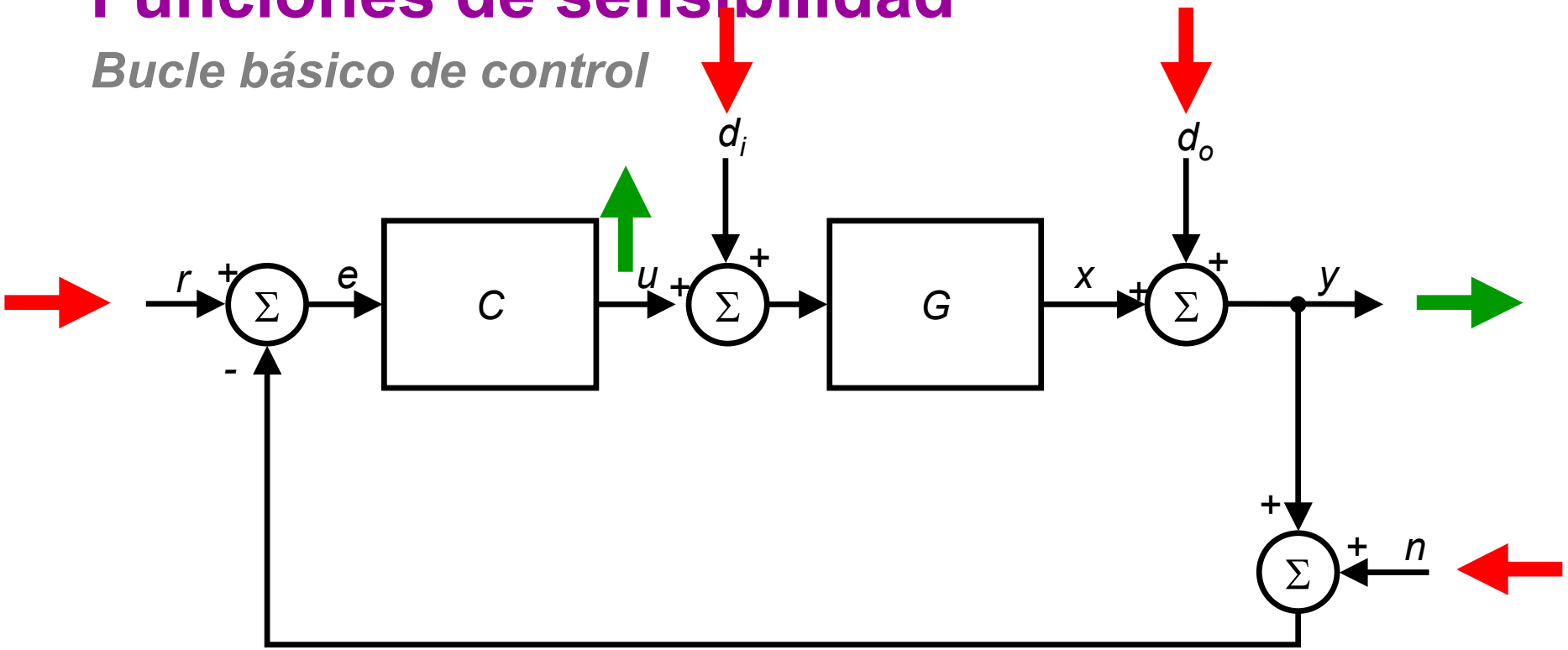
Funciones de sensibilidad

Bucle básico de control



Funciones de sensibilidad

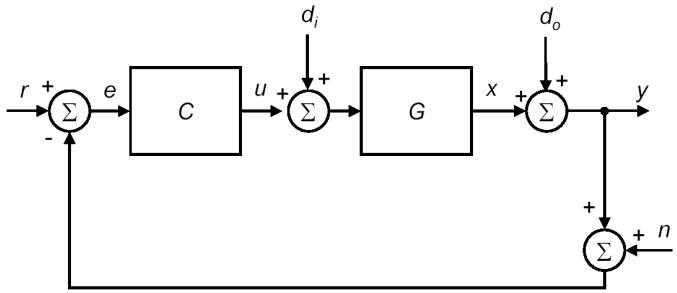
Bucle básico de control



$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N \\
U &= \frac{C}{1+GC}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \frac{C}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N
\end{aligned}
$$

Funciones de sensibilidad

Las 4 funciones de sensibilidad



$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N \\
U &= \frac{C}{1+GC}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \frac{C}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N
\end{aligned}
$$

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad***

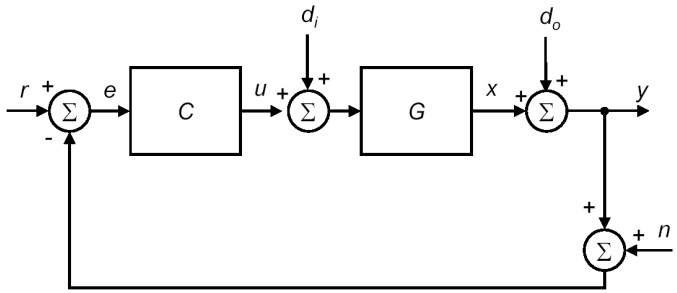
$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad complementaria***

$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad de entrada***

$$S_u(s) = \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad de control***

Funciones de sensibilidad

Observaciones



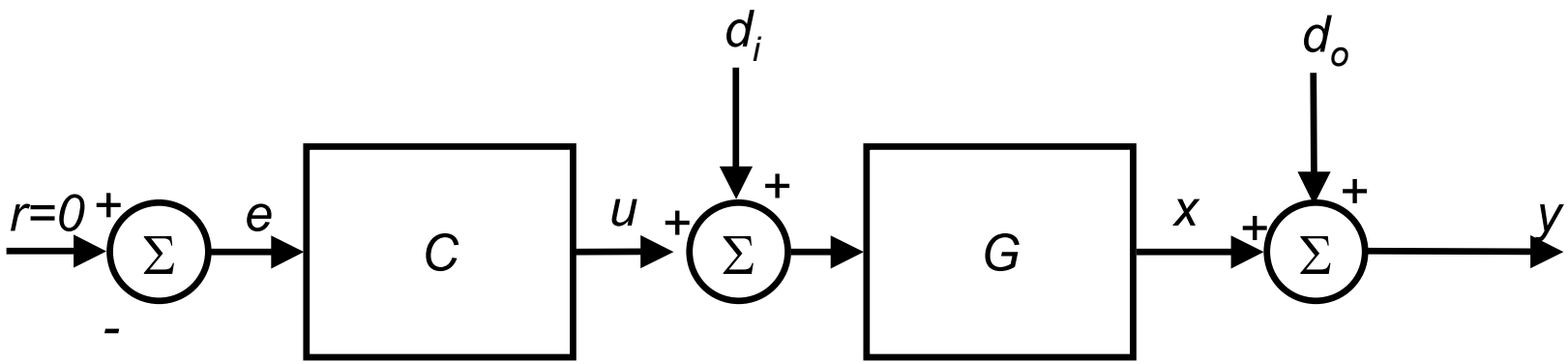
- *El sistema realimentado está caracterizado por 4 funciones de transferencia (S, T, S_u, S_i)*
- *Estas 4 funciones condensan toda la información sobre la respuesta del sistema*
- *Sus propiedades pueden mostrarse mediante su respuesta frecuencial o mediante su respuesta temporal*

Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- **Rechazo a perturbaciones**
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

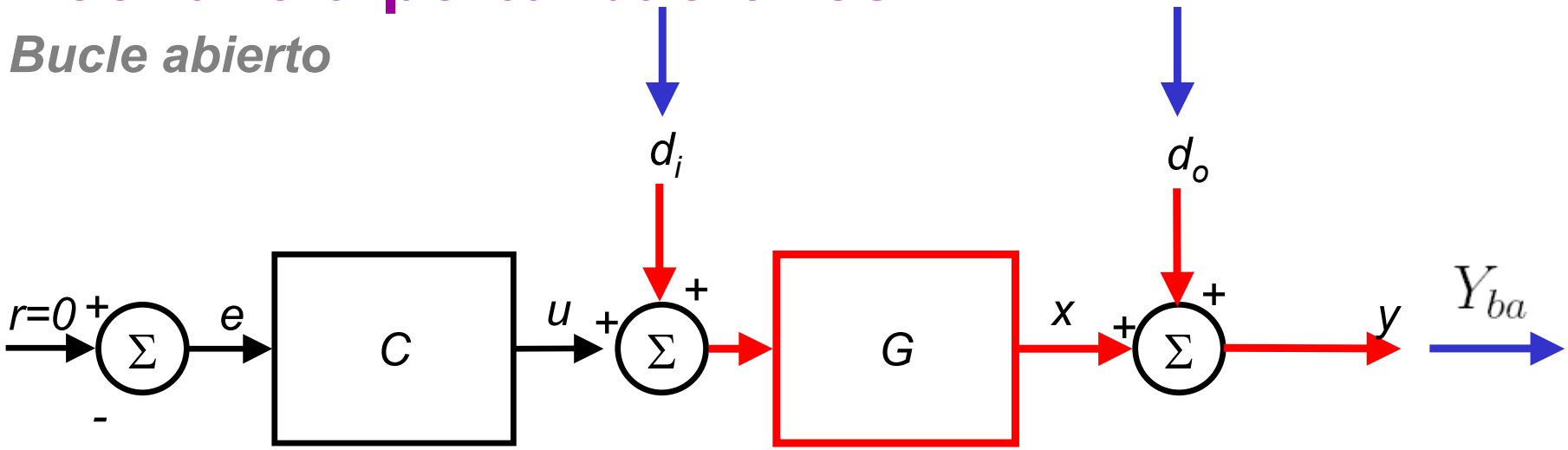
Rechazo a perturbaciones

Bucle abierto



Rechazo a perturbaciones

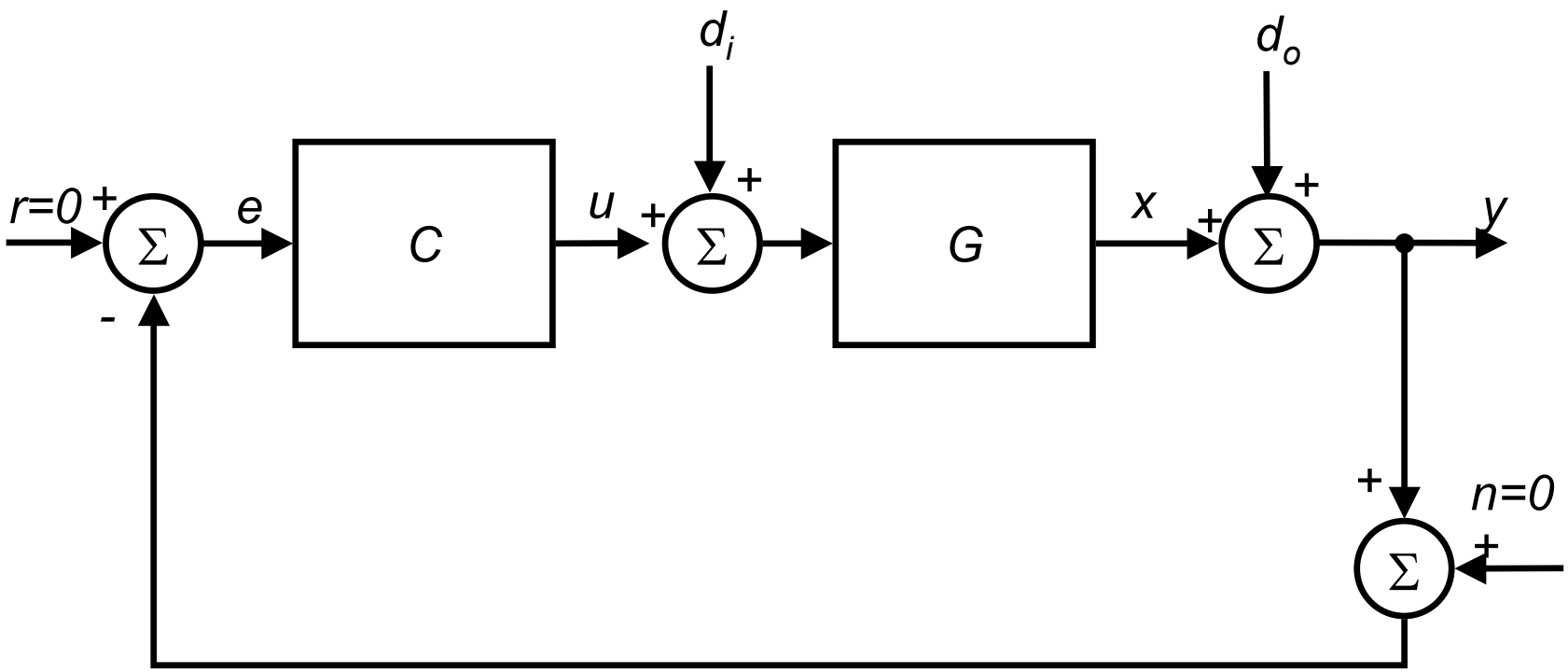
Bucle abierto



$$Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s)$$

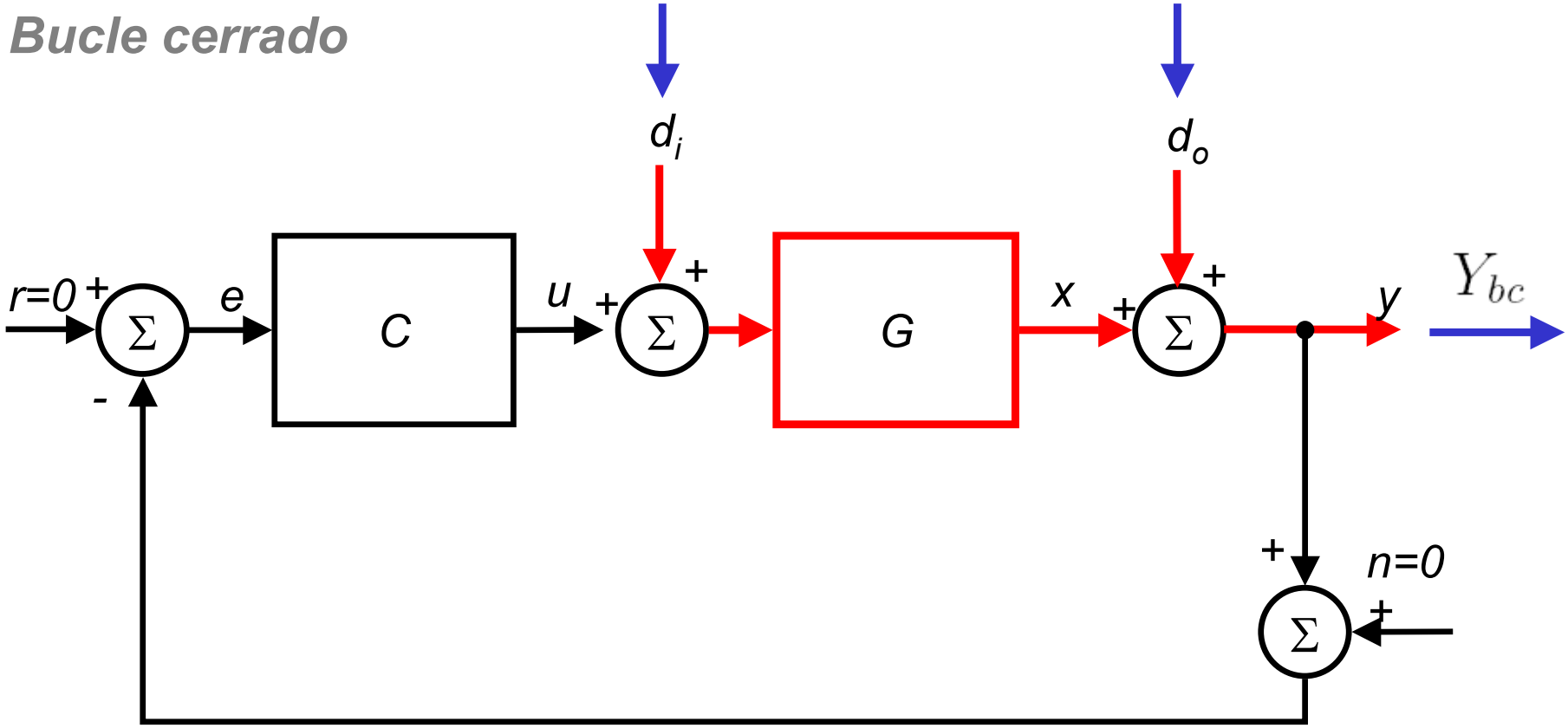
Rechazo a perturbaciones

Bucle cerrado



Rechazo a perturbaciones

Bucle cerrado



$$Y_{bc} = \frac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s)\left[G(s)D_i(s) + D_o(s)\right]$$

Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s)

