

$$G(j\omega) = \frac{A \prod_{i=1}^m \left( \frac{j\omega}{z_i} + 1 \right)}{(j\omega)^r \prod_{j=1}^n \left( \frac{j\omega}{p_j} + 1 \right)}. \quad (4.5)$$

3. Obtener el módulo de  $G(j\omega)$ :

$$|G(j\omega)| = \frac{A \left| j \frac{\omega}{z_1} + 1 \right| \left| j \frac{\omega}{z_2} + 1 \right| \dots \left| j \frac{\omega}{z_m} + 1 \right|}{\left| (j\omega)^r \right| \left| j \frac{\omega}{p_1} + 1 \right| \left| j \frac{\omega}{p_2} + 1 \right| \dots \left| j \frac{\omega}{p_n} + 1 \right|}. \quad (4.6)$$

4. Calcular el ángulo de fase  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi = \angle G(j\omega) = & \angle A + \angle(j\omega/z_1 + 1) + \angle(j\omega/z_2 + 1) + \dots + \angle(j\omega/z_m + 1) \\ & - \angle(j\omega)^r - \angle(j\omega/p_1 + 1) - \angle(j\omega/p_2 + 1) - \dots - \angle(j\omega/p_n + 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

5. Evaluar el módulo y la fase para distintos valores de  $\omega$  y graficar los valores calculados en el plano polar.

**EJEMPLO 1: Construcción del diagrama de Nyquist para un sistema de tercer orden. Estabilidad relativa.**

Determinar los valores de la ganancia  $k$  del sistema de la Fig. 4.1.1, para asegurar su estabilidad en lazo cerrado. Calcular los márgenes de ganancia y de fase. La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s-1)}. \quad (4.1.1)$$

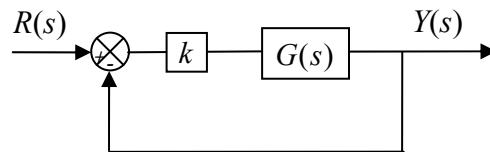


Figura 4.1.1 Diagrama de un sistema realimentado unitariamente (Ejemplo 1)

**Solución Ejemplo 1**

Para analizar la estabilidad del sistema de la Fig. 4.1.1 es necesario, en primer lugar, construir el diagrama polar del sistema en cadena abierta. La función de transferencia en cadena abierta es:

$$G_{la}(s) = k G(s) = k \frac{s+1}{s(s-2)(s-1)}. \quad (4.1.2)$$

El diagrama polar se va a obtener para  $k=1$ , lo que significa que  $G_{la}(s) = G(s)$ .

Una vez obtenido este diagrama, se estudia la estabilidad por el Criterio de Nyquist para todos los valores de la ganancia  $k$ .

**i. Construcción del Diagrama Polar (Lugar de Transferencia de Nyquist)**

Para realizar el diagrama polar de  $G_{la}(s)$  hay que comenzar por normalizar la función de transferencia en lazo abierto:

$$G_{la}(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s-1)} = \frac{0,5(s+1)}{s(1-0,5s)(1-s)}. \quad (4.1.3)$$

Ahora, en (4.1.3) se sustituye  $s$  por  $j\omega$ :

$$G_{la}(j\omega) = \frac{0,5(1+j\omega)}{j\omega(1-j0,5\omega)(1-j\omega)}. \quad (4.1.4)$$

La magnitud de  $G_{la}(j\omega)$  está dada por:

$$|G_{la}(j\omega)| = \frac{0,5\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{0,5}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}}. \quad (4.1.5)$$

La expresión de la fase se determina considerando la contribución en fase de cada término que compone la función de transferencia:

El número real positivo 0,5 aporta  $0^\circ$

El término  $s+1$  aporta una fase dada por  $\tan^{-1}(\omega)$

El polo simple en el origen  $\frac{1}{s}$  aporta  $-90^\circ$

El término  $\frac{1}{1-s}$  aporta una fase dada por  $-\tan^{-1}(-\omega/1) = +\tan^{-1}(\omega)$

El término  $\frac{1}{1-0,5s}$  aporta una fase dada por  $-\tan^{-1}(-0,5\omega/1) = +\tan^{-1}(0,5\omega)$ .

