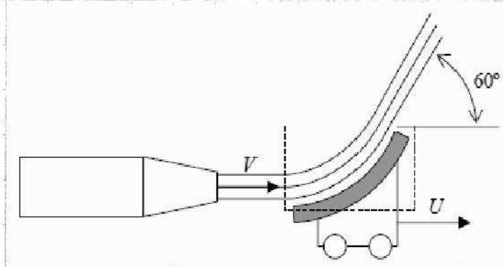
EJERCICIO # 9 (GUÍA DEL PROF DULHOSTE)

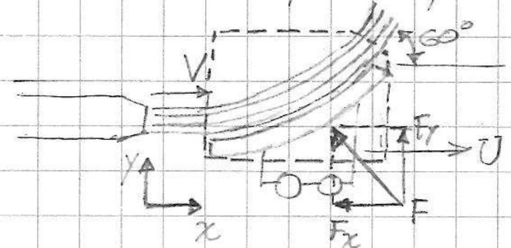
El diagrama muestra un álabe con ángulo de 60 . El álabe se mueve con velocidad constante U = 10 m/s y recibe un chorro de agua que sale de una boquilla estacionaria con velocidad V = 30 m/s.
La boquilla tiene un área de salida de 0,003 m . Determinar la fuerza que ejerce el agua sobre el álabe móvil.



SOLUCIÓN

Enunciado:

Álabe que se mueve con velocidad constante (horizontal) y recibe un chorro de agua desde una boquilla estacionaria. Se pide determinar la fuerza que ejerce el agua sobre el álabe móvil.



$V = 30\ \frac{m}{s}$
$U = 10\ \frac{m}{s}$

(Comentario: $\forall C$ se mueve con el carrito. La superficie de control en la sección de salida se escoge perpendicular a la velocidad.)

Ec. Básicas:

$$\left.\frac{dB}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} b\rho\, d\forall + \int_{SC} b\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Continuidad: $B = M;\ b = 1$
Cant. de Mov.: $B = MV;\ b = V$

(Comentario: Al estar involucradas fuerzas en el fenómeno, sabemos que se trata de un problema de cantidad de movimiento.)

Suposiciones/hipótesis/simplificaciones:

- Flujo estacionario.
- Propiedades uniformes en las secciones de entrada y de salida.
- Flujo incompresible.
- Fuerzas volumétricas despreciables (no podemos conocer la masa de agua en el $\forall C$), fuerza de rozamiento despreciable.
- Condiciones del fluido: T = 20°C, 1 atm.
- $A_e = A_s = A_{boq}$

Propiedades:

$\rho_{Agua} = 998\ \frac{kg}{m^3}$ (Tabla A.1 - White 6a Ed.)

Análisis:

La ecuación de la Conservación de la Cantidad de Movimiento queda:

$$\sum \vec{F} = \underset{\text{(Fuerzas Superficiales)}}{\overset{Ⓐ}{\vec{F}_S}} + \underset{\text{(Fuerzas Volumétricas)}}{\overset{Ⓑ}{\vec{F}_B}} = \underbrace{\overset{Ⓒ}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}\rho\, d\forall}}_{\text{Cambio de la cantidad de Mov. en el } \forall C} + \underbrace{\overset{Ⓓ}{\int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}}_{\text{Flujo neto de cantidad de movimiento a través de la Superficie de Control}}$$

Ⓐ: $\vec{F}_S = -F_x\hat{\imath} - \underbrace{F_f}_{\to 0 \text{ (roce despreciable)}}\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$

Ⓑ: $\vec{F}_B = -\underbrace{W}_{\to 0 \text{ (Despreciado por lo indicado en las suposiciones)}}\hat{\jmath}$

Ⓒ: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}\rho\, d\forall = 0$ (Flujo estacionario)

Ⓓ: $\int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \sum \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\vec{V}_e\left|\rho V_e A_e\right| + \vec{V}_s\left|\rho V_s A_s\right|$

$V_e = |\vec{V}_e| = V - U$ (Las velocidades se miden con respecto al $\forall C$)

Por continuidad: $|\vec{V}_e| = |\vec{V}_s| = V - U$

$\vec{V}_e = (V-U)\hat{\imath}$; $\vec{V}_s = (V-U)\cos 60°\,\hat{\imath} + (V-U)\sin 60°\,\hat{\jmath}$