Bucle abierto → $$Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s)$$

Bucle cerrado → $$Y_{bc} = \frac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s)\left[G(s)D_i(s) + D_o(s)\right]$$

$$Y_{bc} = S(s)Y_{ba}$$

Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s)

$$Y_{bc} = S(s)Y_{ba}$$

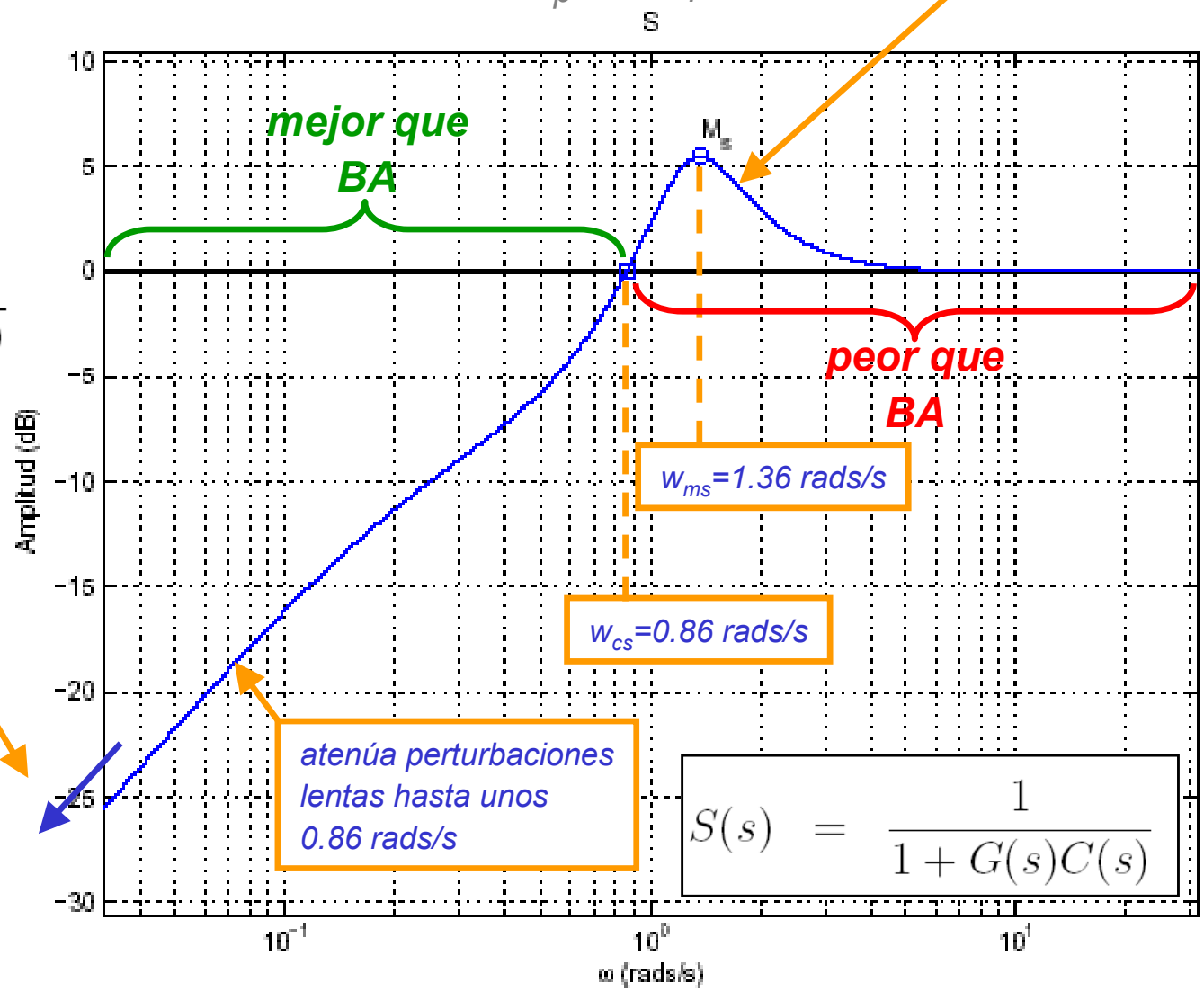
- *La función de sensibilidad describe la atenuación en las perturbaciones que proporciona la realimentación*
- *La realimentación atenúa perturbaciones a frecuencias en las que |S(jw)|<1*
- *La realimentación amplifica perturbaciones a frecuencias en las que |S(jw)|>1*

Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s). Regulador PI (k_p=1, k_i=0.5)

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$$



se muestra especialmente sensible ante perturbaciones a ciertas frecuencias

bloquea las perturbaciones en continua (reg. perm)

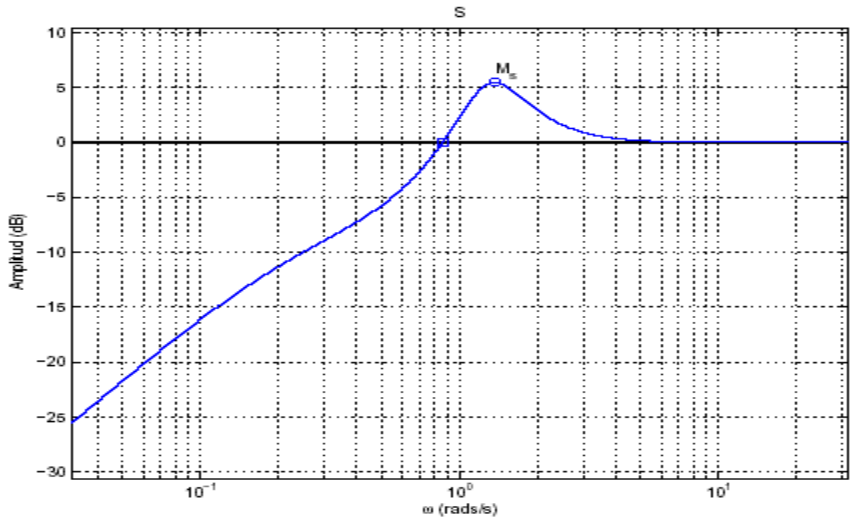
atenúa perturbaciones lentas hasta unos 0.86 rads/s

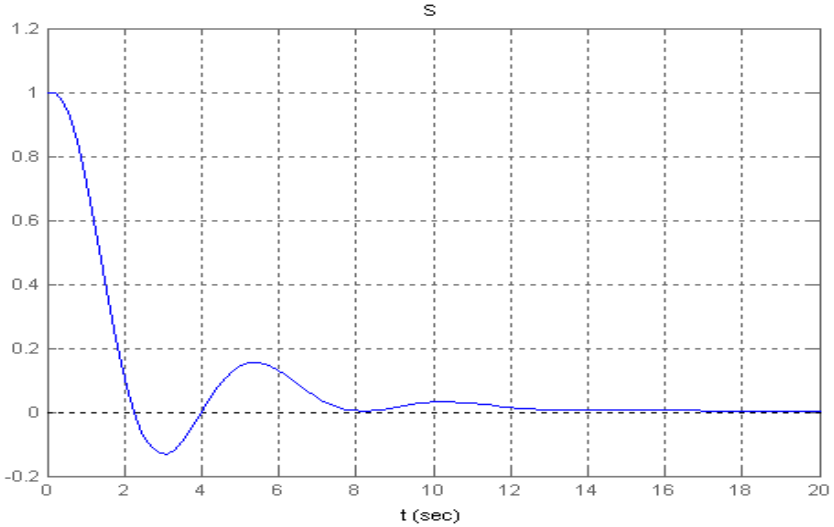
Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s)

- *S(s) describe cuánto atenúa la realimentación las perturbaciones en comparación con bucle abierto*
- *permite dar esa información en frecuencia (frecuencias vulnerables, frecuencias robustas ...)*
- *Puede también representarse en el tiempo*
- *informa también sobre:*
  - *Estabilidad relativa*
  - *Robustez*
  - *etc.*

(a continuación...)



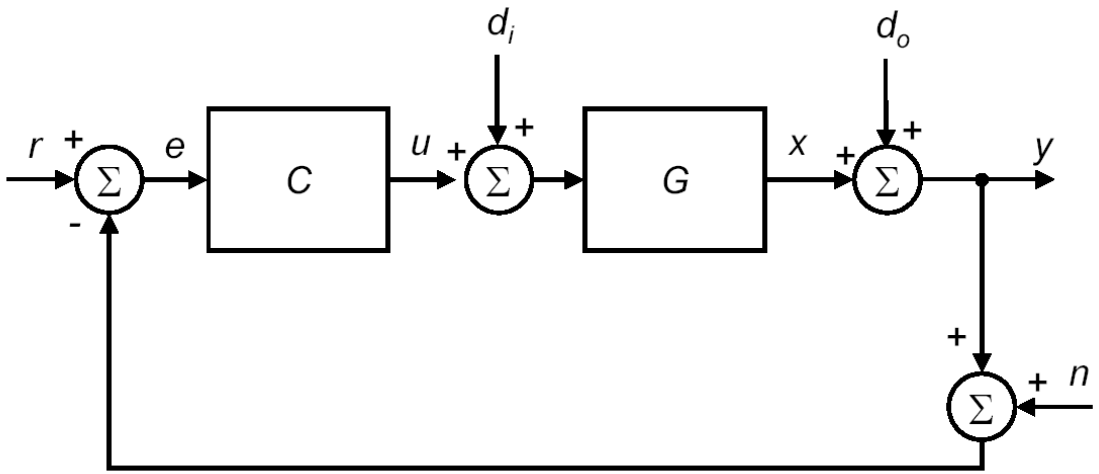


Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- **Seguimiento de referencias**
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

Seguimiento de referencias

Factores que afectan al seguimiento de referencias



$$Y = \underbrace{\frac{GC}{1+GC}}_{\substack{T(s)\\ \text{seguimiento}\\ \text{de referencias}}} R + \underbrace{\frac{G}{1+GC}}_{\substack{S_i(s)\\ \text{perturbaciones}\\ \text{de carga}}} D_i + \underbrace{\frac{1}{1+GC}}_{\substack{S(s)\\ \text{perturbación}\\ \text{a la salida}\\ \text{del proceso}}} D_o - \underbrace{\frac{GC}{1+GC}}_{\substack{T(s)\\ \text{sensor}}} N$$

Seguimiento de referencias

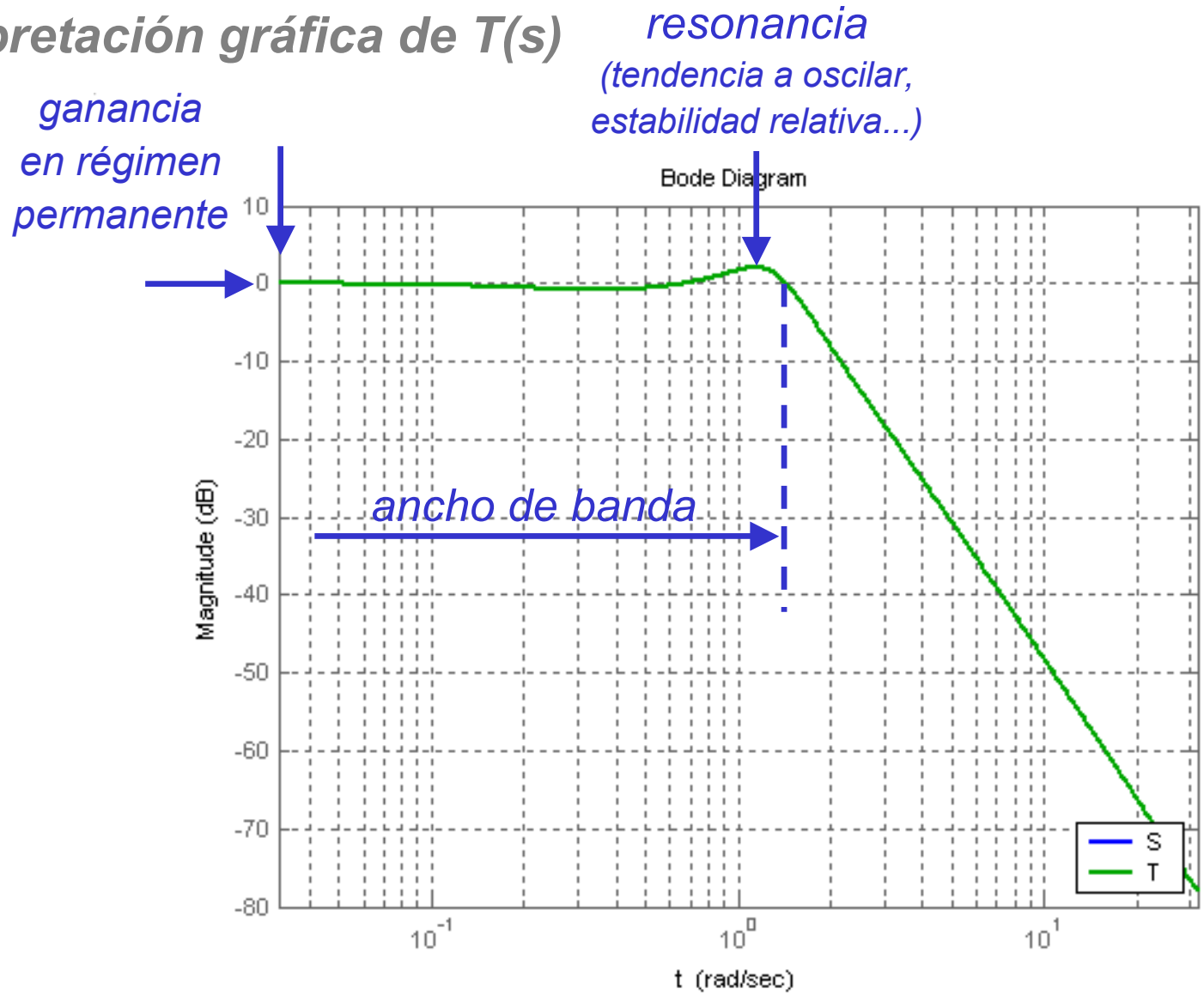
Función de sensibilidad complementaria

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

- *Dinámica del seguimiento de referencias*
- *Efecto de ruido e incertidumbres en el sensor*

Seguimiento de referencias

interpretación gráfica de T(s)



Seguimiento de referencias

Error de seguimiento

$$\varepsilon(s) = R(s) - Y(s)$$

$$\varepsilon(s) = S(s)R(s) - S_i(s)\cancelto{0}{D_i(s)} - S(s)\cancelto{0}{D_o(s)} + T(s)\cancelto{0}{N(s)}$$

En ausencia de perturbaciones...

$$E(s) = S(s)R(s)$$

En régimen permanente...

$$e_{rp} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} S(s) = S(0) = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

→ *La función de sensibilidad guarda una estrecha relación con el error de seguimiento de referencias*

Seguimiento de referencias

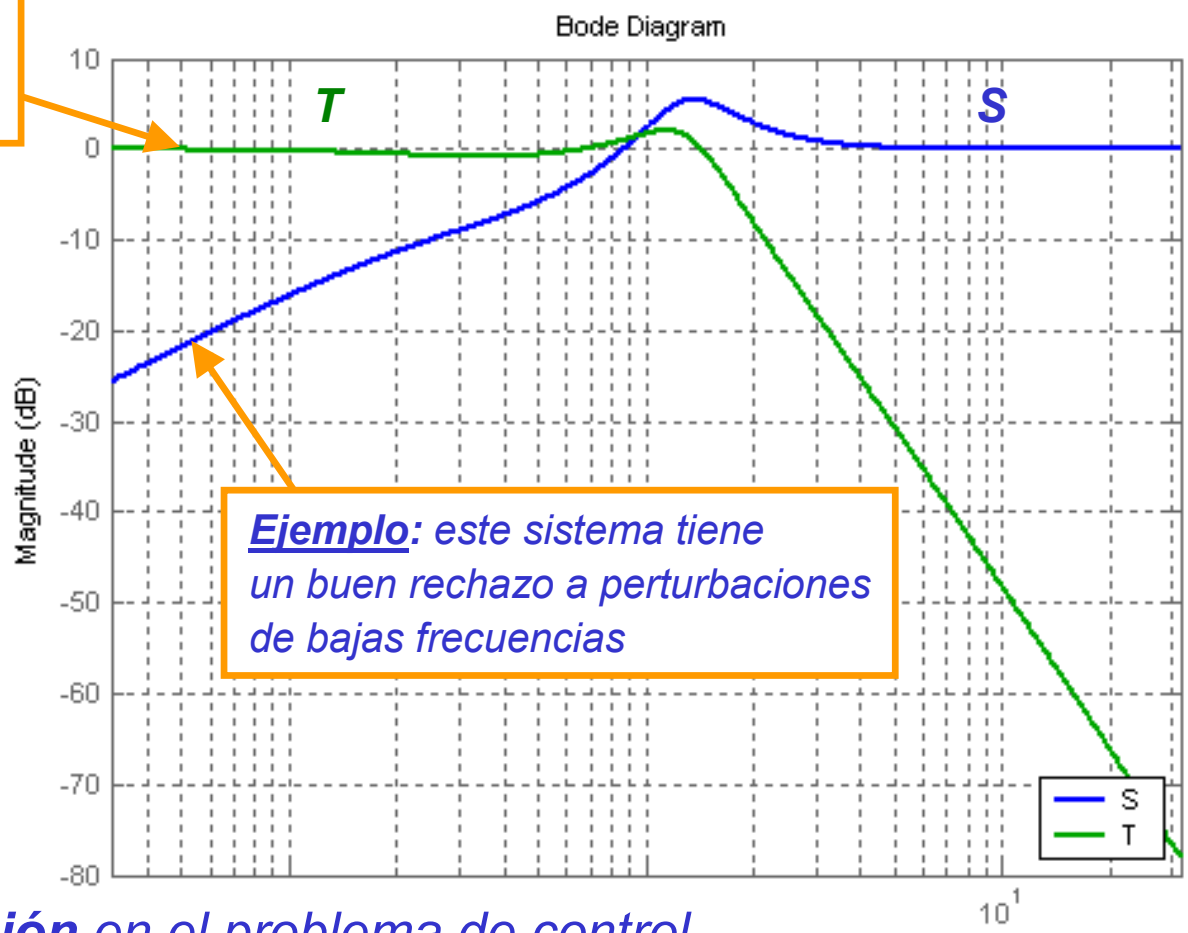
Relación con la función de sensibilidad

...pero un error de baja frecuencia en el sensor se transmite íntegramente a la salida

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)C(s)}$$

$$T(s) + S(s) = 1$$



Ejemplo: *este sistema tiene un buen rechazo a perturbaciones de bajas frecuencias*

