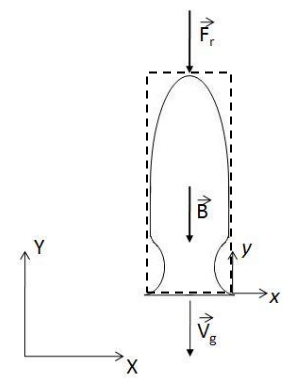
SEGUNDO PARCIAL

MECÁNICA DE FLUIDOS SEMESTRE B2010

SOLUCIÓN

1. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba. Debido a la combustión, el cohete consume combustible con una rapidez de 4 kg/s y lanza un chorro de gas a la presión atmosférica con velocidad constante relativa al cohete de 1200 m/s, lo cual le proporciona una aceleración constante de 10 m/s^2. Determine la masa del cohete en el instante inicial del lanzamiento.



Datos conocidos:

$\dot{m} = 4$ kg/s

$V_g = 1200$ m/s

$a_0 = 10$ m/s^2

Ecuaciones básicas:

$$\sum \vec{F} - \int_{VC} \overrightarrow{a_{rf}} \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\overrightarrow{dA}$$

Incógnitas:
Se pide determinar la masa inicial del cohete, es decir, la masa que éste tiene al momento del lanzamiento.
Análisis:
En el diagrama de cuerpo libre del cohete podemos identificar que las fuerzas superficiales son la fuerza de fricción debida al aire y las debidas a la presión atmosférica. Como no se tiene ninguna información acerca de la fuerza de fricción, no se considera en el análisis. En cuanto a las fuerzas debidas a la presión atmosférica, por estar actuando sobre toda la superficie del volumen de control, éstas se anulan mutuamente.
En cuanto a las fuerzas volumétricas, la única fuerza que actúa sobre el cohete es la debida al peso del mismo.
Entonces:

$$\sum \vec{F} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_B} = \int_{VC} B_y \rho d\forall = -g\int \rho d\forall = -gM_{VC}$$

Resolviendo el segundo término de la izquierda de la ecuación básica, tenemos:

$$-\int_{VC} \overrightarrow{a_{rf}}\rho d\forall = -a_{rf_Y}\int \rho d\forall = -a_Y M_{VC}$$

En cuanto al primer término del lado derecho de la ecuación, dado que el combustible no quemado y el cohete en si mismo tienen cantidad de movimiento cero con respecto al volumen de control, y que la velocidad del gas a la salida de la tobera permanece constante con el tiempo, es razonable suponer que la cantidad de movimiento del volumen de control no varía con el tiempo, luego:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\,\rho d\forall = 0$$

Y para el término final, sabiendo que para la única salida la velocidad de los gases es constante, tenemos:

$$\int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\overrightarrow{dA} = -V_{g_{xyz}}\left|\rho V_{g_{xyz}}\,A\right| = -V_{g_{xyz}}\,\dot{m}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$-gM_{VC} - a_Y M_{VC} = -V_{g_{xyz}}\,\dot{m}$$

Como M_{VC} es función del tiempo, necesitamos encontrar una expresión que represente el cambio de la masa en el volumen de control. Aplicando la Ley de Conservación de la Masa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot\,\overrightarrow{dA} = \frac{dM_{VC}}{dt} + |\rho V A| = 0$$

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = -\dot{m}$$

Separando variables e integrando a ambos lados de la ecuación:

$$\int_{M_0}^{M_{VC}} dM_{VC} = -\int_0^t \dot{m}\,dt$$

$$M_{VC} - M_0 = -\dot{m}t$$

$$M_{VC} = M_0 - \dot{m}t$$

Sustituyendo la expresión para M_{VC}:

$$-g(M_0 - \dot{m}t) - a_Y(M_0 - \dot{m}t) = -V_{g_{xyz}}\,\dot{m}$$

Dado que buscamos la masa en el instante inicial (M_0), tenemos que para t=0:

$$-gM_0 - a_Y M_0 = -V_{g_{xyz}}\,\dot{m}$$

$$M_0 = \frac{-V_{g_{xyz}}\,\dot{m}}{-(g + a_Y)} = \frac{1200\times 4}{(9{,}81 + 10)}\left(\frac{\frac{m}{s}\frac{kg}{s}}{\frac{m}{s^2}}\right)$$

$$M_0 = 242{,}3\ kg$$

Respuesta: 242,3 kg

2. Se desea generar potencia eléctrica mediante el dispositivo giratorio mostrado en la figura. El agua entra por la parte inferior del dispositivo a razón de 20 L/s y sale por las boquillas de 1 cm de diámetro en dirección tangencial. La distancia normal entre el eje de rotación y el centro de cada boquilla es de 0,6 m. Estime la potencia eléctrica que podría generarse cuando el dispositivo gira a 300 rpm si se desprecian todas las pérdidas.