Acoplando todos los términos nos queda:

$$-F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} = -(V-U)\left|\rho(V-U)A_e\right|\hat{\imath} + \left[(V-U)\cos 60°\,\hat{\imath} + (V-U)\sin 60°\,\hat{\jmath}\right]\left|\rho(V-U)A_s\right|$$

En la dirección horizontal:

$$-F_x = -(V-U)\left|\rho(V-U)A_e\right| + (V-U)\cos 60°\left|\rho(V-U)A_s\right|$$

$$F_x = (V-U)\left|\rho(V-U)A_{boq}\right|(1-\cos 60°) \quad ; \quad (A_e = A_s = A_{boq})$$

$$F_x = (V-U)^2\rho A_{boq}(1-\cos 60°) = (30-10)^2(998)(0{,}003)(1-\cos 60°)$$

$$F_x = 598{,}8\ N$$

En la dirección vertical:

$$F_y = (V-U)\sin 60°\left|\rho(V-U)A_s\right| = (V-U)^2\rho A_{boq}\sin 60°$$

$$F_y = (30-10)^2(998)(0{,}003)(\sin 60°) = 1037{,}2\ N$$

La fuerza que el agua ejerce sobre el álabe es: $\vec{F} = (598{,}8\,\hat{\imath} - 1037{,}2\,\hat{\jmath})\,N$ //

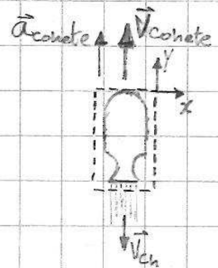
EJERCICIO # 11 (GUÍA DEL PROF. DULHOSTE)

Un pequeño cohete cuya masa inicial es 400Kg se lanza verticalmente hacia arriba. Debido a la combustión el cohete consume combustible con una rapidez de 5 Kg/s y lanza un chorro de gas a la presión atmosférica con una velocidad de 1500 m/s relativa al cohete. Determine la aceleración inicial del cohete y su velocidad después de 10 segundos de iniciarse el lanzamiento. Desprecie la resistencia al avance debida al aire.

Solución

Enunciado:

Cohete con masa inicial M_0 se lanza verticalmente hacia arriba, consumiendo combustible y lanzando un chorro de gas con una velocidad V_{CH} relativa al cohete. Se pide determinar la aceleración inicial del cohete y su velocidad 10 s después del lanzamiento. La resistencia del aire se desprecia.



$M_0 = 400\ kg$

$\dot{m}_{ch} = 5\ kg/s$

$V_{ch} = 1500\ m/s$

$a_0 = ?$

$V_{cohete\ (t=10s)} = ?$

(Comentario: $\forall C$ se mueve con aceleración lineal. Si fijamos nuestro sistema de referencia al $\forall C$, la aceleración del cohete es la aceleración del marco de referencia ($\vec{a}_{cohete} = \vec{a}_{rf}$) y las velocidades a considerar deben referirse al marco de referencia.)

Ec. Básicas:

$$\left.\frac{d(m\vec{V})}{dt}\right)_{sist} = \underset{(A)}{\sum \vec{F}} - \underset{(B)}{\int_{\forall C} \vec{a}_{rf}\, \rho\, d\forall} = \underset{(C)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V} \rho\, d\forall} + \underset{(D)}{\int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A}}$$

Suposiciones/hipótesis/simplificaciones:

- Flujo transitorio
- Propiedades uniformes en la sección de salida
- La presión atmosférica actúa sobre todas las caras de la SC (se anula).
- Fuerzas volumétricas debidas a la gravedad (masa del cohete).
- No hay fuerzas superficiales (resistencia del aire despreciable).

Propiedades:

No tenemos datos de los gases de combustión que salen del cohete, pero al tener como dato el flujo másico probablemente no haga falta conocer la densidad ρ.