*... esto supone una **restricción** en el problema de control*

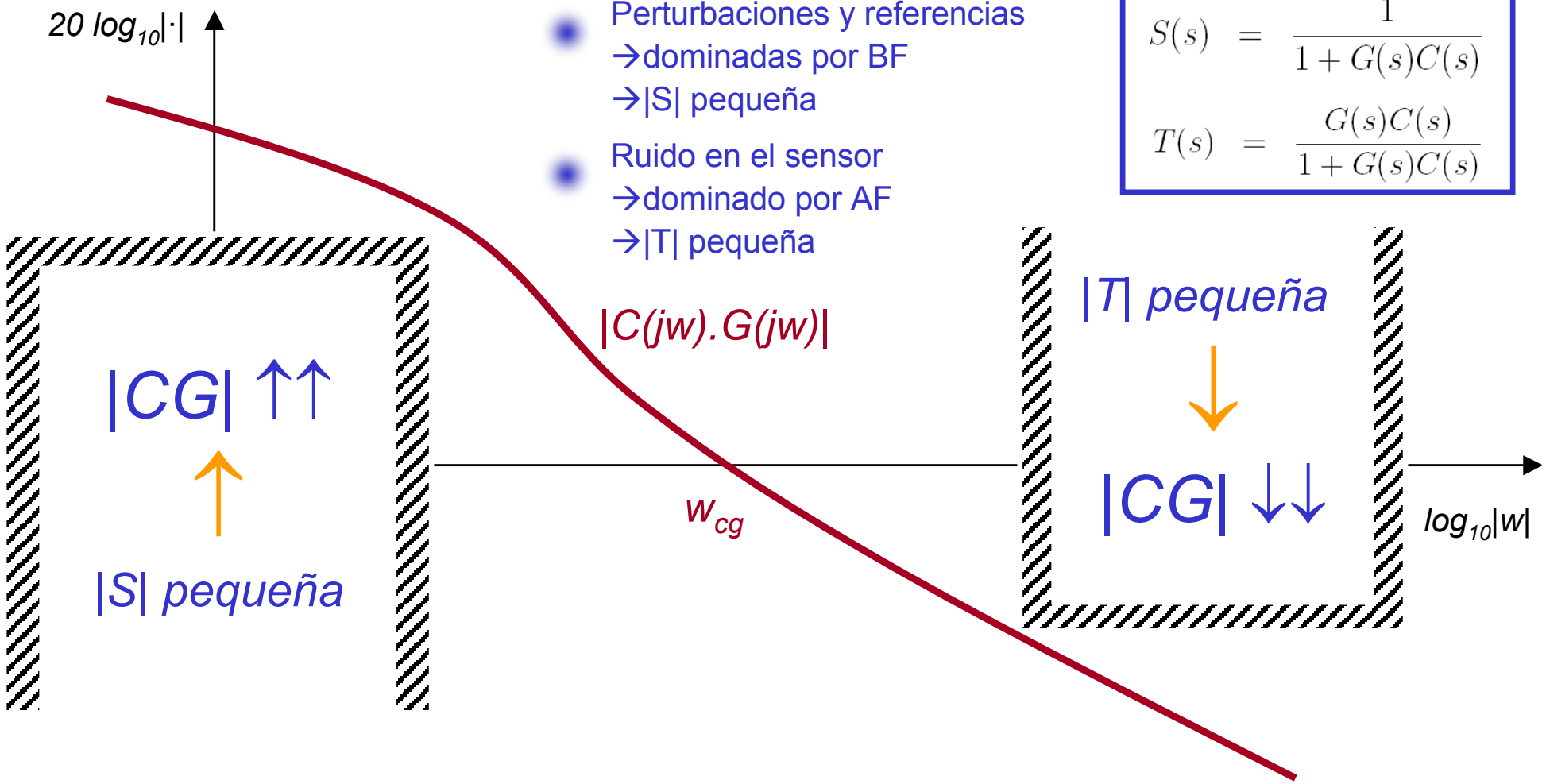
Seguimiento de referencias

Requisitos típicos para C(jw)G(jw)

- Perturbaciones y referencias
  →dominadas por BF
  →|S| pequeña
- Ruido en el sensor
  →dominado por AF
  →|T| pequeña

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)C(s)}$$

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}$$



Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

Acción de control

Función de sensibilidad de control

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N \\
U &= \underbrace{\frac{C}{1+GC}}_{S_u(s)}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \underbrace{\frac{C}{1+GC}}_{S_u(s)}D_o - \underbrace{\frac{C}{1+GC}}_{S_u(s)}N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(s) &= \frac{1}{1+G(s)C(s)} \\
T(s) &= \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \\
S_i(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} \\
S_u(s) &= \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}
\end{aligned}
$$

$$
U = S_u(s)\left[R(s) - D_o(s) - N(s)\right] - T(s)D_i(s)
$$

La acción de control está dominada por $S_u(s)$

Acción de control

Función de sensibilidad de control

$$
\begin{aligned}
S(s) &= \frac{1}{1+G(s)C(s)} \\
T(s) &= \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \\
S_i(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} \\
S_u(s) &= \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}
\end{aligned}
$$

Matemáticamente
se verifican las siguientes relaciones...

$$S_u(s) = \frac{T(s)}{G(s)} = C(s)S(s)$$

Acción de control

Observaciones prácticas

1 *$S_u(jw)$ describe la intensidad de la acción de control para perturbaciones o referencias a distintas frecuencias*

2 *Dado que:*

$$|S_u(j\omega)| = \left|\frac{T(j\omega)}{G(j\omega)}\right|$$

La acción de control será elevada en frecuencias en las que el bucle cerrado tenga más ganancia que el proceso.

Incrementar el ancho de banda del proceso acarrea acciones de control elevadas

Acción de control

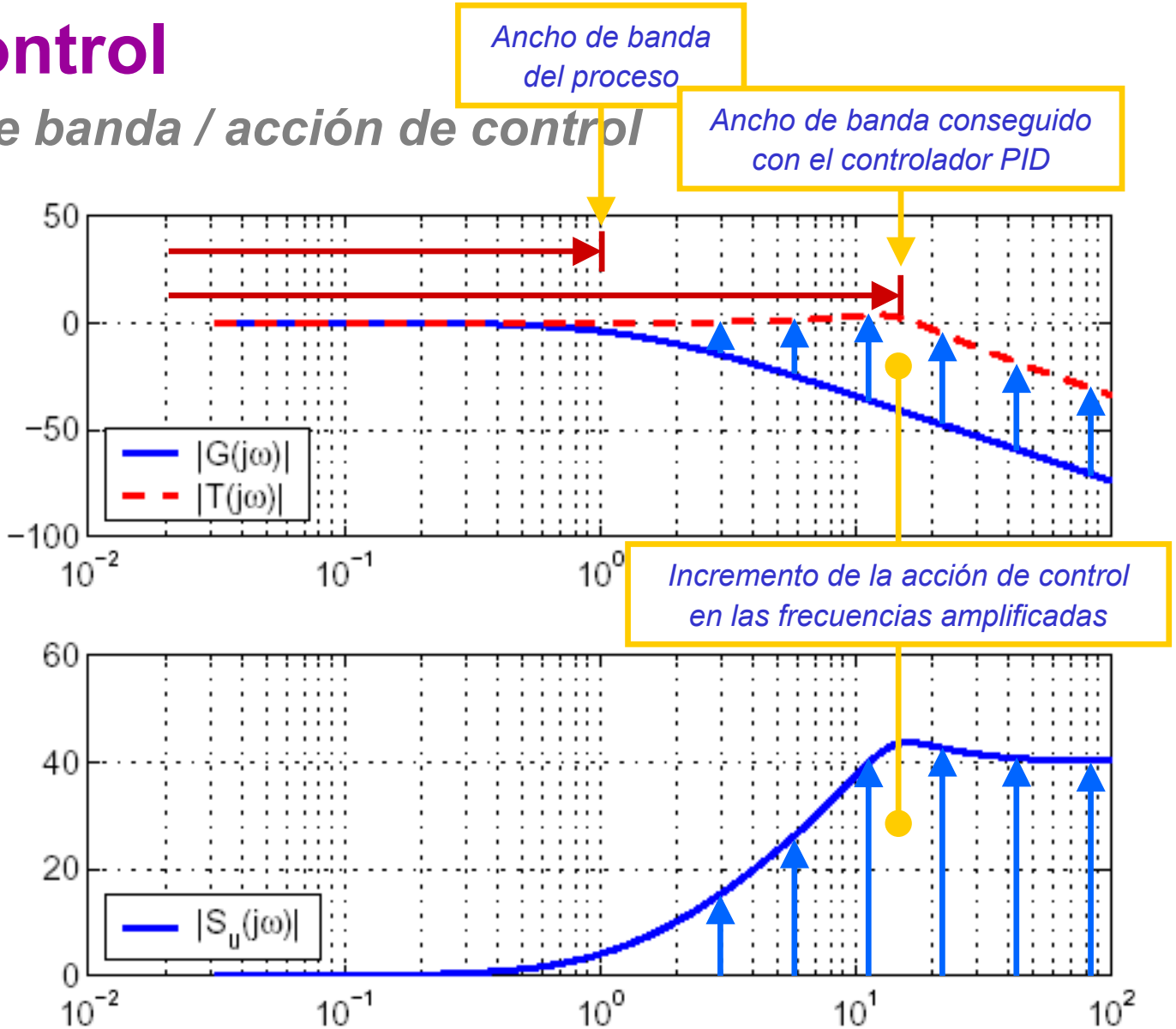
Ejemplo: ancho de banda / acción de control

Proceso:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Controlador (PID):

$$C(s) = 100 \cdot \frac{s+2}{s+10} \cdot \frac{s+1}{s}$$

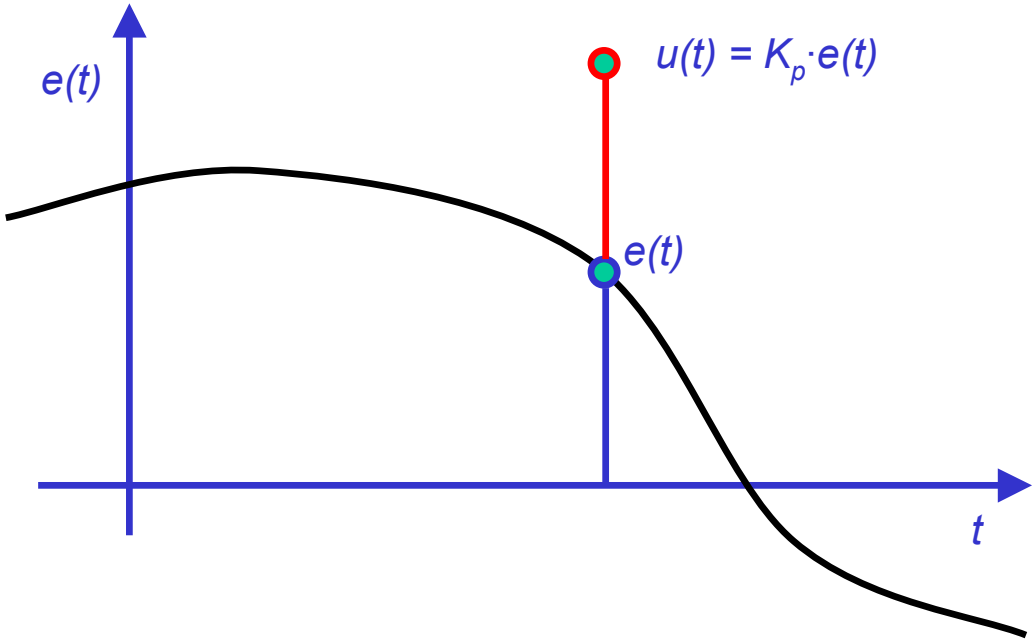


Indice de la exposición

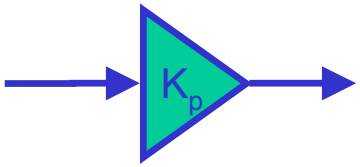
- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- **Análisis de las acciones P, PI, PD**
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional (P)



$u(s) = K_p \cdot e(s)$

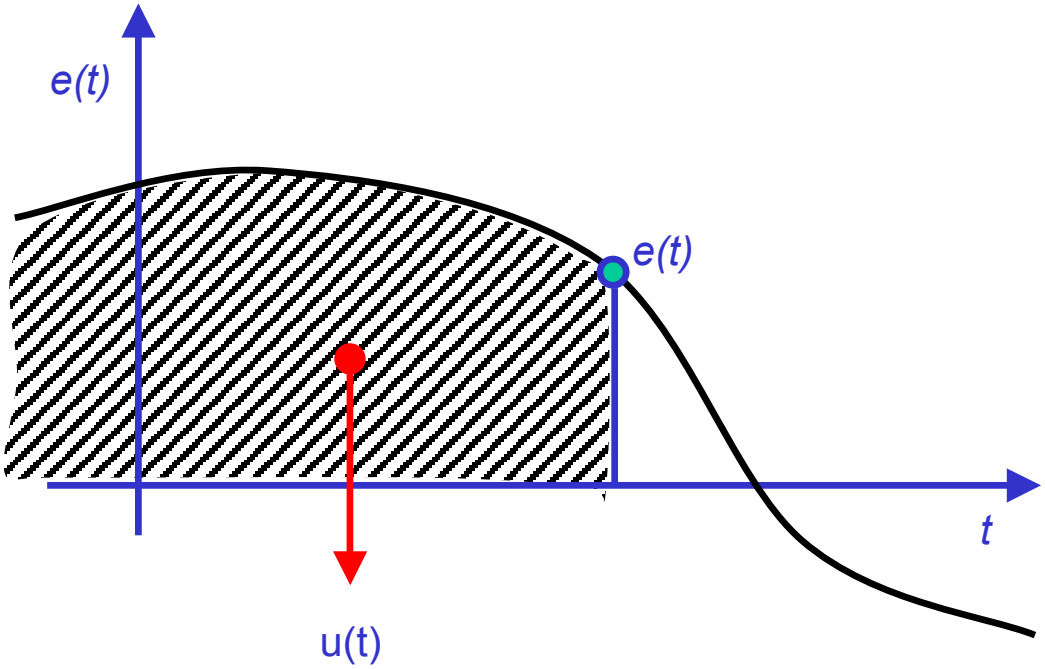


Propiedades

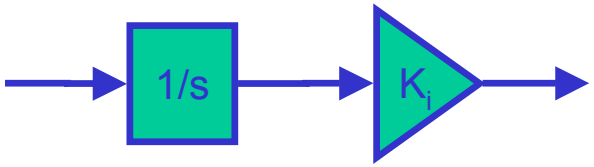
- La acción de control es directamente proporcional al error e(t) cometido
- Esta acción surte efecto de forma instantánea a la aparición del error
- Reduce el error, tanto en seguimiento de referencias como el originado por perturbaciones, pero no lo anula en régimen permanente
- Valores elevados de Kp originan menos error y respuestas más rápidas, aunque una acción P excesiva pueden producir respuestas sobreosciladas o incluso inestables

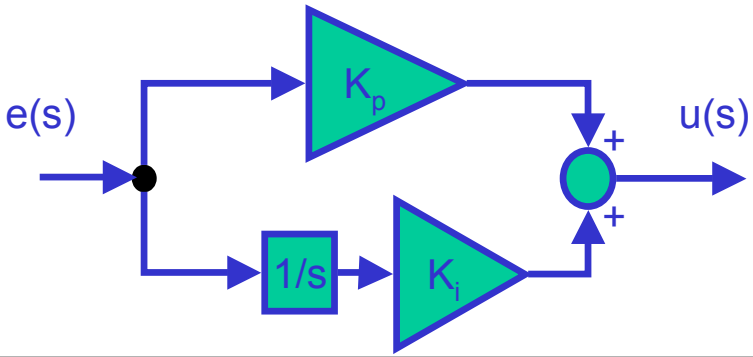
Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Integral (PI)



$u(s) = K_i \cdot (1/s)\, e(s)$



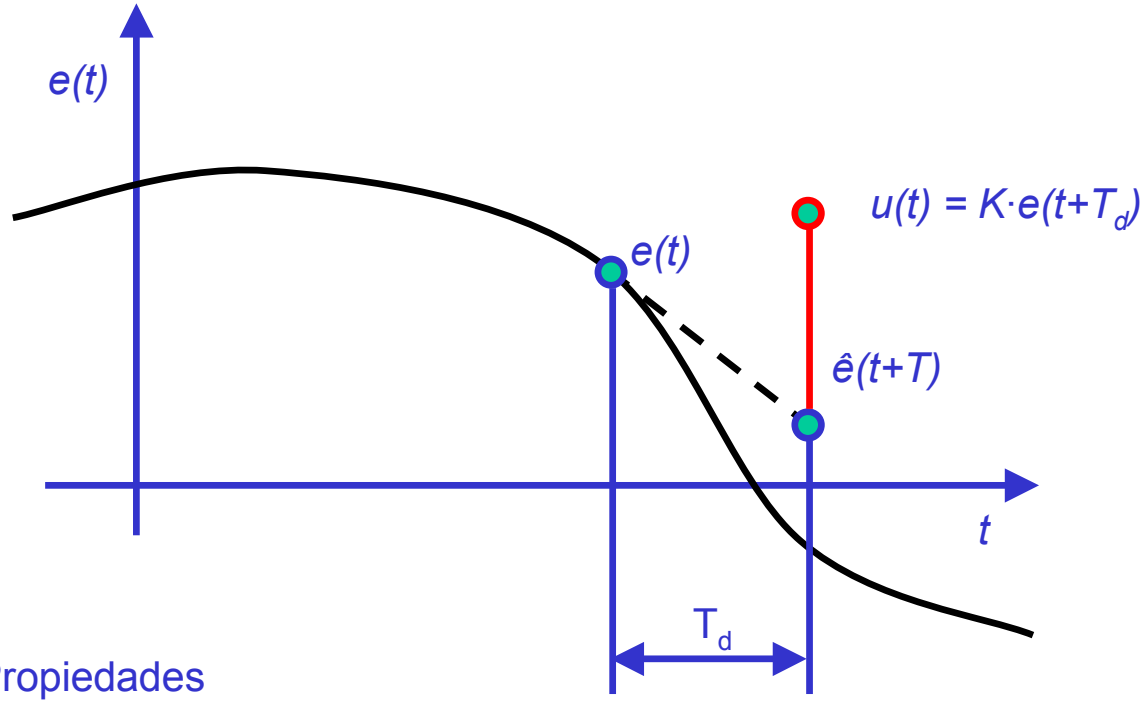


Propiedades

- Se basa en la integral del error
- Mientras el error persiste en régimen permanente, la acción de control se incrementa (el integrador sigue integrando)
- En régimen permanente, el error se hace cero (si no, tendríamos un sistema inestable)
- La acción se basa en la "historia" del error, por tanto conlleva cierto retraso (no confundir con retraso puro)
- Este retraso origina dinámicas lentas, más oscilatorias y a veces inestabilidad
- La acción integral siempre suele ir acompañada de una acción proporcional (K_p) → ACCIÓN Proporcional-Integral (PI)

Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Diferencial (PD)



$$u(t) = K\cdot\hat{e}(t+T_d) = e(t) + T_d\cdot de/dt$$

parte proporcional

parte diferencial

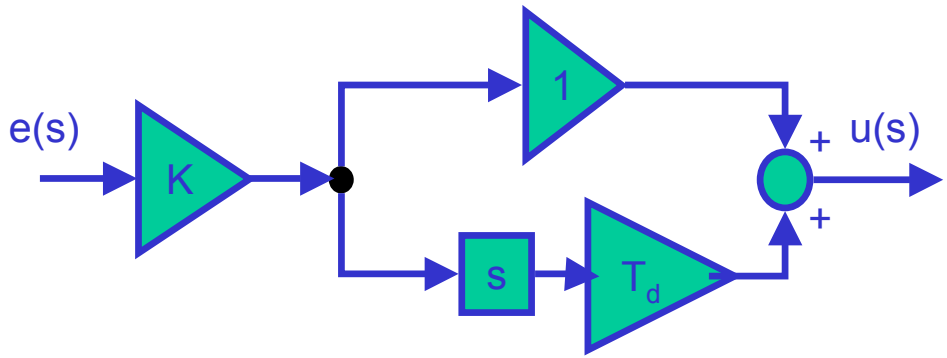
$$u(s) = K\cdot[e(s) + T_d\cdot s\, e(s)] = K(1+T_d s)e(s)$$

parte proporcional

parte diferencial

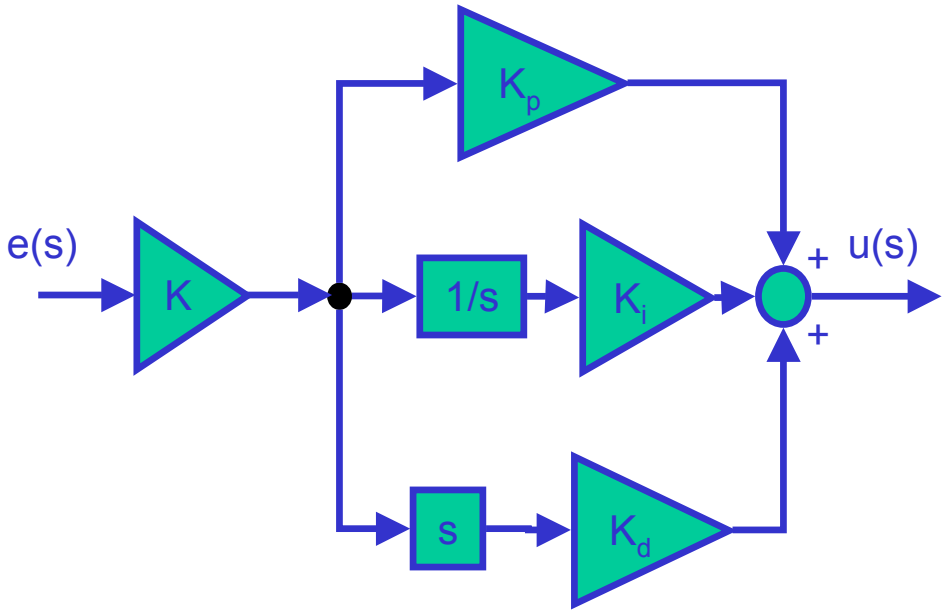
Propiedades

- Se basa en la predicción lineal del valor del error dentro de T_d segundos → es ANTICIPATIVA
- Esta predicción se basa en la pendiente del error (derivada)
- Su carácter anticipativo hace que, en general, mejore la dinámica de la respuesta



Análisis de las acciones P, PI, PD

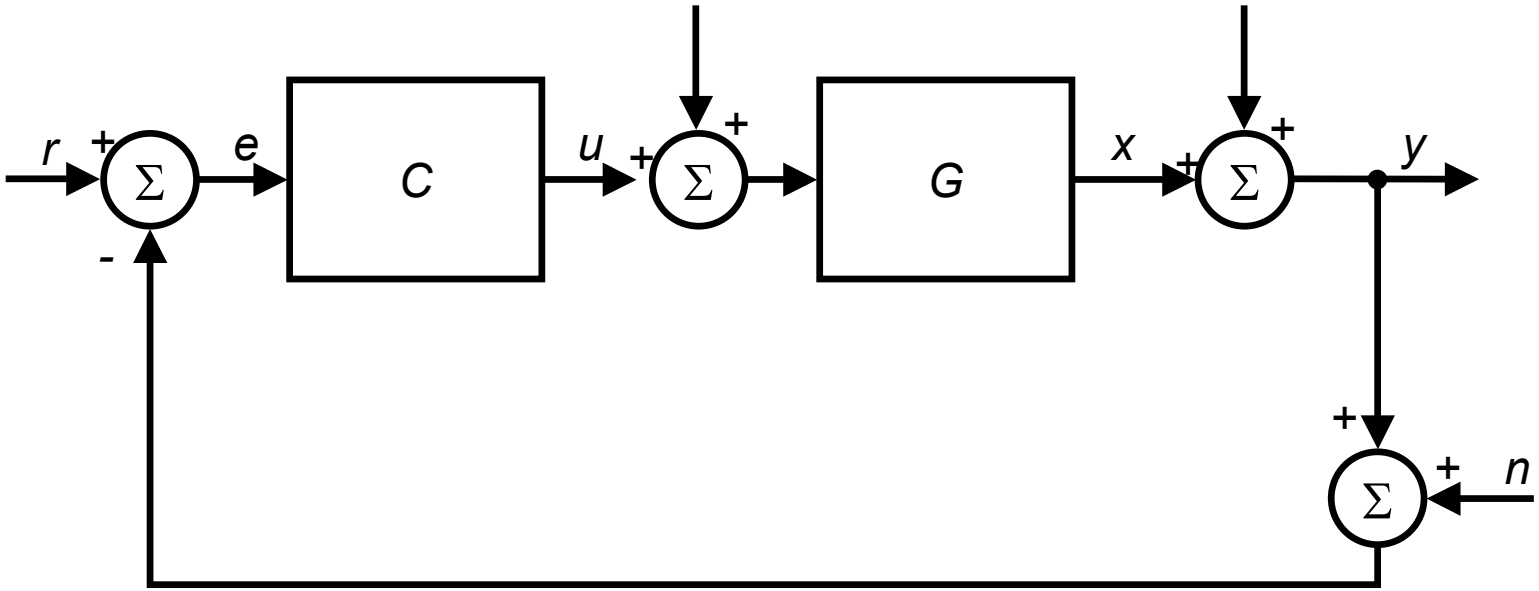
Acción Proporcional-Integral-Diferencial (PID)



Propiedades

- Combina las tres acciones
- Bien diseñado puede reunir las ventajas de las tres
- Las tres acciones básicas P, PI, PD, son casos particulares de ésta
- La gran mayoría de los reguladores utilizados en la industria son PID's

Análisis de las acciones P, PI, PD



Controlador:

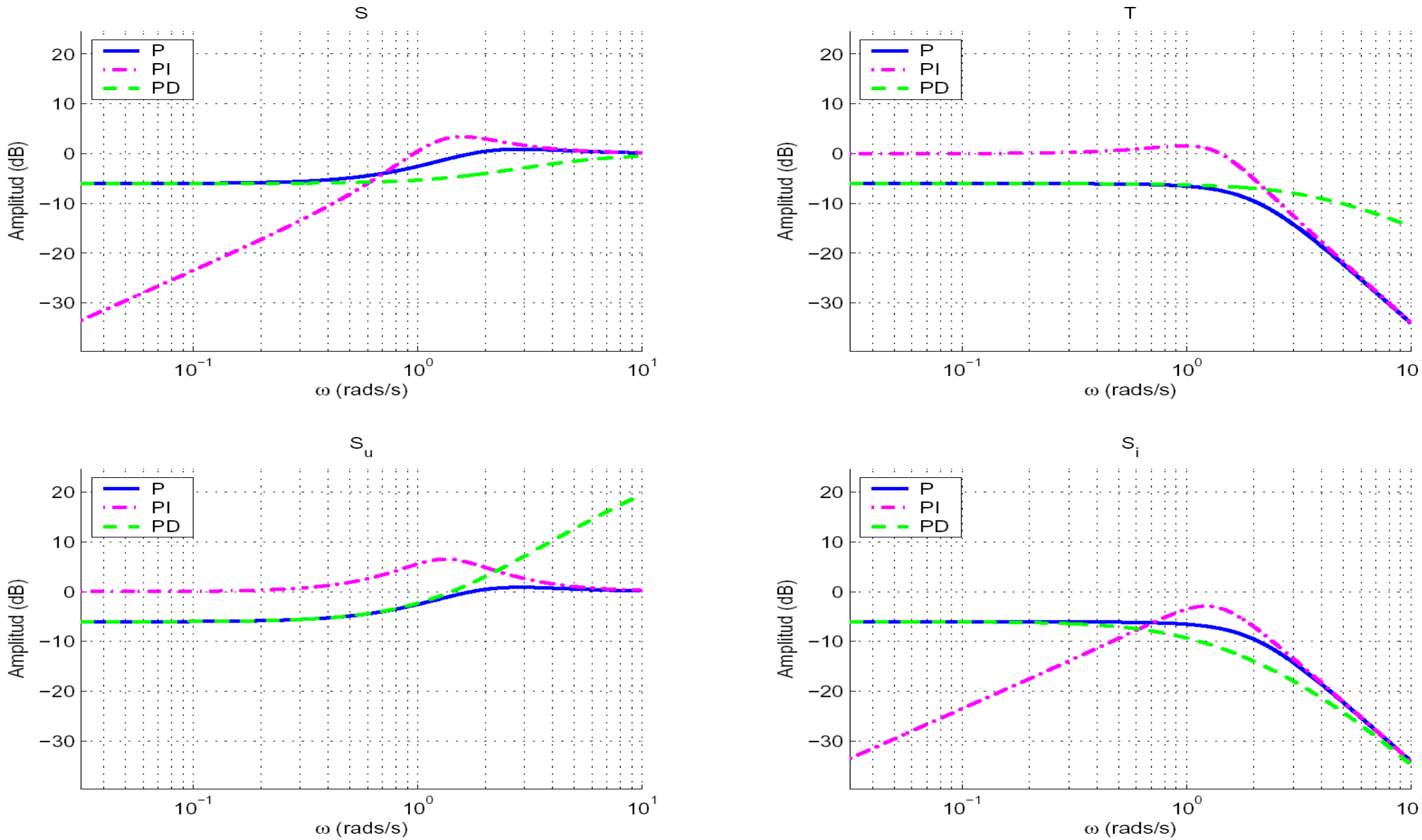
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Proceso:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Tipo de control	Parámetros $\{k_p, k_i, k_d\}$
proporcional (P):	$\{1, 0, 0\}$
proporcional-integral (PI):	$\{1, 1.5, 0\}$
proporcional-diferencial (PD):	$\{1, 0, 1\}$

Análisis de las acciones P, PI, PD



Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- **Robustez**
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

Incertidumbres en el proceso

En ausencia de incertidumbres en el modelo la relación entre salida y referencia es:

$$\frac{Y}{R} = \frac{GC}{1+GC} = T$$

El proceso, G, puede sufrir variaciones dG debidas a causas externas, errores de modelado, etc.

$$G \longrightarrow G + \Delta G$$

El impacto en la respuesta debido a una variación dG es:

$$\boxed{S_G^T = \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dG}{G}} = \frac{dT}{dG}\frac{G}{T} = S}$$

función de sensibilidad

derivando...

$$\frac{dT}{dG} = \frac{C}{(1+GC)^2} = \frac{GC}{(1+GC)(1+GC)G} = S\frac{T}{G}$$

Estabilidad y sensibilidad

Los márgenes clásicos pueden establecerse en términos de α_1 y α_2

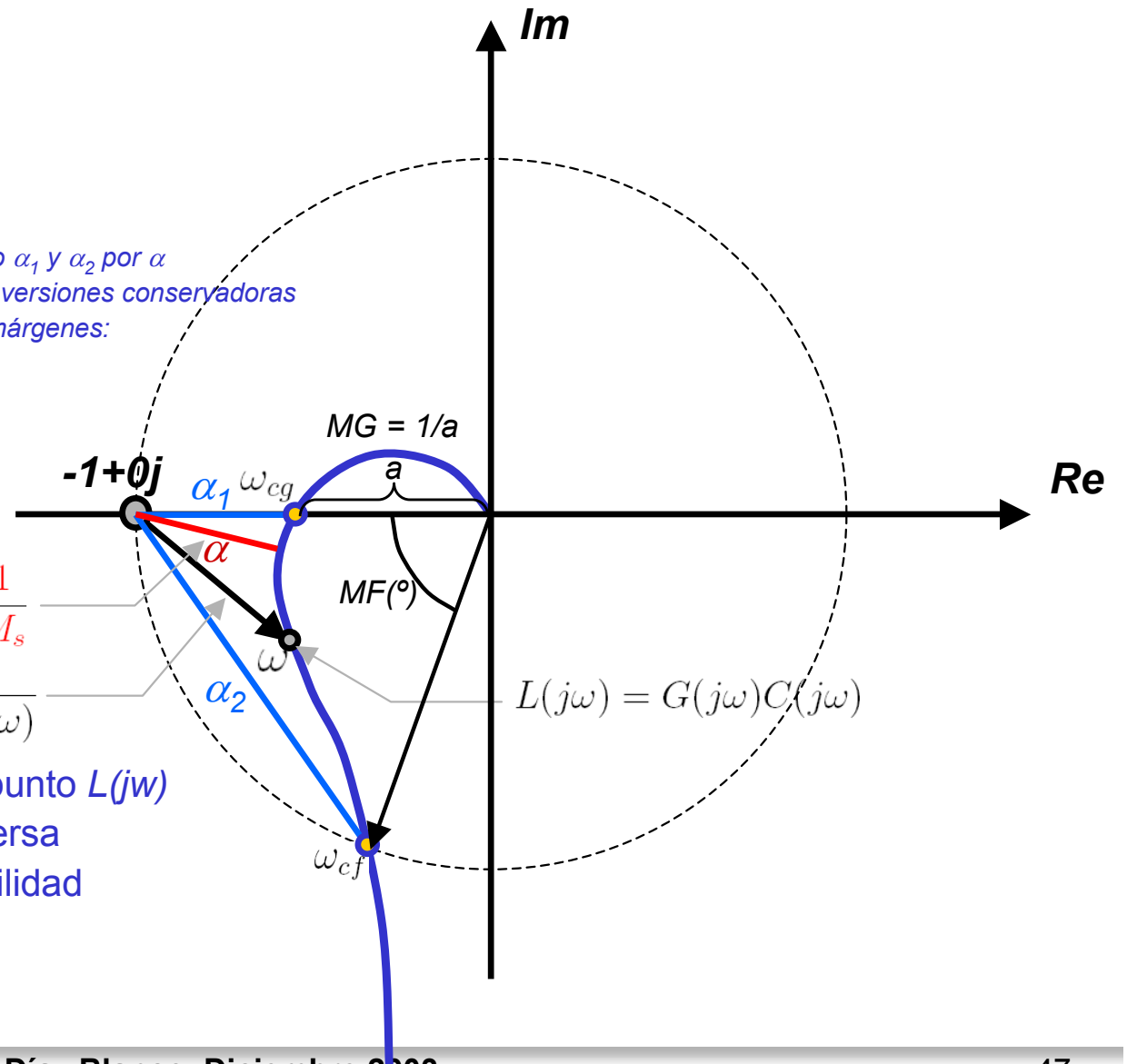
$$\mathrm{MG} = \frac{1}{1-\alpha_1}, \qquad \mathrm{MF} = 2\arcsin\frac{\alpha_2}{2}$$

sustituyendo α_1 y α_2 por α se obtienen versiones conservadoras de los dos márgenes:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{MG}^* &= \frac{1}{1-\alpha} \le \mathrm{MG} \\ \mathrm{MF}^* &= 2\arcsin\frac{\alpha}{2} \le \mathrm{MF} \end{aligned}}$$

punto de distancia mínima: $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|, \qquad \alpha = \frac{1}{M_s}$

