# MF 2

## Flujo Compresible (2 de 2)

### 4. Flujo isoentrópico con cambios de área

Utilizando la hipótesis de flujo unidimensional:

$$\rho_{(x)} V_{(x)} A_{(x)} = \dot{m} = cte$$

Derivando esta expresión:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

y sabiendo que

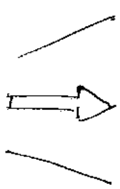
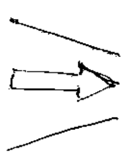
$$\frac{dP}{\rho} + VdV = 0 \quad \text{(Cantidad de Movimiento)}$$

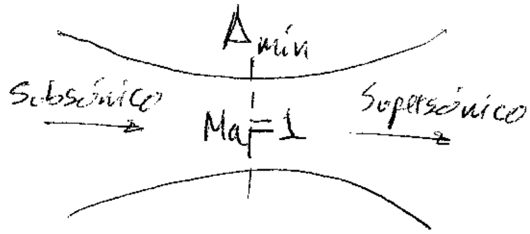
$$dP = a^2 d\rho \quad \text{(Velocidad del Sonido)}$$

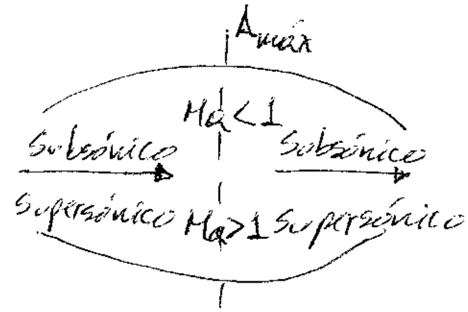
podemos eliminar $dP$ y $d\rho$ para obtener:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} \underbrace{\frac{1}{Ma^2 - 1}} = -\frac{dP}{\rho V^2}$$

(Las variaciones de las propiedades cambian de signo al pasar de flujo subsónico a supersónico debido al efecto del término $Ma^2 - 1$)

| | Subsónico, $Ma < 1$ | Supersónico, $Ma > 1$ |
|---|---|---|
|  $dA > 0$ | $dV < 0$<br>$dP > 0$<br>Difusor subsónico | $dV > 0$<br>$dP < 0$<br>Tobera supersónica |
|  $dA < 0$ | $dV > 0$<br>$dP < 0$<br>Tobera subsónica | $dV < 0$<br>$dP > 0$<br>Difusor supersónico |




Relaciones para un gas perfecto

$$\rho V A = \rho^* V^* A^* \quad \text{(Ec. de Continuidad)}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V}$$

En flujo isoentrópico $\frac{\rho^*}{\rho}$ y $\frac{V^*}{V}$ son funciones únicamente del Nro. de Mach

luego:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\left[\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)Ma^2}{\frac{1}{2}(k+1)}\right]^{(\frac{1}{2})(k+1)/(k-1)}$$

Para el aire ($k = 1{,}4$):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\frac{(1+0{,}2Ma^2)^3}{1{,}728}$$

Con esta ecuación y las fórmulas útiles para el aire podemos resolver cualquier problema isoentrópico y unidimensional de aire si conocemos la forma del conducto y las condiciones de estancamiento (remanso) y suponemos que no hay ondas de choque.

Nota: El área mínima que puede tener un conducto en un flujo isoentrópico es la garganta o área sónica (o crítica). Todas las demás secciones del conducto deben tener un área $A > A^*$.

## Bloqueo

Para unas condiciones de remanso dadas, el gasto másico máximo que puede atravesar un conducto se da cuando en la garganta hay condiciones críticas o sónicas. Decimos entonces que el conducto está bloqueado y no puede haber un gasto másico mayor, a no ser que se agrande la garganta. Si el área de la garganta disminuye, el gasto másico a través del conducto debe disminuir.

$$\dot{m}_{máx} = 0{,}6847 A^* \rho_0 (R T_0)^{1/2} = \frac{0{,}6847\, P_0 A^*}{(R T_0)^{1/2}} \qquad (\text{Aire})$$

$$\dot{m}_{máx} = k^{1/2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(1/2)(k+1)/(k-1)} A^* \rho_0 (R T_0)^{1/2}$$

<u>Función de gasto másico local</u> (Gasto másico real (no máximo) en cualquier sección)

$$\frac{\dot{m}\sqrt{R T_0}}{A\, P_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{2/k}\left[1-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{(k-1)/k}\right]} \qquad (\text{Adimensional})$$