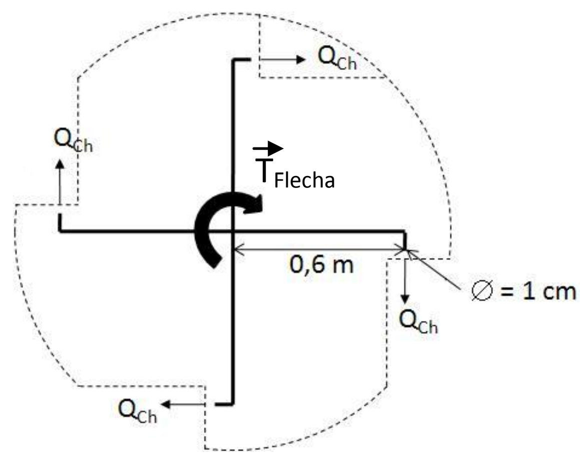
<u>Datos conocidos</u>:

Q_T = 20 L/s

D = 1 cm

R = 0,6 m

n = 300 rpm



<u>Ecuaciones básicas</u>:

Como las condiciones se mantienen constantes (flujo estacionario), si se elige un volumen de control como el mostrado en la figura, el cual gira con el dispositivo, podemos utilizar la siguiente ecuación:

$$\vec{r} \times \overrightarrow{F_S} + \int_{masa} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \overrightarrow{T_{Flecha}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \overrightarrow{V_{xyz}} \rho d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \overrightarrow{V_{xyz}}\, \rho \overrightarrow{V_{xyz}} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Se debe tener presente que las velocidades a utilizar para el fluido serán las relativas al volumen de control.

<u>Incógnitas</u>:

Se pide determinar la potencia ideal (sin pérdidas) que el dispositivo podría generar.

<u>Análisis</u>:

En un dispositivo giratorio, la potencia viene dada por:

$$\dot{W} = \omega T$$

Entonces, nuestro problema consiste en hallar el par de torsión que el dispositivo le comunica al generador.

Como no tenemos ninguna fuerza superficial actuando sobre el volumen de control,

$$\vec{r} \times \overrightarrow{F_S} = 0$$

El par debido a las fuerzas volumétricas, debido a la simetría del dispositivo, se anula (además de que las componentes individuales debidas a cada brazo actúan en una dirección diferente a la del eje que está conectado al generador), por lo tanto:

$$\int_{masa} \vec{r} \times \vec{g}\, dm = 0$$

Como la velocidad de salida de los chorros es constante, no hay cambio en la cantidad de movimiento dentro del volumen de control, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{r} \times \overrightarrow{V_{xyz}} \rho d\forall = 0$$

Con respecto al último término de nuestra ecuación básica, el flujo de entrada no produce cantidad de movimiento angular (el flujo atraviesa el volumen de control por su eje de rotación y además el brazo de palanca en esta posición es cero). Por su parte, los flujos de salida actúan en un mismo plano y producen cantidad de movimiento angular en la misma dirección; además, al ser la velocidad y el radio constantes, podemos calcular la integral como una sumatoria, entonces:

$$\int_{SC} \vec{r} \times \overrightarrow{V_{xyz}}\, \rho \overrightarrow{V_{xyz}} \cdot \overrightarrow{dA} = \sum_{sale} rV_{xyz} \left|\rho V_{xyz} A\right| - \sum_{ent} rV_{xyz} \left|\rho V_{xyz} A\right| = \sum_{sale} rV_{xyz}\, \dot{m} = 4\left(RV_{xyz}\, \dot{m}\right)$$

Donde la línea de acción de esté término es en la dirección negativa del eje z, es decir, tiene vector unitario ***–k***.

El par de torsión que el dispositivo le comunica al generador, será entonces:

$$\overrightarrow{T_{Flec\,ha}} = 4\left(RV_{xyz}\, \dot{m}\right) (-\hat{k})$$

Para obtener los valores de la velocidad relativa y del flujo másico en cada boquilla necesitamos utilizar la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Como es un caso de flujo estacionario con entradas y salidas definidas, entonces resulta:

$$0 = \sum_{sale} |\rho VA| - \sum_{ent} |\rho VA| = 4\dot{m} - \dot{m}_t$$

$$\dot{m} = \frac{\dot{m}_t}{4} = \frac{\rho Q_t}{4} = \frac{1000 \times 20}{4} \times \frac{1}{1000} = 5\,\frac{kg}{s}$$

La velocidad del chorro (absoluta) será:

$$\dot{m} = \rho VA \rightarrow V = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{\dot{m}}{\rho\left(\frac{\pi}{4} D^2\right)} = \frac{5}{1000\left(\frac{\pi}{4} (0{,}01)^2\right)} = 63{,}66\,\frac{m}{s}$$

La velocidad del chorro, relativa al volumen de control, será igual a la diferencia entre la velocidad absoluta del chorro y la velocidad de la boquilla:

$$V_{xyz} = V - \omega R = 63{,}66 - \frac{2\pi}{60}(300)(0{,}6) = 44{,}81\,\frac{m}{s}$$

Sustituyendo entonces en la ecuación obtenida para el par de torsión:

$$T_{Flecha} = 4 \times 0{,}6 \times 44{,}81 \times 5 = 537{,}7\ N - m$$

Finalmente:

$$\dot{W} = \omega T = \frac{2\pi}{60}(300)(537{,}7) = 16892{,}34\,\frac{N - m}{s}$$

Respuesta: $\underline{\dot{W} = 16{,}89\ \text{kW}}$