Por consiguiente, la fase es:

$$\Phi = 0^\circ + \tan^{-1}(\omega) - 90^\circ + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) = -90^\circ + 2\tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega). \quad (4.1.6)$$

Al evaluar estas expresiones para distintos valores de  $\omega$  se tiene:

$$\text{Si } \omega = 0, \quad |G_{la}(j\omega)| \rightarrow +\infty, \quad \Phi = -90^\circ$$

$$\omega = 0,1, \quad |G_{la}(j\omega)| = 4,994, \quad \Phi = -75,72^\circ$$

$$\omega = 1, \quad |G_{la}(j\omega)| = 0,4472, \quad \Phi = 26,57^\circ$$

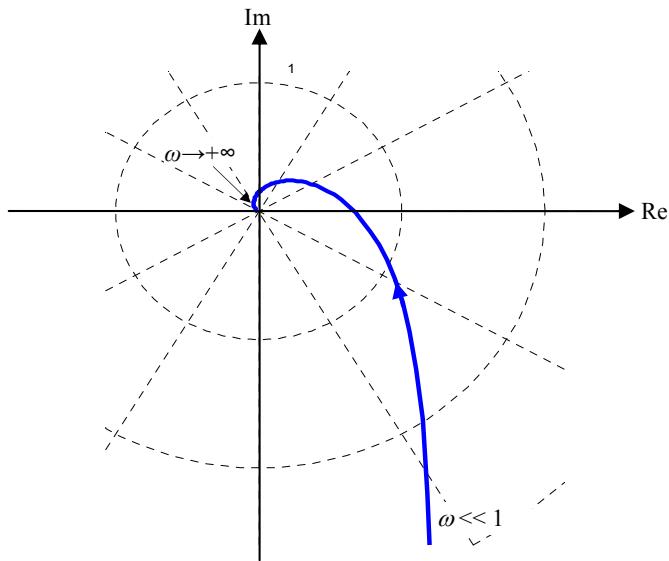
$$\omega = 2, \quad |G_{la}(j\omega)| = 0,1768, \quad \Phi = 81,87^\circ$$

$$\omega = 10, \quad |G_{la}(j\omega)| = 9,806 \times 10^{-3}, \quad \Phi = 157,3^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty, \quad |G_{la}(j\omega)| \rightarrow 0, \quad \Phi = 180^\circ.$$

El diagrama polar de este sistema inicia tangente al eje imaginario negativo, pasa por el IV, I y II cuadrantes del plano polar, en este orden, para finalmente llegar al origen tangente al eje real negativo, como se muestra en la Fig. 4.1.2. Esta simulación fue obtenida con Matlab, ejecutando el siguiente código:

```
%Inicio de rutina
clear all;
w=0.1;
magX=0;
phiX=0;
for w=0.1:0.05:10,
    mag=(0.5)/(w*sqrt(1+0.25*w^2));
    magX=[magX;mag];
    phi=-90+2*atan(w)+atan(0.5*w);
    phiX=[phiX;phi*pi/180];
end
polar(phiX(3:size(phiX)),magX(3:size(magX)));
%Fin de rutina
```

Figura 4.1.2 Diagrama polar del Ejemplo 1 ( $k=1$ )

Sin embargo, se puede obtener rápidamente el Lugar de Nyquist con el comando:

```
nyquist(0.5*[1 1], conv([-0.5 1 0], [-1 1]))
```

cuyo resultado se muestra en la Fig. 1.3, pudiendo observarse la misma curva de la Fig. 4.1.2 (en trazo continuo) junto con su curva simétrica respecto del eje real (en trazo discontinuo). Es claro que la curva en trazo continuo corresponde a la evaluación de la frecuencia  $\omega$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ , mientras que su curva simétrica corresponde al intervalo de frecuencias  $(-\infty, 0)$ .

## ii. Márgenes de ganancia y de fase

Para calcular el margen de ganancia se procede a buscar el valor de la frecuencia para la cual  $\Phi = 180^\circ$ . Lo anterior significa que en la expresión (4.1.6) se hace:

$$180^\circ = -90^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega)$$

$$270^\circ = 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \rightarrow \text{ solo si } \omega \rightarrow +\infty!$$

El margen de ganancia se obtiene haciendo el siguiente cálculo:

$$\text{MG} = -20 \log \left( \left| G_{la}(j\omega) \right|_{\omega \rightarrow +\infty} \right) \rightarrow +\infty.$$

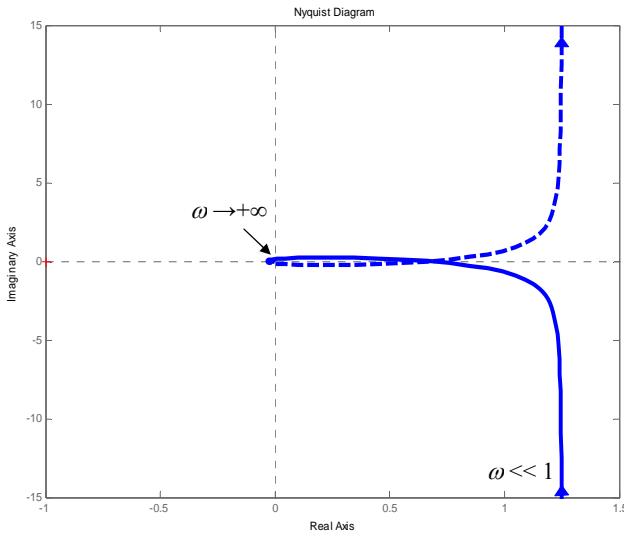


Figura 4.1.3 Diagrama polar del Ejemplo 1 usando el comando nyquist ( $k=1$ )