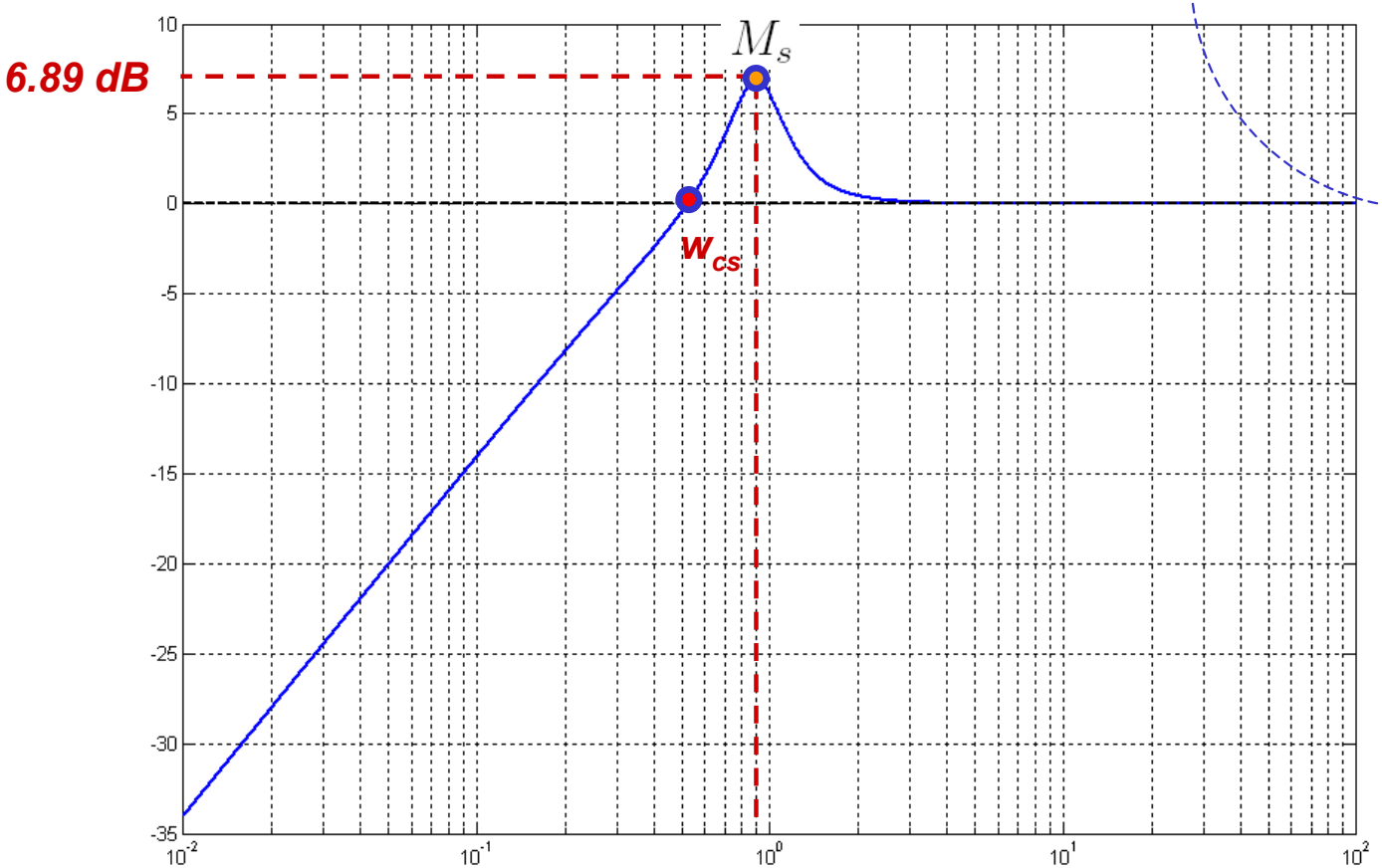
$$1 + L(j\omega) = \frac{1}{S(j\omega)}$$



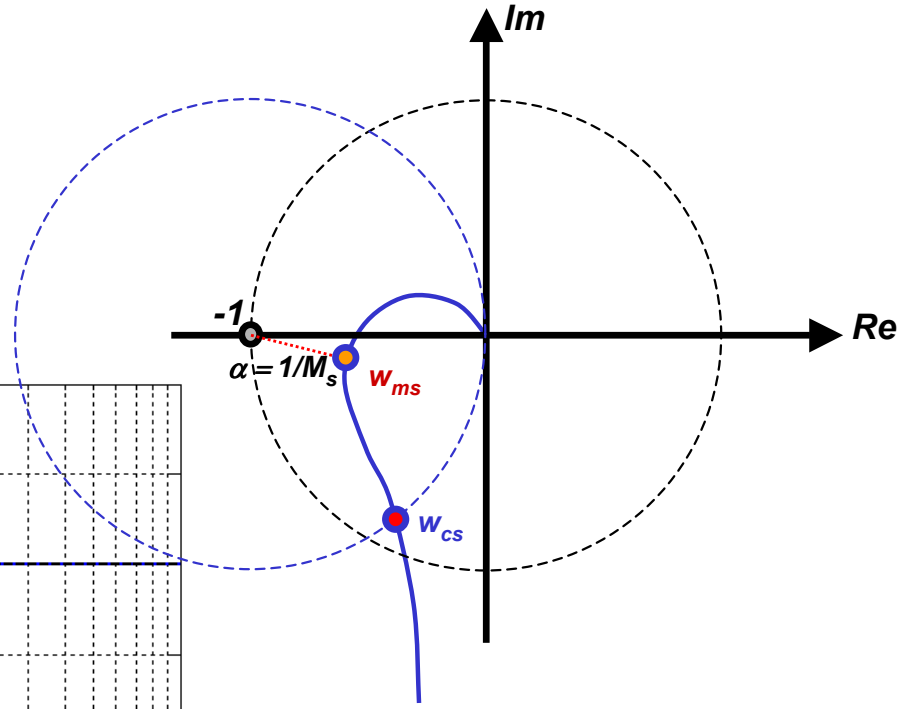
La distancia del punto –1 al punto *L(jw)* es precisamente la inversa del módulo de la sensibilidad

Estabilidad y sensibilidad

Visualizando la curva de sensibilidad puede obtenerse información muy útil sobre la estabilidad



w_{ms} = 0.9 rads/s



Márgenes robustos:

$$\mathrm{MG}^* = \frac{1}{1-\alpha}$$

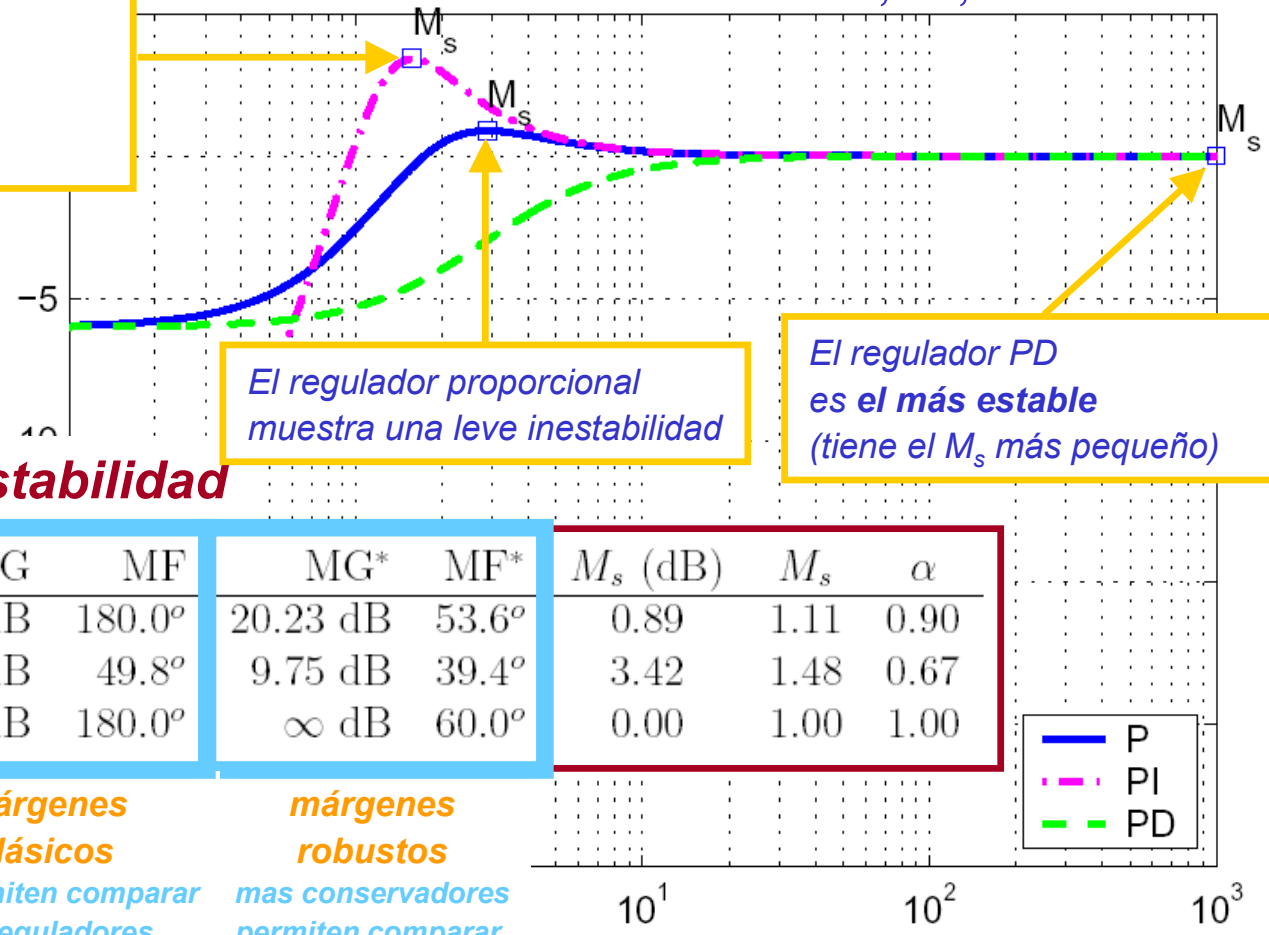
$$\mathrm{MF}^* = 2\ \arcsin\frac{\alpha}{2}$$

Estabilidad y sensibilidad

Ejemplo anterior (acciones P, PI, PD)

Funciones de Sensibilidad P, PI, PD

*El PI muestra el comportamiento **más inestable** de las tres acciones*



El regulador proporcional muestra una leve inestabilidad

*El regulador PD es **el más estable** (tiene el M_s más pequeño)*

Márgenes de estabilidad

Controlador	MG	MF	MG*	MF*	M_s (dB)	M_s	α
P	∞ dB	180.0º	20.23 dB	53.6º	0.89	1.11	0.90
PI	∞ dB	49.8º	9.75 dB	39.4º	3.42	1.48	0.67
PD	∞ dB	180.0º	∞ dB	60.0º	0.00	1.00	1.00

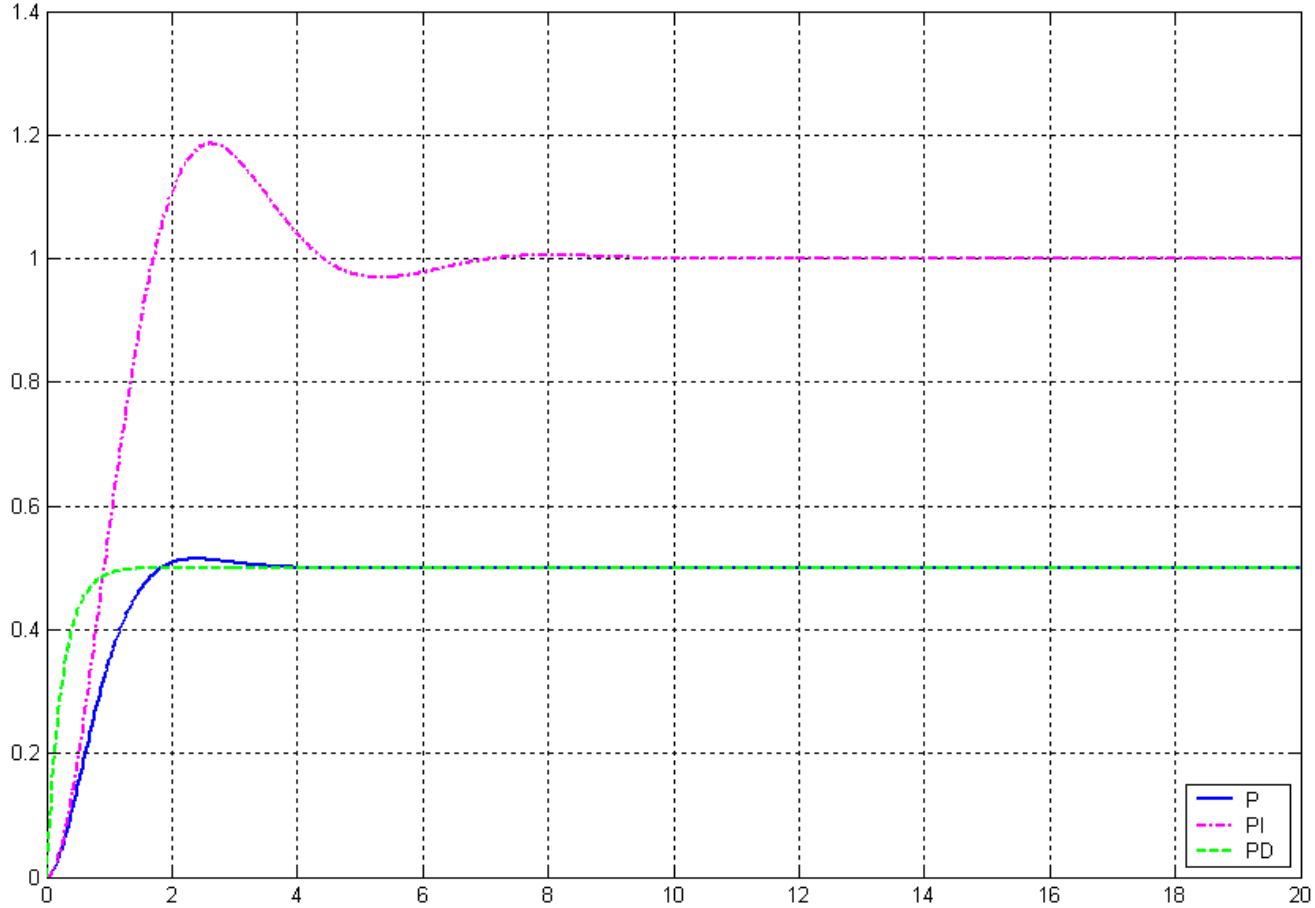
márgenes clásicos
no permiten comparar los reguladores

márgenes robustos
mas conservadores permiten comparar los 3 reguladores

Estabilidad y sensibilidad

Ejemplo anterior (acciones P, PI, PD)

Respuestas al escalón P, PI, PD



Estabilidad y sensibilidad

Ejemplo anterior (acciones P, PI, PD)

Mapas Polo-Cero de los sistemas realimentados

P

Muestra menor inestabilidad relativa que el PI a frecuencias algo mayores

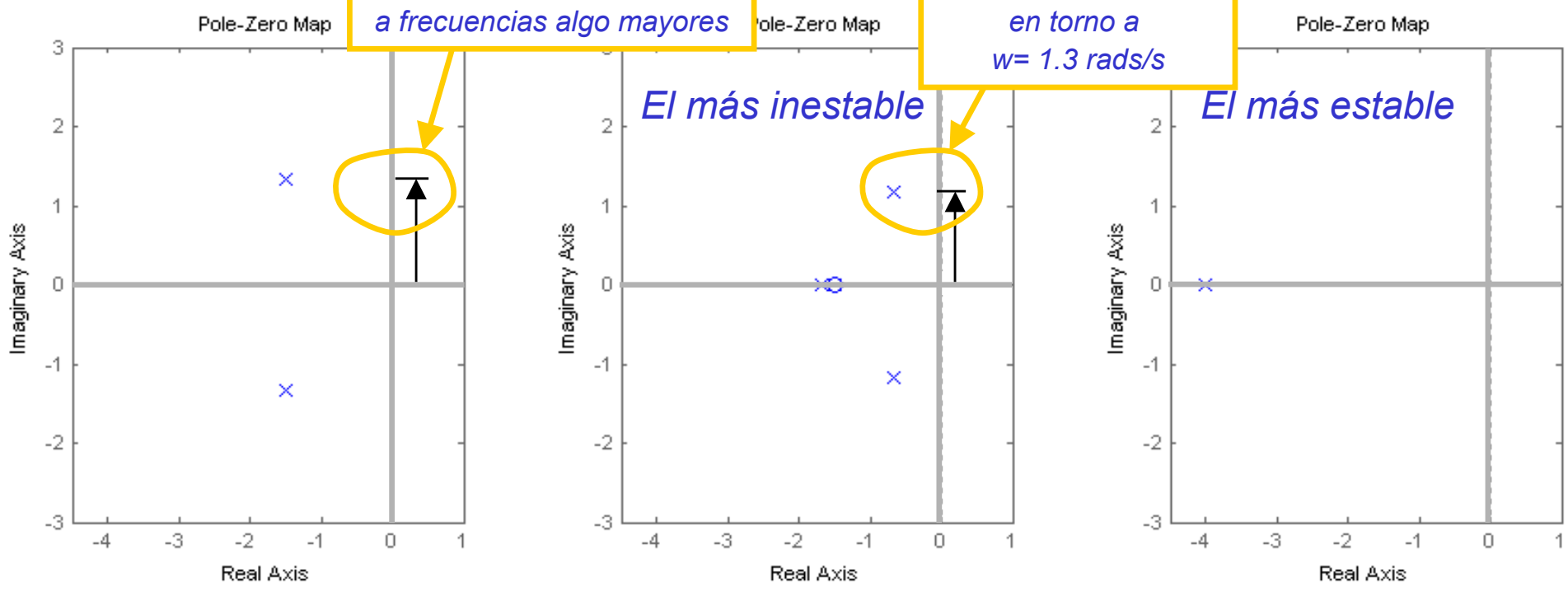
PI

Muestra inestabilidad relativa en la región en torno a w= 1.3 rads/s

El más inestable

PD

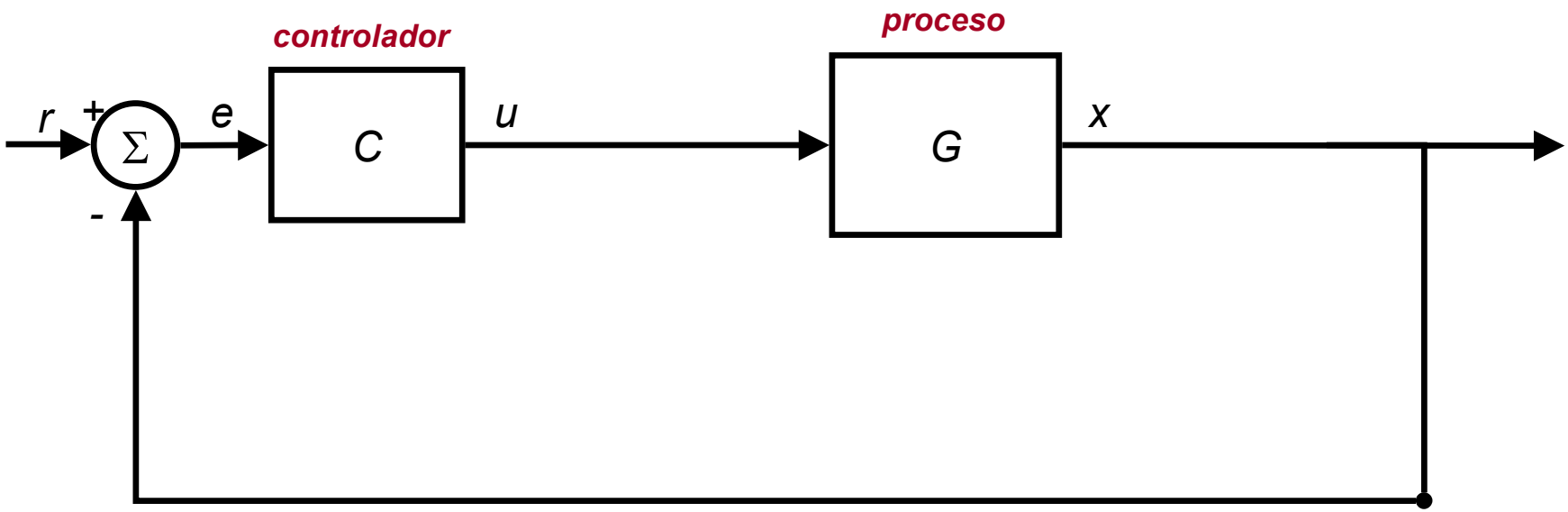
El más estable



Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

En ocasiones
los modelos utilizados durante el diseño
no coinciden con la realidad