Análisis:

$$(A): \sum \vec{F} = \underbrace{\vec{F_S}}_{0} + \vec{F_B} = \int_{\forall C} \vec{g}\, \rho\, d\forall = -\int_{M_{\forall C}} g\, dM_{\forall C}\, (\hat{j}) = -g M_{\forall C} (\hat{j})$$

Pero $M_{\forall c}$ es una función del tiempo (el combustible del cohete se está vaciando). Para conseguir $M_{\forall c}$ como función del tiempo, utilizamos la ecuación de continuidad:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sist} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall = -\int_{SC} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_{\forall c}} dM_{\forall c} = -\left|\rho V_{ch} A_{ch}\right| \Rightarrow \frac{dM_{\forall c}}{dt} = -\dot{m}_{ch}$$

Separando variables e integrando, tenemos:

$$dM_{\forall c} = -\dot{m}_{ch}\, dt \Rightarrow \int_{M_0}^{M_{\forall c}} dM_{\forall c} = -\dot{m}_{ch}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow M_{\forall c} - M_0 = -\dot{m}_{ch}\, t \Rightarrow \underline{M_{\forall c} = M_0 - \dot{m}_{ch}\, t}$$

Finalmente Ⓐ queda:

$$\sum \vec{F} = -g\left(M_0 - \dot{m}_{ch}\, t\right)(\hat{j}) = \left(-gM_0 + g\dot{m}_{ch}\, t\right)(\hat{j})$$

$$Ⓑ: -\int_{\forall C} \vec{a}_{rf}\, \rho \, d\forall = -\vec{a}_{rf}\int_{M_{\forall c}} dM_{\forall c} = -a_{rf} M_{\forall c}\,(\hat{j})$$

$$= -a_{rf}\left(M_0 - \dot{m}_{ch}\, t\right)(\hat{j}) = \left(-a_{rf} M_0 + a_{rf}\dot{m}_{ch}\, t\right)(\hat{j})$$

$$Ⓒ: \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}\rho \, d\forall \approx 0$$

(Comentario: la velocidad involucrada en este término es la velocidad del combustible dentro del $\forall C$, la cual se puede suponer muy pequeña y por lo tanto el cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento del $\forall C$ también es muy pequeño.)

$$Ⓓ: \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = \vec{V}_{ch}\left|\rho V_{ch} A_{ch}\right| = -V_{ch}\, \dot{m}_{ch}\,(\hat{j})$$

Acoplando todos los términos, nos queda:

$$-g\left(M_0 - \dot{m}_{ch}\, t\right)\hat{j} - a_{rf}\left(M_0 - \dot{m}_{ch}\, t\right)\hat{j} = -V_{ch}\, \dot{m}_{ch}\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow a_{rf} = \frac{V_{ch}\dot{m}_{ch} - g\left(M_0 - \dot{m}_{ch}\, t\right)}{\left(M_0 - \dot{m}_{ch}\, t\right)} = \frac{V_{ch}\dot{m}_{ch}}{M_0 - \dot{m}_{ch}\, t} - g$$

Evaluando en $t=0$:

$$a_{rf}\big|_{(t=0)} = \frac{V_{ch}\dot{m}_{ch}}{M_0 - \dot{m}_{ch}(0)} - g = \frac{\left(1500\,\frac{m}{s}\right)\left(5\,\frac{kg}{s}\right)}{400\,kg} - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = \underline{8{,}94\,m/s^2}$$ Rpta (a)

Para obtener la velocidad del cohete a los 10s del lanzamiento, partimos de la ecuación de la aceleración, sabiendo que:

$$\vec{a}_{rf} = \frac{d\vec{V}_{\neq c}}{dt}$$

(Comentario: Al ser solidario el marco de referencia al $\neq C$ y por lo tanto al cohete, $\vec{V}_{\neq C} = \vec{V}_{cohete}$)

$$\frac{dV_{cohete}}{dt} = \frac{V_{ch}\,\dot{m}_{ch}}{M_o - \dot{m}_{ch}t} - g$$

Separando variables e integrando:

$$\int_{V_o}^{V} dV_{cohete} = \int_0^t \left(\frac{V_{ch}\,\dot{m}_{ch}}{M_o - \dot{m}_{ch}t} - g\right) dt$$

$$V - V_o = V_{ch}\int_0^t \left(\frac{\dot{m}_{ch}}{M_o - \dot{m}_{ch}t}\right) dt - g\int_0^t dt$$

$$V - \underbrace{V_o}_{\to 0} = -V_{ch}\, Ln\left[\frac{M_o - \dot{m}_{ch}t}{M_o}\right] - gt$$

Evaluando esta expresión en $t = 10s$:

$$V_{t=10s} = -1500\,\frac{m}{s} \times Ln\left[\frac{400\,kg - 5\,\frac{kg}{s}(10\,s)}{400\,kg}\right] - \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)(10\,s)$$

$$\underline{V_{t=10s} = 102{,}2\ \frac{m}{s}} \quad \text{Rpta. (b)}$$