El margen de ganancia obtenido, cuando  $\omega \rightarrow +\infty$ , significa que el Lugar de Nyquist solo toca el eje real negativo en el límite superior de la frecuencia. En la Fig. 4.1.4, la cual es un acercamiento de la Fig. 4.1.3 en el origen, se observa cómo se acerca la curva al eje de los  $180^\circ$  mientras su magnitud decrece hasta hacerse igual a 0. Es decir, que toca el eje real negativo solo al llegar al origen. Sin importar el valor que se le pueda dar a la ganancia  $k$ , siempre y cuando  $k > 0$ , el margen de ganancia será infinito.

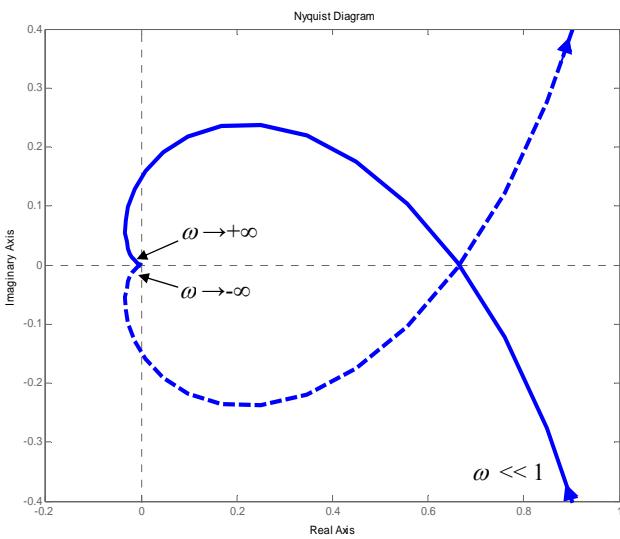


Figura 4.1.4 Diagrama polar del Ejemplo 1 (acercamiento al origen,  $k=1$ )

Para calcular el margen de fase se busca el valor de frecuencia para el cual  $|G_{la}(j\omega)|=1$ , esto es:

$$\frac{0,5}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}} = 1 \rightarrow \omega = 0,486 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Al sustituir en la expresión del ángulo de fase este valor de frecuencia se tiene:

$$\Phi = -90^\circ + 2 \tan^{-1}(0,486) + \tan^{-1}(0,5 \times 0,486) = -24,50^\circ.$$

Finalmente, el margen de fase es:

$$MF = 180^\circ + \Phi = 180^\circ - 24,50^\circ = 155,5^\circ.$$

En la Fig. 4.1.5 se señala el punto del plano polar para el cual se ha calculado el margen de fase.

En Matlab, es fácil obtener los valores de los márgenes de ganancia y de fase. En este caso, basta con ejecutar la secuencia de comandos:

```
sys=tf(0.5*[1 1],conv([-0.5 1 0],[-1 1]))
allmargin(sys)
```

para obtener la información solicitada:

```
GMFrequency: Inf
GainMargin: Inf
PMFrequency: 0.4858
PhaseMargin: 155.4775
DMFrequency: 0.4858
DelayMargin: 5.5855
Stable: 0
```

donde `GainMargin` y `PhaseMargin` son los márgenes de ganancia y fase calculados, respectivamente, `GMFrequency` es la frecuencia para la cual se calculó el margen de ganancia (o frecuencia de cruce de fase), `PMFrequency` es la frecuencia para la cual se calculó el margen de fase (o frecuencia de cruce de ganancia), y la condición `Stable:0` indica que el sistema no es estable en lazo cerrado. Cuando se obtiene `Stable:1` el sistema es estable en lazo cerrado.

### iii. Análisis de la estabilidad del sistema en lazo cerrado

Recuérdese que según el Criterio de Estabilidad de Nyquist a medida que se encierra el semiplano derecho del plano  $s$  (se sigue en sentido horario el **Contorno de Nyquist**), se obtiene el **Lugar de Transferencia de Nyquist**, que es la curva mostrada en la Fig. 4.1.2.