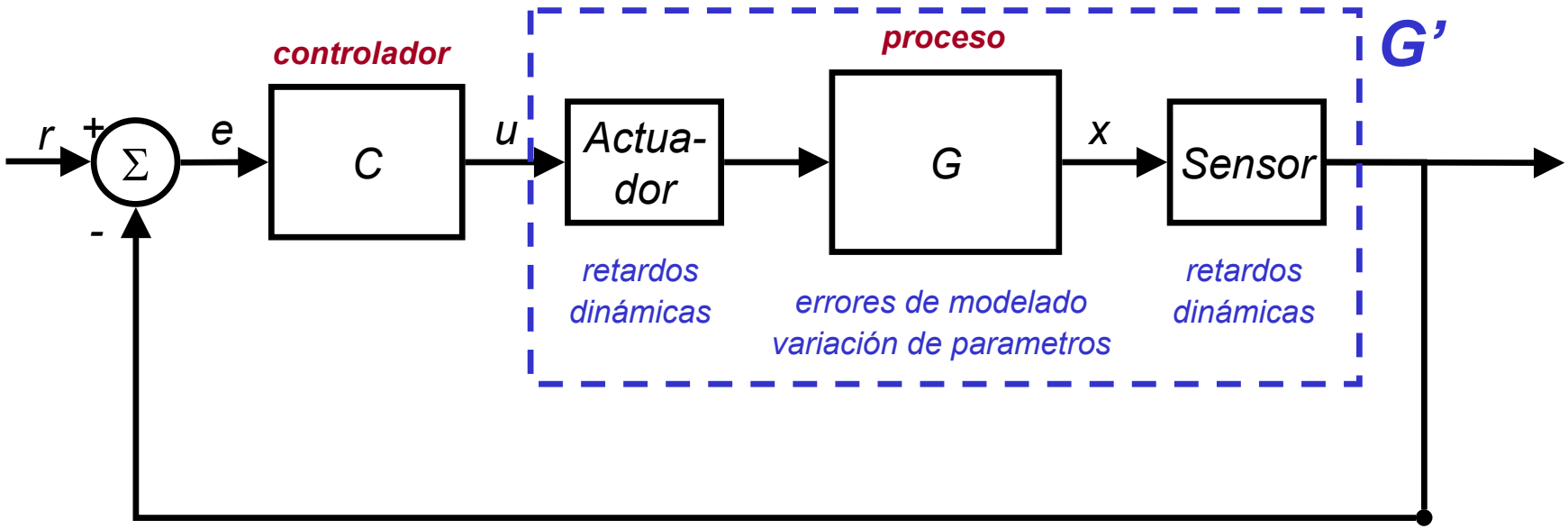
- *Retardos de transporte*
- *Dinámicas lentas en sensores y/o actuadores*
- *Variaciones en los parámetros del proceso (efecto de la temperatura, envejecimiento, derivas)*
- *Errores en el modelado (ej. aproximación lineal)*



Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

En ocasiones
los modelos utilizados durante el diseño
no coinciden con la realidad

- *Retardos de transporte*
- *Dinámicas lentas en sensores y/o actuadores*
- *Variaciones en los parámetros del proceso (efecto de la temperatura, envejecimiento, derivas)*
- *Errores en el modelado (ej. aproximación lineal)*



Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Problema de la implementación

ideal

elementos:

+ caros

+ rápidos

+ precisos

?

real

elementos:

+ baratos

+ lentos

- precisos

Es necesario conocer cómo afecta la tecnología en nuestro diseño

Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Ejemplo: efecto de dinámicas adicionales

La dinámica adicional del captador o del actuador origina mayor sensibilidad y mayor inestabilidad relativa

G(s)C(s) original:

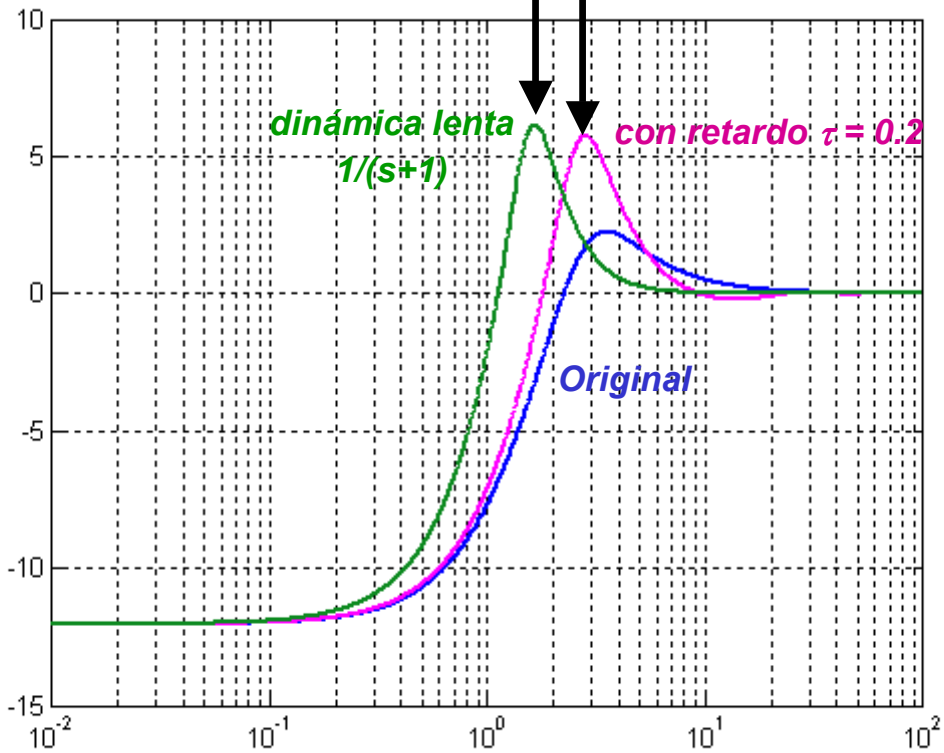
$$\frac{6}{(s+1)(s+2)}$$

G(s)C(s) + retardo:

$$\frac{6}{(s+1)(s+2)} \cdot e^{-0.2s}$$

G(s)C(s) + dinámica:

$$\frac{6}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s+1}$$



Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Teorema de Estabilidad Robusta

En ocasiones el modelo nominal del proceso, G no coincide con el modelo real, G'

Esta disparidad puede modelarse de dos formas:

$$G' = G + \Delta G = G(1 + \delta G)$$

Error aditivo

Error multiplicativo

Fácilmente se comprueba que ambos errores están relacionados por:

$$\delta G = \frac{\Delta G}{G}$$

Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

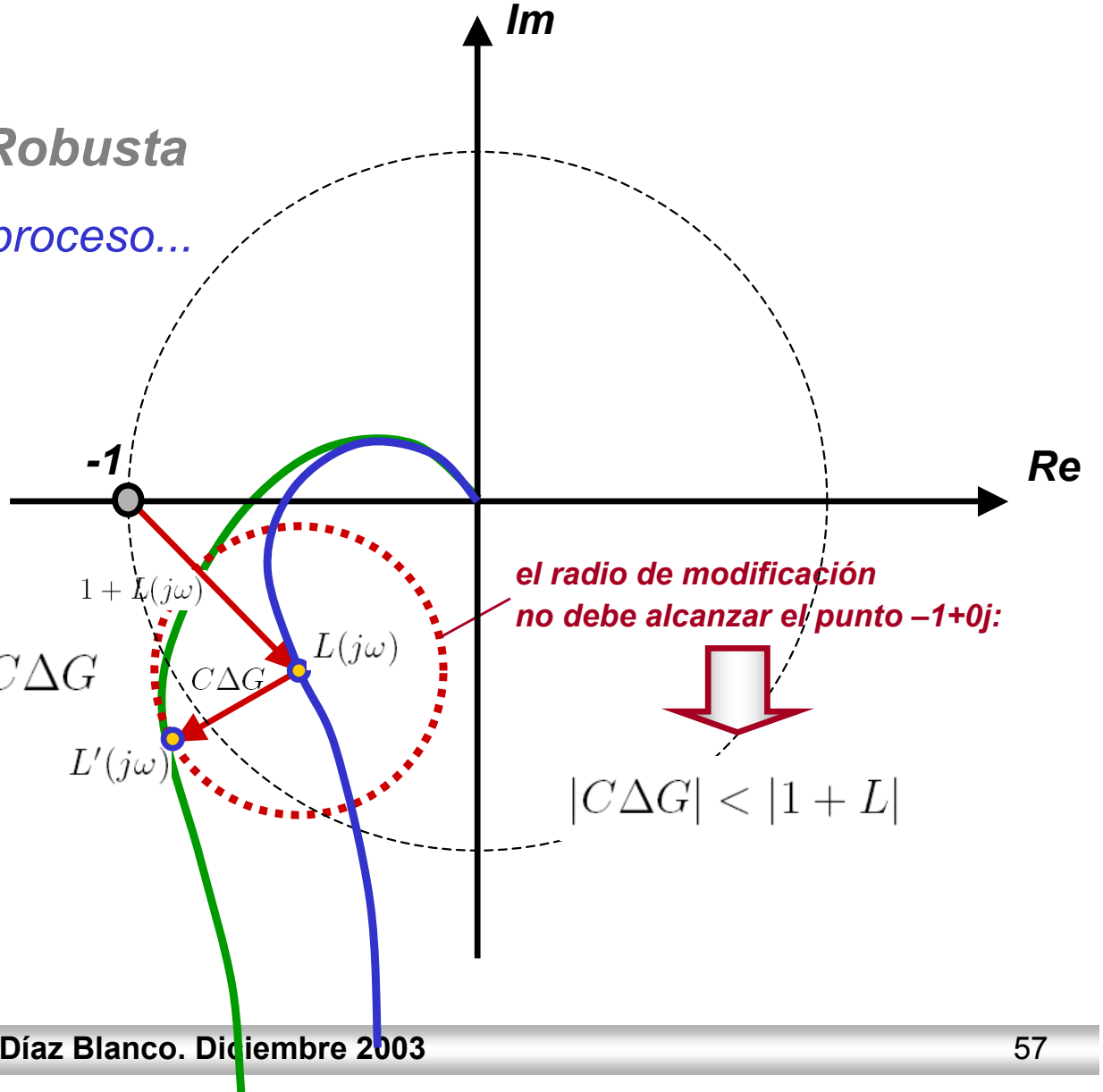
Teorema de Estabilidad Robusta

Si hay una incertidumbre en el proceso...

$$G' = G + \Delta G = G(1 + \delta G)$$

Curva de Nyquist real

$$L' = CG' = C(G + \Delta G) = L + C\Delta G$$



Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Teorema de Estabilidad Robusta (distintas expresiones)

$$|C\Delta G| < |1+L|$$

dividiendo por CG...

$$\frac{|\Delta G|}{|G|} < \frac{1}{|T|}$$

...en términos del error multiplicativo δG...

$$|\delta G| < \frac{1}{|T|}$$

...otra expresión

$$|\delta G||T| < 1$$

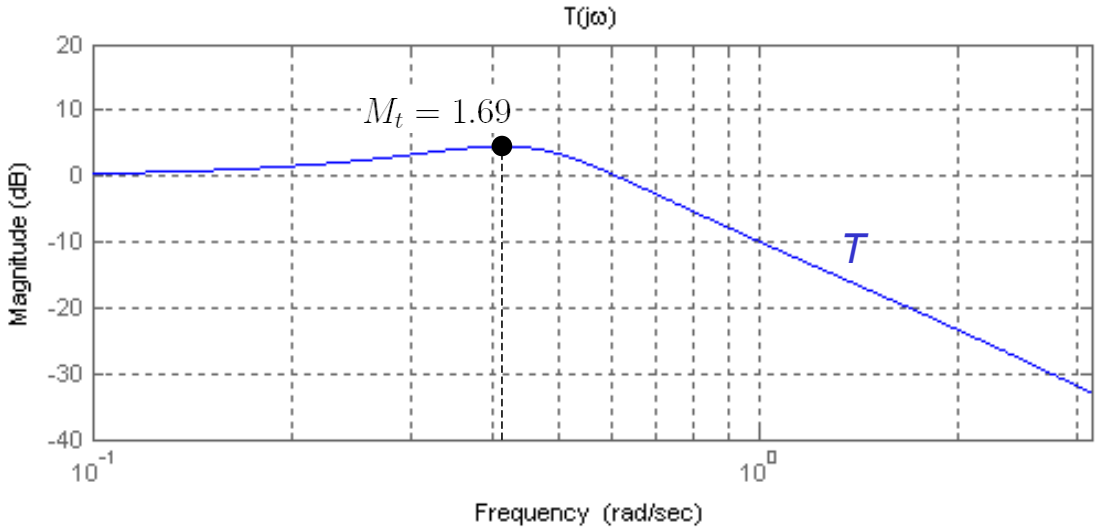
Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Ejemplo

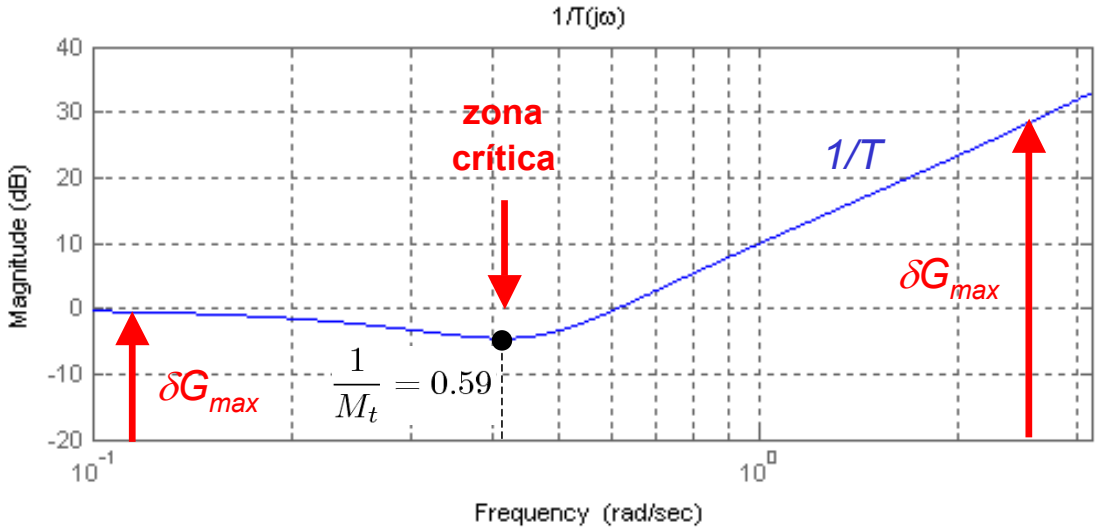
$$G(s) = \frac{2}{(s+0.2)(s+1)(s+3)}$$

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$k_p = 0.5,\ k_i = 0.25$$



$$\omega_{mt} = 0.41\ \text{rads/s}$$



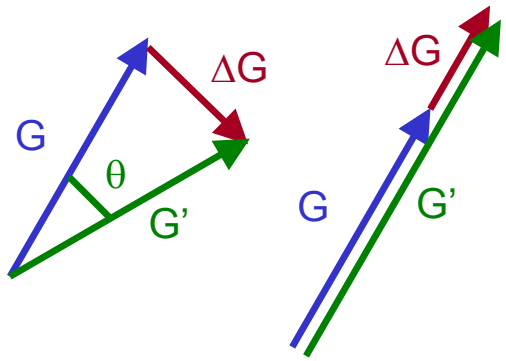
Consecuencias del T.E.R.:

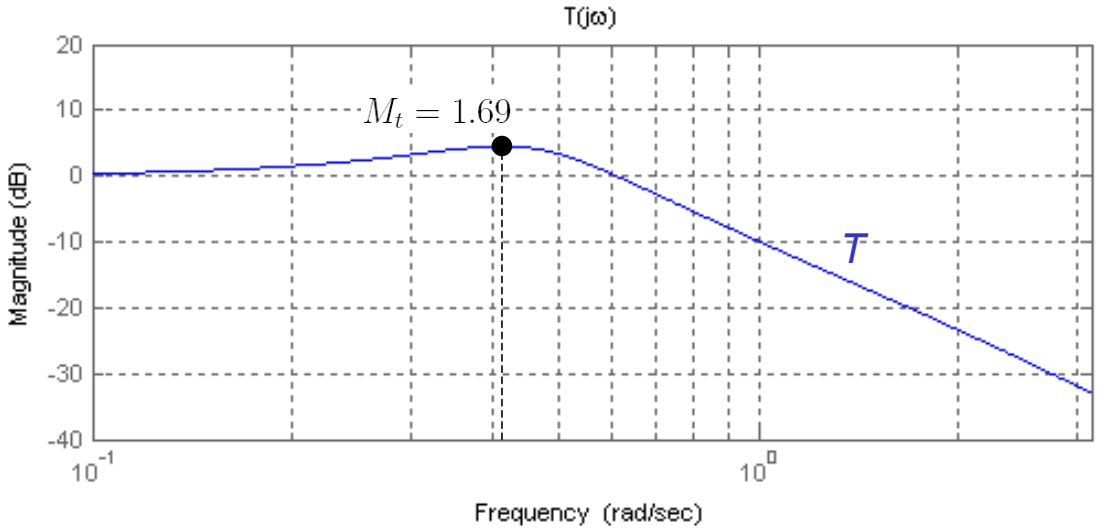
- *A frecuencias muy altas o muy bajas son admisibles variaciones $\Delta G/G$ mayores*
- *Con vistas al control, el sistema debe estar bien modelado en torno a w_{cg}*

Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

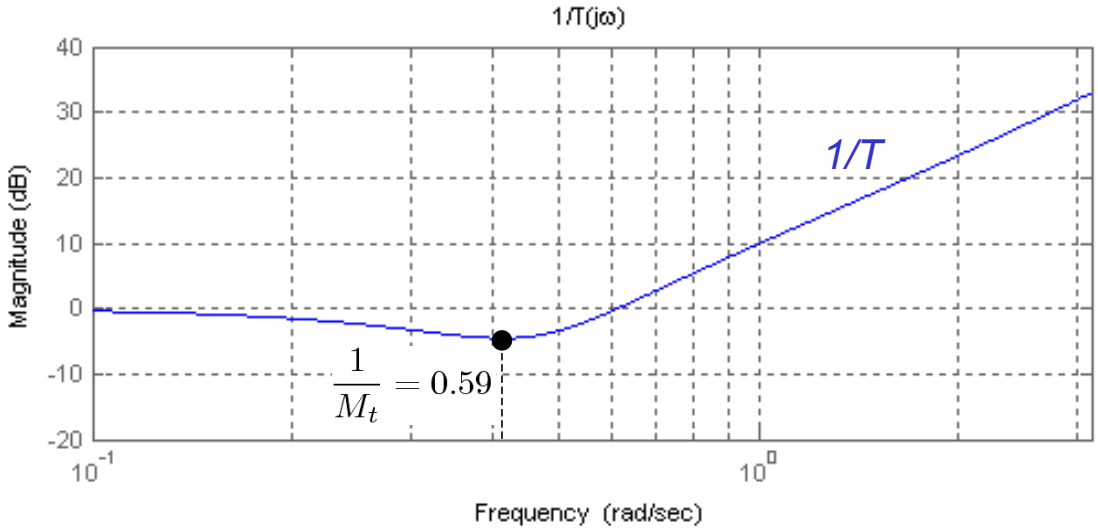
Ejemplo

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| < \frac{1}{M_t} = 0.59$$





$\omega_{mt} = 0.41\,\text{rads/s}$

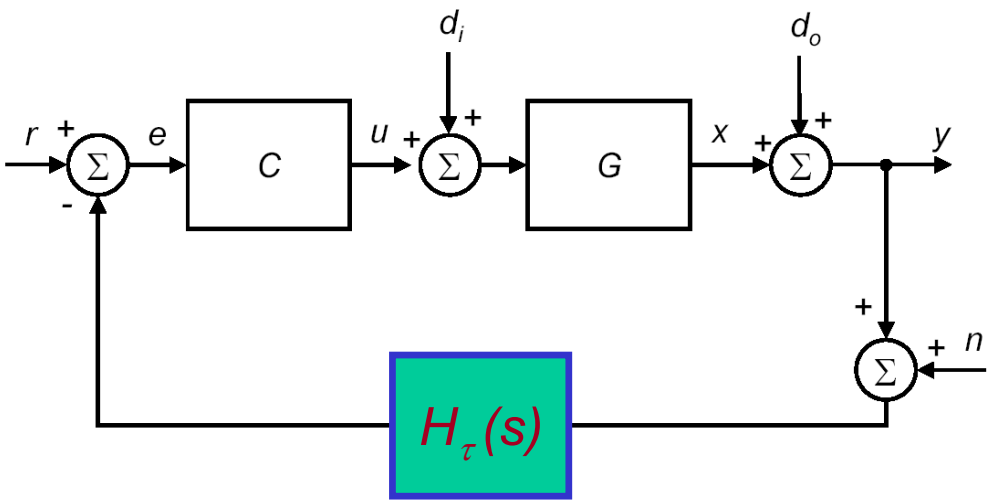


En el peor caso son admisibles:

- *Variaciones puras de fase de hasta unos 35º*
- *Variaciones puras de ganancia de hasta el 59%*

Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Ejemplo: Elección del sensor basada en el T.E.R.



$$H_\tau(s) = \frac{1}{(1+\tau s)}$$

¿cómo afecta el sensor a la estabilidad?

Se supone el siguiente diseño basado en realimentación unitaria:

$$G_o(s)C(s) = \frac{0.5}{s(s+1)^2}$$

$$T_o(s) = \frac{G_o(s)C(s)}{1+G_o(s)C(s)} = \frac{0.5}{s^3+2s^2+s+0.5}$$

Impacto de la incertidumbre en la estabilidad

Ejemplo: Elección del sensor basada en el T.E.R.

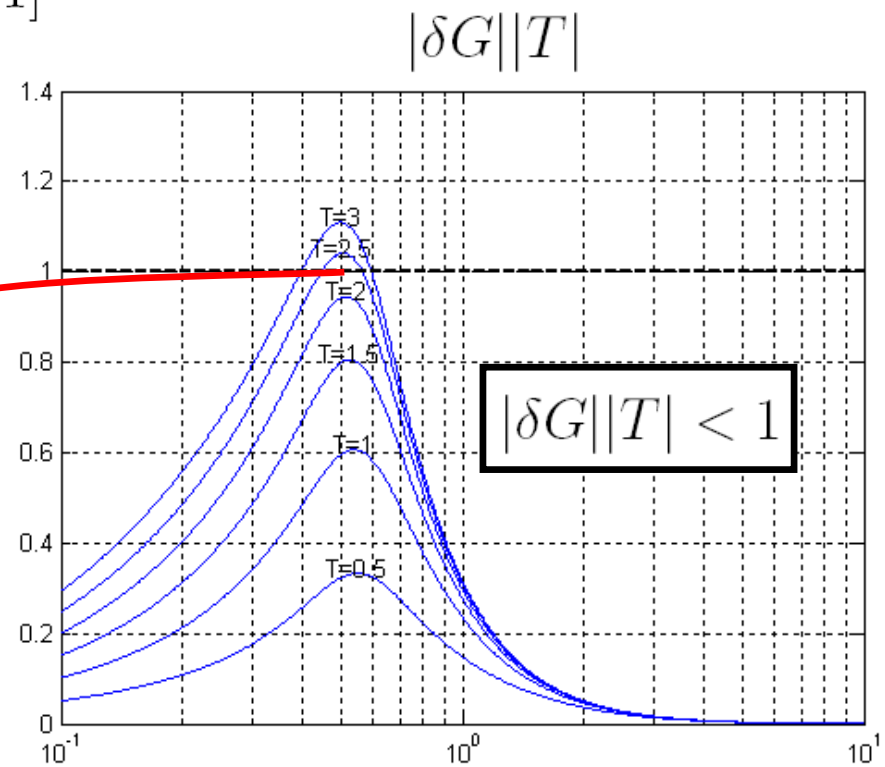
$$G'(s) = G(s)H(s) = G(s)[1 + \overbrace{H(s) - 1}^{\delta G}]$$

$$\delta G(s) = \frac{1}{1+\tau s} - 1 = \frac{-\tau s}{1+\tau s}$$

τ_{max} ~ 2.2

estabilidad garantizada

τ	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
MF	32.9^o	24.5^o	18.7^o	14.7^o	11.9^o	9.8^o
MG (dB)	7.04	5.00	3.88	3.17	2.68	2.32



Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- **Integral de Bode y limitaciones en el control**
- Conclusiones

Integral de Bode y limitaciones en el control

Hipótesis:

- *El sistema realimentado es estable*
- *L = CG decae al menos tan rápido como $1/s^2$*
  (ej. el controlador y la planta tienen anchos de banda limitados)

Para plantas estables:

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|d\omega = 0$$

Para plantas inestables:

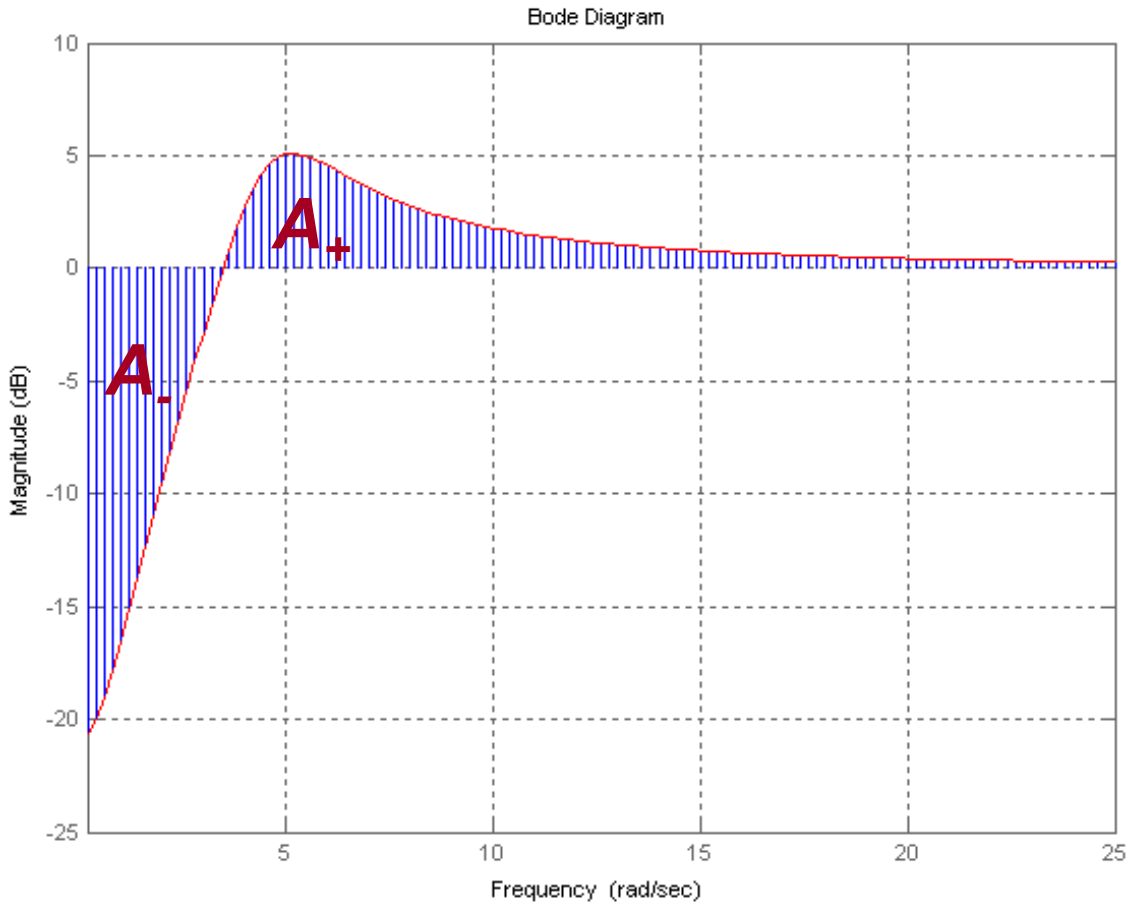
$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{p_i \in \mathbb{C}^+} \mathrm{Re}(p_i)$$

Integral de Bode y limitaciones en el control

Planta estable:

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|d\omega = 0$$

$$A_- = A_+$$

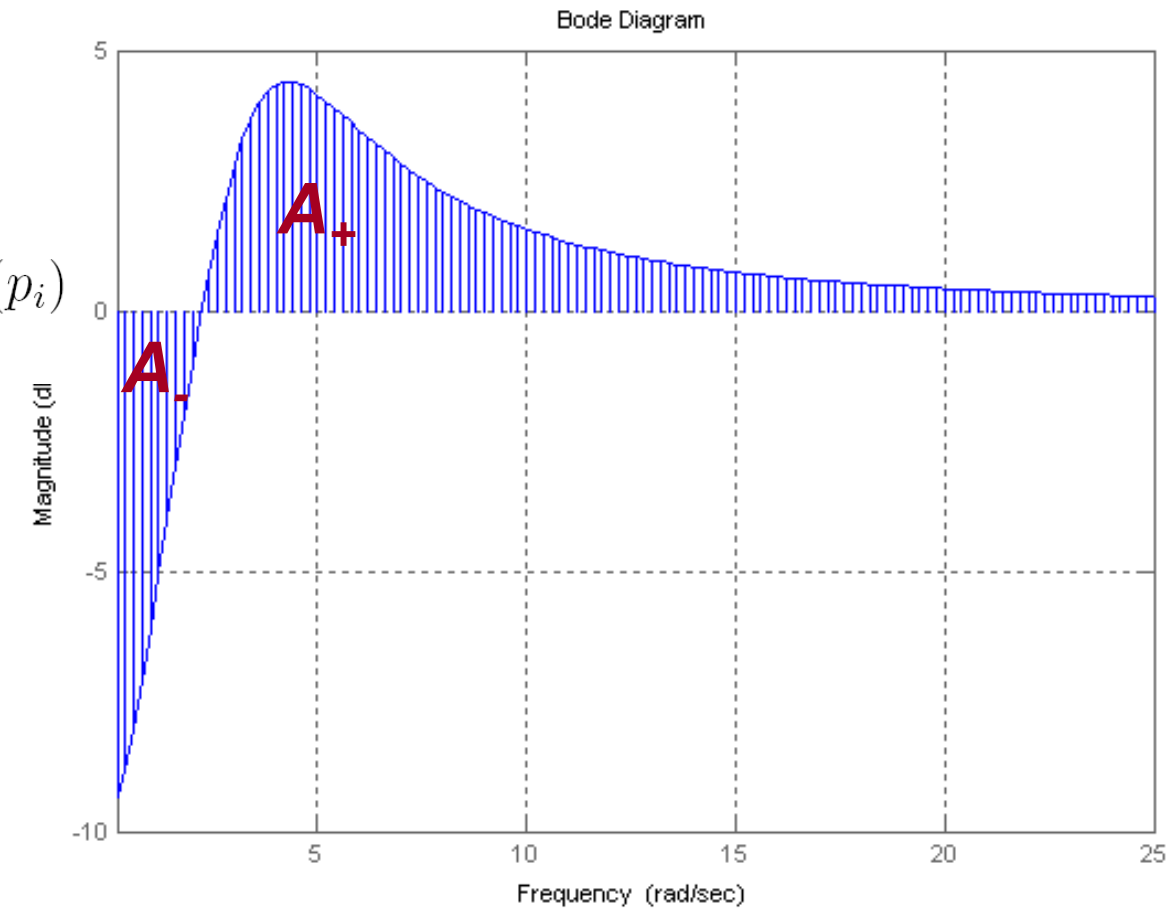


Integral de Bode y limitaciones en el control

Planta inestable:

$$\int_0^{\infty} \log|S(j\omega)|d\omega \;=\; \pi \sum_{p_i \in \mathbb{C}^+} \mathrm{Re}(p_i)$$