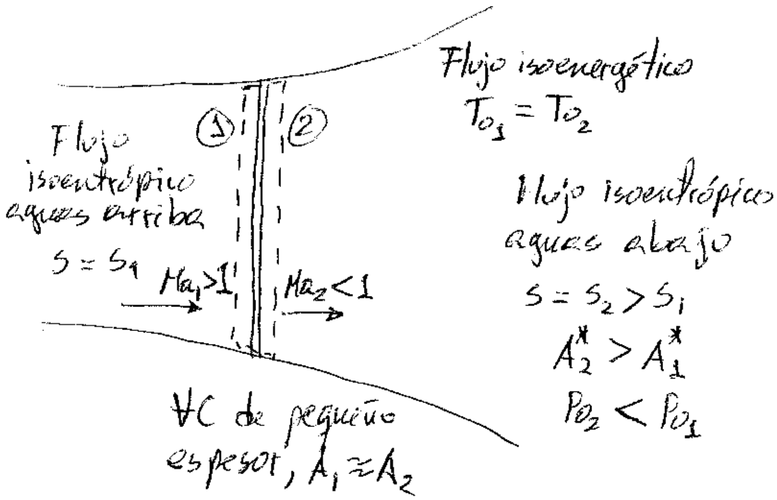
Cuando $A/A^*$ es dato, se pueden utilizar las siguientes expresiones aproximadas que permiten calcular Ma a partir del valor de $A/A^*$; (Error ± 2%) para $k = 1{,}4$

$$Ma \simeq \begin{cases} \dfrac{1 + 0{,}27 (A/A^*)^{-2}}{1{,}728\, A/A^*} & 1{,}34 < \dfrac{A}{A^*} < \infty \\ 1 - 0{,}88 \left(\ln \dfrac{A}{A^*}\right)^{0{,}45} & 1{,}0 < \dfrac{A}{A^*} < 1{,}34 \end{cases} \text{ Flujo subsónico}$$

$$\begin{cases} 1 + 1{,}2 \left(\dfrac{A}{A^*} - 1\right)^{1/2} & 1{,}0 < \dfrac{A}{A^*} < 2{,}9 \\ \left[216 \dfrac{A}{A^*} - 254 \left(\dfrac{A}{A^*}\right)^{2/3}\right]^{1/5} & 2{,}9 < \dfrac{A}{A^*} < \infty \end{cases} \text{ Flujo supersónico}$$

<u>Nota:</u> Para cada valor de $A/A^*$ hay dos posibles soluciones (subsónica y supersónica). La solución adecuada no puede escogerse sin más información adicional como por ejemplo la presión o la temperatura en alguna sección.

## · La onda de choque normal




$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta \, p_2/p_1}{\beta + p_2/p_1} \; ; \; \beta = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\right]$$

Relaciones en función del Número de Mach (Para un gas perfecto)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2k\,Ma_1^2 - (k-1)\right]$$

$$Ma_2^2 = \frac{(k-1)Ma_1^2 + 2}{2k\,Ma_1^2 - (k-1)}$$

Nota: Una onda de choque normal decelera bruscamente el flujo de condiciones supersónicas a condiciones subsónicas.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)Ma_1^2}{(k-1)Ma_1^2 + 2} = \frac{V_1}{V_2} \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left[2 + (k-1)Ma_1^2\right]\frac{2k\,Ma_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2 Ma_1^2}$$

$$T_{o_2} = T_{o_1} \; ; \; \frac{p_{o_2}}{p_{o_1}} = \frac{\rho_{o_2}}{\rho_{o_1}} = \left[\frac{(k+1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_1^2}\right]^{k/(k-1)}\left[\frac{k+1}{2k\,Ma_1^2 - (k-1)}\right]^{1/(k-1)}$$

El área $A^*$ de la garganta sónica o crítica aumenta al atravesar una onda de choque.

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1}\left[\frac{2 + (k-1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_2^2}\right]^{(1/2)(k+1)/(k-1)}$$

Principios que gobiernan el comportamiento de las ondas de choque:

- El flujo a través de la onda de choque es adiabático pero no isoentrópico. ($T_{o_1} = T_{o_2}$ ; $P_{o_2} < P_{o_1}$ ; $\rho_{o_2} < \rho_{o_1}$)
- El flujo es supersónico aguas arriba y subsónico aguas abajo.
- En gases perfectos las ondas de rarefacción son imposibles y únicamente puede haber ondas de compresión.
- La entropía aumenta a través de una onda de choque, con la consecuente caída de la presión y la densidad de remanso y el aumento del área crítica ($A^*$).
- Las ondas de choque débiles son prácticamente isoentrópicas.