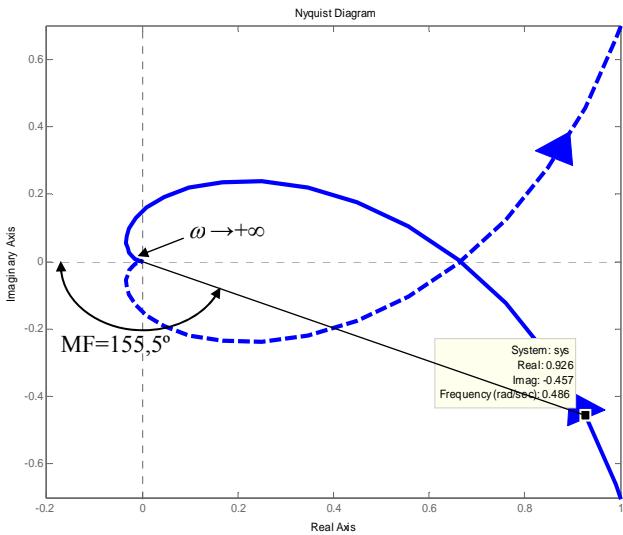


Figura 1.5 Diagrama polar del Ejemplo 1 mostrando el margen de fase ( $k=1$ )

En el Contorno de Nyquist de la Fig. 4.1.6 (a) se ha marcado la ubicación de los ceros y polos de la función de transferencia en lazo abierto descrita en (4.1.3). Dado que hay un polo de  $G_{la}(s)$  en el origen, el Contorno no puede pasarle por encima sino que debe bordearlo (véase la Fig. 4.1.6 (b)).

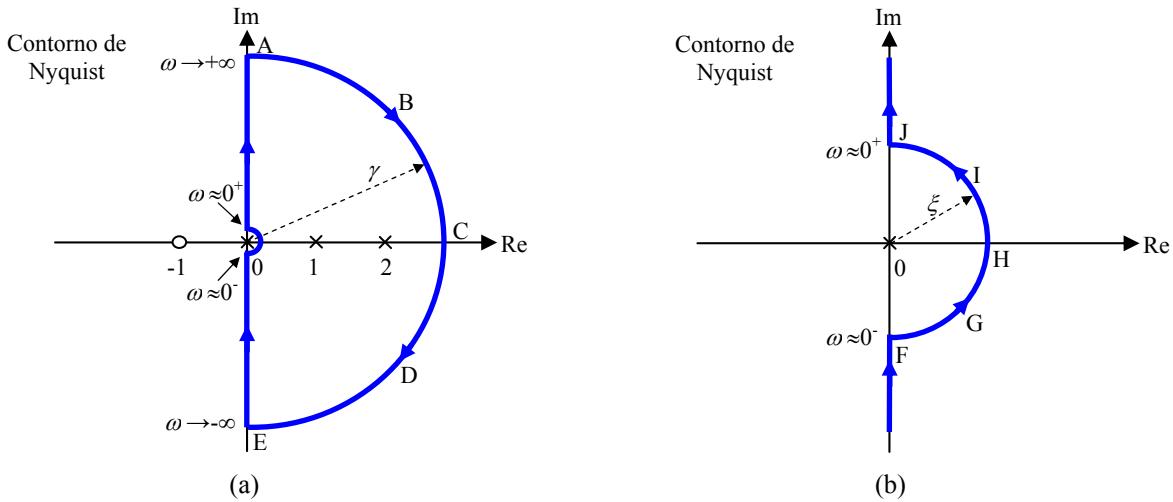


Figura 4.1.6 (a) Contorno de Nyquist del Ejemplo 1, (b) Acercamiento en el origen del Contorno de Nyquist

El recorrido entre  $\omega \approx 0^+$  y  $\omega \rightarrow +\infty$  corresponde a la parte del Lugar de Transferencia de Nyquist dibujado en la Fig. 4.1.2. Para continuar dibujando el contorno, se debe hacer un barrido

desde el punto correspondiente a  $\omega \rightarrow +\infty$  hasta el punto correspondiente a  $\omega \rightarrow -\infty$ , siguiendo el arco de radio  $\gamma$  cuya magnitud tiende a infinito. El Lugar de Transferencia de Nyquist se obtiene sustituyendo en  $G_{la}(s)$  la variable  $s$  por la forma polar:  $\gamma \exp(j\varphi)$ , donde  $\gamma$  es la magnitud del número y  $\varphi$  es su correspondiente ángulo:

$$G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)] = \frac{0,5[1+\gamma \exp(j\varphi)]}{\gamma \exp(j\varphi)[1-0,5\gamma \exp(j\varphi)][1-\gamma \exp(j\varphi)]}. \quad (4.1.7)$$

Al descomponer:

$$\gamma \exp(j\varphi) = \gamma \cos \varphi + j\gamma \sin \varphi \quad (4.1.8)$$

en cada uno de los términos de  $G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)]$ , la componente real que acompaña al coseno puede ser despreciada en magnitud respecto de la magnitud de la propia componente coseno. Es decir que:

$$G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)] = \frac{0,5[\cancel{\gamma} + \gamma \cos \varphi + j\gamma \sin \varphi]}{\gamma(\gamma \cos \varphi + j\gamma \sin \varphi)[\cancel{\gamma} - 0,5\gamma \cos \varphi - 0,5j\gamma \sin \varphi][\cancel{\gamma} - \gamma \cos \varphi - j\gamma \sin \varphi]}.$$