$$A_- << A_+$$

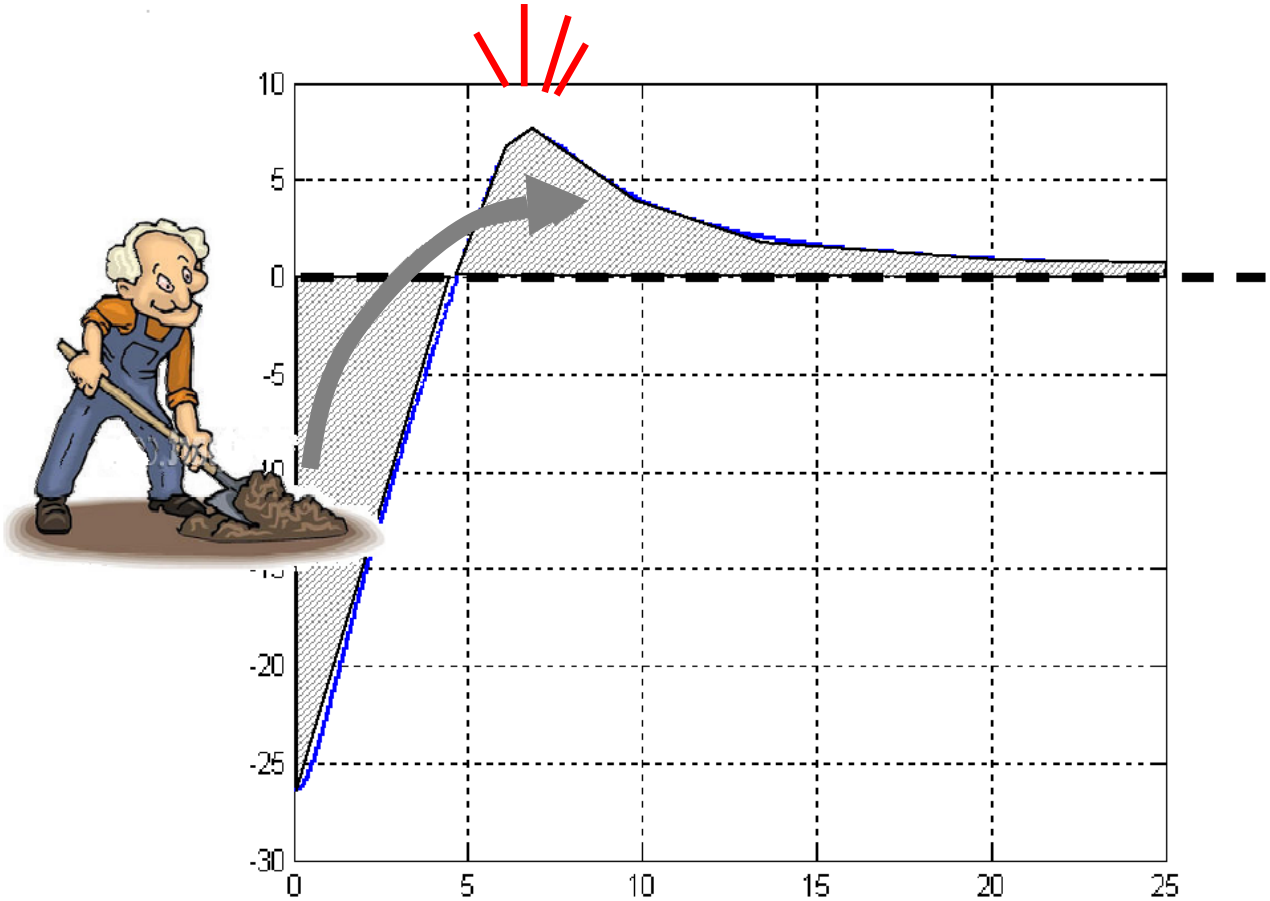


Integral de Bode y limitaciones en el control

Durante el diseño buscamos reducir la función de sensibilidad

- *Reducir impacto de perturbaciones*
- *Mejorar márgenes de estabilidad*
- *etc.*

! Pero lo que hacermos es mover "area" de un sitio hacia otro !

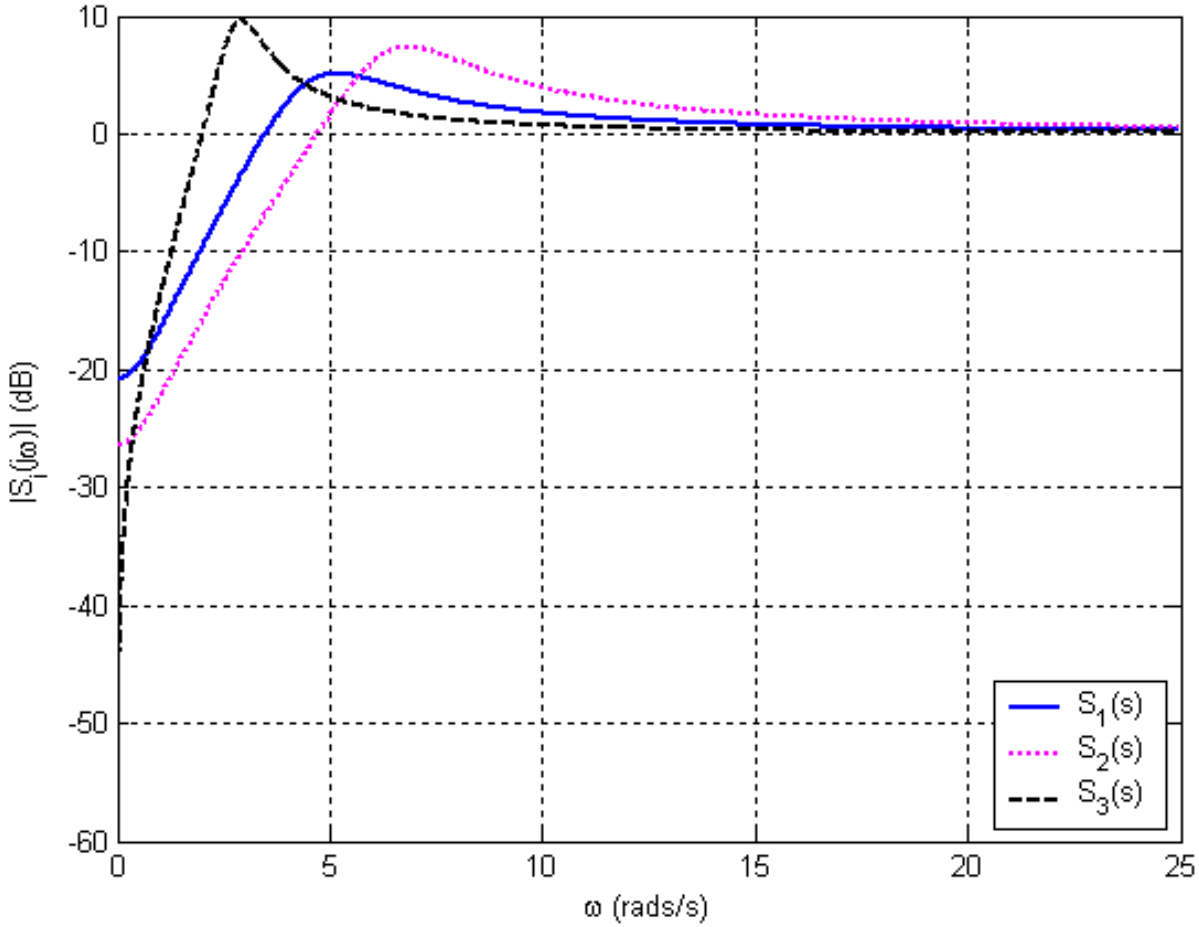


Integral de Bode y limitaciones en el control

Ejemplo

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

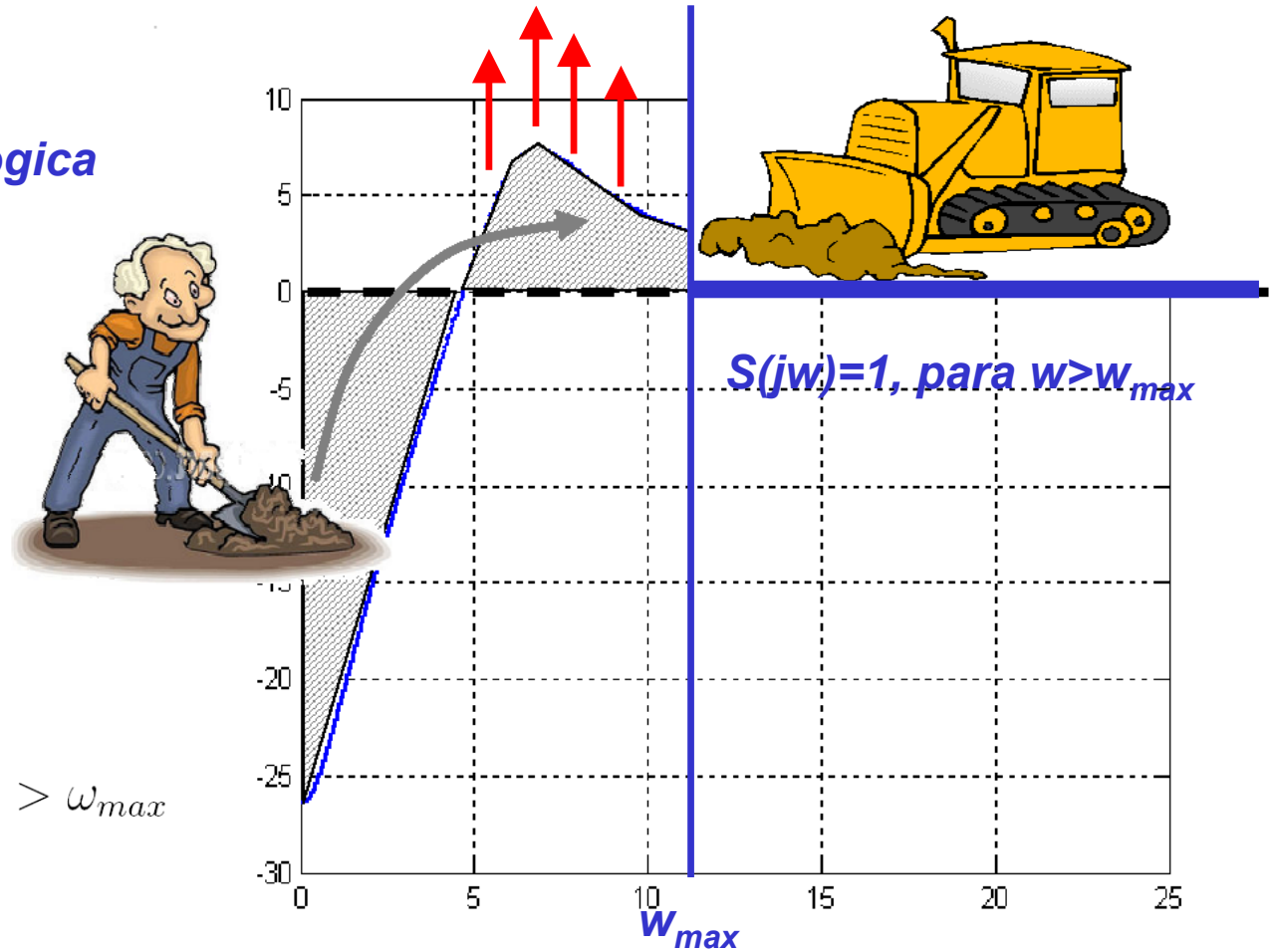
$$\begin{aligned} C_1(s) &= 10 \\ C_2(s) &= 20 \\ C_3(s) &= 4 \cdot \frac{(s+2)}{s} \end{aligned}$$



Integral de Bode y limitaciones en el control

limitaciones tecnológicas (ancho de banda disponible)

Si la implementación tecnológica del controlador o la planta no permite asegurar lo que ocurre más allá de una frecuencia w_{max} el problema se agrava...



$$|C(j\omega)| \approx 0 \quad \text{para} \quad \omega > \omega_{max}$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{para} \quad \omega > \omega_{max}$$

Indice de la exposición

- La sensibilidad en el proceso de diseño
- Noción de sensibilidad
- Funciones de sensibilidad
- Rechazo a perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Acción de control
- Análisis de las acciones P, PI, PD
- Robustez
  - *Incertidumbres en el proceso*
  - *Sensibilidad y estabilidad*
  - *Teorema de Estabilidad Robusta*
- Integral de Bode y limitaciones en el control
- Conclusiones

Conclusiones Generales del Tema

Papel de la sensibilidad en el diseño

- ***El diseño de un sistema de control debe tener en cuenta múltiples objetivos, además del seguimiento de referencias...***
- ***Es esencial disponer de herramientas de análisis que permitan evaluar esos objetivos.***
- ***Las funciones de sensibilidad aportan información global sobre esos objetivos, incluyendo: rechazo a perturbaciones, seguimiento de referencias, acción de control, estabilidad relativa y robustez.***

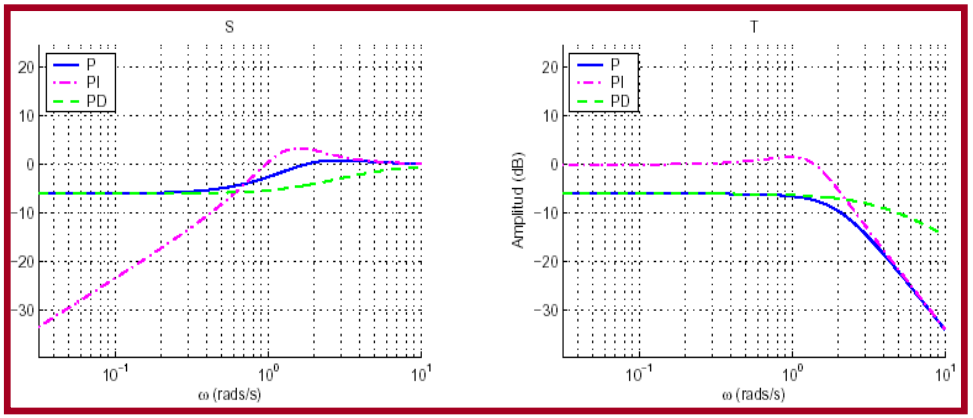
Conclusiones Generales del Tema

Funciones de sensibilidad

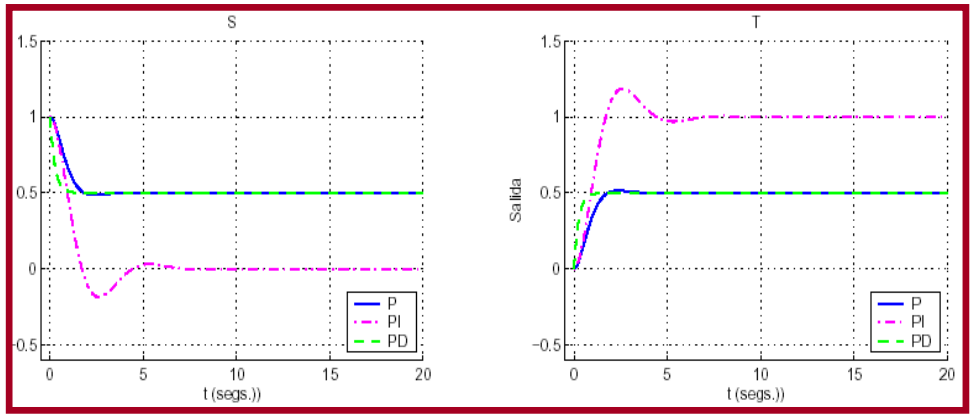
- ***Las funciones de sensibilidad permiten determinar instantáneamente gran cantidad de información sobre el sistema de control (perturbaciones, estabilidad, robustez...)***

- ***Pueden visualizarse en frecuencia y en el tiempo***

Frecuencia



Tiempo



Conclusiones Generales del Tema

Funciones de sensibilidad

- ***Función de sensibilidad S(s) :***
  - *Capacidad de rechazo a perturbaciones del bucle*
  - *Errores de seguimiento de referencias*
  - *Estabilidad relativa (M_s, márgenes robustos MG^* y MF^* ...)*
  - *Efecto de incertidumbres sobre la respuesta*
- ***Función de sensibilidad complementaria T(s) :***
  - *Seguimiento de referencias*
  - *Efecto del ruido del sensor*
  - *Efecto de incertidumbres sobre la estabilidad (estab. robusta).*
  - *Pone límites a las alteraciones admisibles en el proceso*

Conclusiones Generales del Tema

Funciones de sensibilidad

- ***Función de sensibilidad de control $S_u(s)$:***
  - *Impacto sobre la acción de control de perturbaciones y referencia*
  - *Ganar ancho de banda exige acciones de control elevadas*
- ***Función de sensibilidad de entrada $S_i(s)$:***
  - *Efecto de perturbaciones de carga (a la entrada del proceso)*

Conclusiones Generales del Tema

limitaciones del control

- ***Las funciones de sensibilidad están algebraicamente relacionadas***

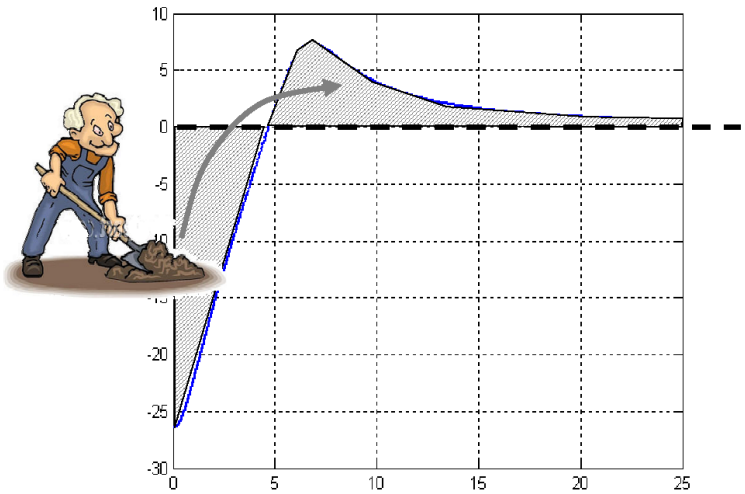
$$T(s) + S(s) = 1 \qquad S_u(s) = \frac{T(s)}{G(s)} = C(s)S(s)$$

... y no pueden moldearse arbitrariamente, lo que constituye serias limitaciones en el control

Conclusiones Generales del Tema

Limitaciones del control

- ***La integral de Bode introduce una severa restricción adicional sobre la morfología de S(s), de importantes consecuencias que debe ser tenida en cuenta de cara a un diseño realista***

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|d\omega = 0$$

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{p_i \in \mathbb{C}+} \mathrm{Re}(p_i)$$