En vista de lo anterior, la expresión (4.1.7) puede simplificarse en:

$$\begin{aligned} G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)] &\approx \frac{0,5[\gamma \exp(j\varphi)]}{\gamma \exp(j\varphi)[-0,5\gamma \exp(j\varphi)][-\gamma \exp(j\varphi)]} \\ &\approx \frac{1}{[\gamma \exp(j\varphi)][\gamma \exp(j\varphi)]} = \frac{1}{\gamma^2 \exp(j2\varphi)}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

La magnitud de (4.1.9) está dada por:

$$|G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)]| \approx \frac{1}{\gamma^2}. \quad (4.1.10)$$

Dado que  $\gamma \rightarrow +\infty$ , entonces  $|G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)]| \rightarrow 0$ .

La expresión de fase de (4.1.9) es:

$$\Phi = -2\varphi. \quad (4.1.11)$$

Al hacer el barrido de ángulo en el Contorno de Nyquist desde el eje de  $+90^\circ$  hasta el eje de  $-90^\circ$ , en sentido horario, se obtiene la siguiente información acerca de la trayectoria del Lugar de Nyquist:

Si  $\varphi = +90^\circ$  ( $\omega \rightarrow +\infty$ ),  $\Phi = -180^\circ$  (coordenada A)

$\varphi = +45^\circ$ ,  $\Phi = -90^\circ$  (coordenada B)

$\varphi = 0^\circ$ ,  $\Phi = 0^\circ$  (coordenada C)

$\varphi = -45^\circ$ ,  $\Phi = +90^\circ$  (coordenada D)

$\varphi = -90^\circ$  ( $\omega \rightarrow -\infty$ ),  $\Phi = +180^\circ$ . (coordenada E)

El Lugar de Nyquist correspondiente a este recorrido se muestra en la Fig. 4.1.7 como un acercamiento de dicha curva en el origen, dado que el mismo ocurre prácticamente en este punto (recuerde que  $|G_{la}[\gamma \exp(j\varphi)]| \rightarrow 0$ ).

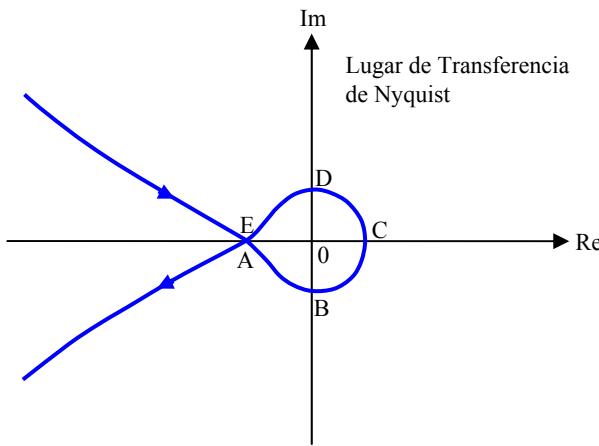


Figura 4.1.7 Acercamiento de la Trayectoria de Nyquist en el origen

Dado que este trozo de curva no se aprecia a la escala normal de la figura, no se suele ni calcular ni dibujar, y lo que se hace es conectar directamente el trazado del Lugar de Transferencia de Nyquist (para frecuencias entre  $\omega \approx 0^+$  y  $\omega \rightarrow +\infty$ ) con su simétrico (obtenido para frecuencias entre  $\omega \rightarrow -\infty$   $\omega \approx 0^-$ ), que es justamente lo que se muestra en la Fig. 4.1.4.

Ahora solo falta por hacer el recorrido del Contorno de Nyquist entre  $\omega \approx 0^-$  y  $\omega \approx 0^+$ , a través del arco mostrado en la Fig. 4.1.6(b) cuyo radio es  $\xi \ll 1$ . El Lugar de Transferencia de Nyquist se obtiene sustituyendo en  $G_{la}(s)$  la variable  $s$  por la forma polar:  $\xi \exp(j\varphi)$ , donde  $\xi$  es la magnitud del número y  $\varphi$  el ángulo.

$$G_{la}[\xi \exp(j\varphi)] = \frac{0,5[1+\xi \exp(j\varphi)]}{\xi \exp(j\varphi)[1-0,5\xi \exp(j\varphi)][1-\xi \exp(j\varphi)]}. \quad (4.1.12)$$

Dado que la magnitud de  $\xi$  es despreciable respecto a los términos reales puros, la expresión anterior puede aproximarse por:

$$G_{la} [\xi \exp(j\varphi)] \approx \frac{0,5}{\xi \exp(j\varphi)}. \quad (4.1.13)$$

La magnitud de (4.1.13) es:

$$|G_{la} [\xi \exp(j\varphi)]| \approx \frac{0,5}{\xi} \rightarrow +\infty \quad (4.1.14)$$

y su fase es:

$$\Phi = 0^\circ - \varphi = -\varphi. \quad (4.1.15)$$

Al hacer el barrido de ángulo en el Contorno de Nyquist, desde el eje de  $-90^\circ$  ( $\omega \approx 0^-$ ) hasta el eje de  $+90^\circ$  ( $\omega \approx 0^+$ ), en sentido antihorario, se obtiene la siguiente información acerca de la trayectoria del Lugar de Nyquist:

- |   |                |
|---|----------------|
| Si $\varphi = -90^\circ$ ( $\omega \approx 0^-$ ), $\Phi = +90^\circ$ | (coordenada F) |
| $\varphi = -45^\circ$ , $\Phi = +45^\circ$                            | (coordenada G) |
| $\varphi = 0^\circ$ , $\Phi = 0^\circ$                                | (coordenada H) |
| $\varphi = +45^\circ$ , $\Phi = -45^\circ$                            | (coordenada I) |
| $\varphi = +90^\circ$ ( $\omega \approx 0^+$ ), $\Phi = -90^\circ$ .  | (coordenada J) |

El Lugar de Nyquist completo se ilustra en la Fig. 4.1.8, en el que se señala cada una de las coordenadas correspondientes al barrido entre  $\omega \approx 0^-$  y  $\omega \approx 0^+$ , las cuales forman un medio círculo de radio infinito ( $|G_{la} [\xi \exp(j\varphi)]| \rightarrow +\infty$ ). Obsérvese que habiendo completado el recorrido del Contorno de Nyquist, la trayectoria o el **Lugar de Nyquist obtenido es una curva cerrada**. Esta condición debe cumplirse siempre, de lo contrario el procedimiento no se ha aplicado correctamente.

Ahora se puede aplicar el Criterio de Estabilidad de Nyquist, el cual plantea que para que el sistema en lazo cerrado, con realimentación unitaria, sea estable se debe cumplir que:

$$Z = N + P = 0, \quad (4.1.16)$$

donde  $P$  es el número de polos de la función de transferencia en lazo abierto  $G_{la}(s)$  que son inestables,  $N$  es el número de vueltas alrededor del punto  $-1+j0$ , tal que si  $N$  es positivo el sentido de giro es horario y si  $N$  es negativo el sentido de giro es antihorario, y  $Z$  es el número de ceros

del polinomio  $1 + G_{la}(s)$  en el semiplano derecho, o, lo que es equivalente,  $Z$  es el número de polos del sistema en lazo cerrado que son inestables. Si  $Z = 0$ , entonces el sistema en lazo cerrado no tendrá polos en el semiplano derecho.

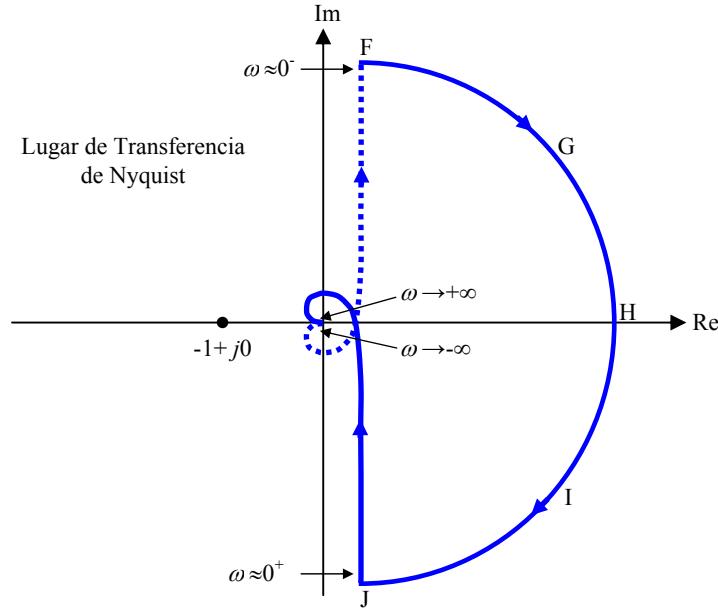


Figura 4.1.8 Lugar de Transferencia de Nyquist para el Ejemplo 1 ( $k > 0$ )

El sistema en lazo abierto analizado, cuya función de transferencia está dada por la expresión (4.1.3), tiene dos polos inestables, por lo tanto  $P = 2$ . El Lugar de Nyquist ilustrado en la Fig. 4.1.8 no encierra en ningún sentido al punto  $-1+j0$ , por lo que  $N = 0$ . En consecuencia:

$$Z = N + P = 0 + 2 = 2,$$

lo que significa que el sistema realimentado unitariamente, representado por la Fig. 4.1.1, cuando la ganancia  $k = 1$ , tiene 2 polos en el semiplano derecho haciendo que el sistema en lazo cerrado sea inestable.

Si se estudia el comportamiento del Lugar de Nyquist para cualquier valor de ganancia  $k > 0$ , la magnitud de  $G_{la}(j\omega) = k G(j\omega)$  es:

$$|G_{la}(j\omega)| = \frac{0,5k\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{0,5k}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}} \quad (4.1.17)$$

y su fase sigue estando descrita por la expresión (4.1.6), dado que  $k > 0$ . Por consiguiente, lo que se obtiene como resultado es que la trayectoria de la Fig. 4.1.8 se comprime (cuando  $0 < k < 1$ ) o se expande (cuando  $k > 1$ ), pero no rota alrededor del origen, y no altera el análisis de estabilidad

hecho puesto que en ningún caso se encierra el punto crítico. En conclusión, el sistema de lazo cerrado es inestable para cualquier valor de ganancia  $k > 0$ .

Ahora bien, si  $k$  es negativo, la figura va a rotar sobre el origen. La magnitud y fase de la función de transferencia en lazo abierto son:

$$|G_a(j\omega)| = \frac{0,5|k|}{\omega\sqrt{1+0,25\omega^2}} \quad (4.1.18)$$

$$\Phi = 180^\circ + \tan^{-1}(\omega) - 90^\circ + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) = 90^\circ + 2\tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega). \quad (4.1.19)$$

Dado que  $k$  es negativo, su aporte en fase es de  $180^\circ$ , haciendo que la expresión de la fase cambie.

La tendencia de la magnitud para bajas y altas frecuencias es la misma mostrada para cuando  $k > 0$ . Evaluando la fase para diferentes valores de  $\omega$  se tiene:

Si  $\omega = 0$ ,  $\Phi = 90^\circ$

$$\omega = 0,1, \Phi = 104,3^\circ$$

$$\omega = 1, \Phi = 206,6^\circ$$

$$\omega = 2, \Phi = 261,9^\circ$$

$$\omega = 10, \Phi = 337,3^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty, \Phi = 90^\circ + 270^\circ = 360^\circ \equiv 0^\circ.$$

Nótese que la trayectoria pertenece a los cuadrantes II, III y IV del plano polar (Fig. 4.1.9).

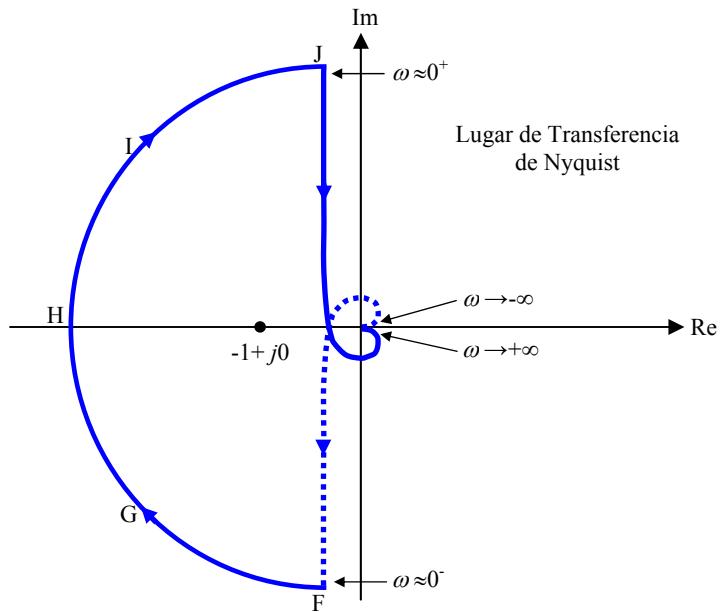


Figura 4.1.9 Lugar de Transferencia de Nyquist para el Ejemplo 1 ( $k < 0$ )

El Contorno de Nyquist es exactamente el mismo ilustrado en las Fig. 4.1.6 (a) y (b), y casi todo su recorrido se hace de la misma manera previamente descrita (entre  $\omega \approx 0^+$  y  $\omega \rightarrow +\infty$ , entre  $\omega \rightarrow +\infty$  y  $\omega \rightarrow -\infty$ , y entre  $\omega \rightarrow -\infty$  y  $\omega \approx 0^-$ ). Es muy importante recalcular aquella trayectoria de Nyquist correspondiente a la parte del contorno que bordea el polo en el origen, es decir, el arco que va de  $\omega \approx 0^-$  hasta  $\omega \approx 0^+$ . Para ello, se sustituye nuevamente  $s$  por  $\xi \exp(j\varphi)$  en (4.1.2):

$$G_{la}[\xi \exp(j\varphi)] = \frac{0,5k[1 + \xi \exp(j\varphi)]}{\xi \exp(j\varphi)[1 - 0,5\xi \exp(j\varphi)][1 - \xi \exp(j\varphi)]} \approx \frac{0,5k}{\xi \exp(j\varphi)}. \quad (4.1.20)$$

La magnitud de (4.1.20) está dada por:

$$|G_{la}[\xi \exp(j\varphi)]| \approx \frac{0,5|k|}{\xi} \rightarrow +\infty \quad (4.1.21)$$

para cualquier valor negativo de  $k$ .

La fase de (4.1.20) está descrita por:

$$\Phi = 180^\circ - \varphi, \quad (4.1.22)$$

donde  $180^\circ$  es la contribución de la ganancia negativa  $k$ .

Evaluando la fase  $\Phi$  para diferentes valores del ángulo  $\varphi$  se tiene:

- Si  $\varphi = -90^\circ$  ( $\omega \approx 0^-$ ),  $\Phi = +270^\circ$  (coordenada F)
- $\varphi = -45^\circ$ ,  $\Phi = +225^\circ$  (coordenada G)
- $\varphi = 0^\circ$ ,  $\Phi = 180^\circ$  (coordenada H)
- $\varphi = +45^\circ$ ,  $\Phi = +135^\circ$  (coordenada I)
- $\varphi = +90^\circ$  ( $\omega \approx 0^+$ ),  $\Phi = +90^\circ$ . (coordenada J)

La Fig. 4.1.9 muestra el nuevo diagrama polar para valores negativos de  $k$ .

Al analizar la estabilidad de este sistema se pueden presentar dos casos. En primer lugar, es importante determinar el valor de frecuencia  $\omega$  en el que la curva toca el eje real negativo, es decir, la frecuencia para la cual la fase  $\Phi = 180^\circ$  en la expresión (4.1.19):

$$\Phi = 180^\circ = 90^\circ + 2 \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(0,5\omega) \rightarrow \omega \approx 0,708 \text{ rad.s}^{-1}.$$

La magnitud evaluada para esta frecuencia es:

$$|G_{la}(j\omega)|_{\omega=0,708} = \frac{0,5|k|}{0,708\sqrt{1+0,25\times(0,708)^2}} = 0,6657|k|.$$

El primer caso es el ilustrado en la Fig. 4.1.9, para el cual:

$$|G_{la}(j\omega)|_{\omega=0,708} < 1 \rightarrow 0,6657|k| < 1 \rightarrow |k| < 1,5021.$$

El número de polos inestables del sistema en lazo abierto sigue siendo  $P = 2$ . El Lugar de Nyquist da una sola vuelta en sentido horario alrededor del punto crítico, por lo que  $N = 1$ . Al calcular el número de polos ubicados en el semiplano derecho del plano  $s$ , para el sistema realimentado unitariamente, se obtiene:

$$Z = N + P = 1 + 2 = 3,$$

significando que el mismo tiene tres raíces de parte real positiva, haciendo al sistema de lazo cerrado inestable.

El segundo caso se da cuando el corte de la curva con el eje real negativo está a la izquierda del punto crítico, esto es:

$$|G_{la}(j\omega)|_{\omega=0,708} > 1 \rightarrow 0,6657|k| > 1 \rightarrow |k| > 1,5021.$$

En esta situación, el Lugar de Transferencia da una sola vuelta en sentido antihorario al punto  $-1 + j0$  por lo que  $N = -1$ . Por consiguiente:

$$Z = N + P = -1 + 2 = 1,$$

lo que significa que el sistema en lazo cerrado es inestable por tener una raíz en el semiplano derecho del plano  $s$ .

En resumen, no hay ningún valor de ganancia  $k$ , ni positivo ni negativo, para el cual el sistema en lazo cerrado realimentado unitariamente sea estable.

## EJEMPLO 2: Construcción del diagrama de Nyquist para un sistema de segundo orden. Estabilidad relativa.

Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, descrito en el diagrama adjunto (véase la Fig. 4.2.1), a través del análisis armónico (diagrama polar). Calcular los márgenes de ganancia y de fase.

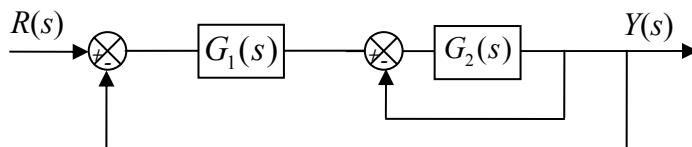


Figura 4.2.1 Diagrama del sistema realimentado del Ejemplo 2