TEMA 5: ANALISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA

Ejercicio 1

Paso 1:

$$F = f(V, D, \rho, \mu) \Rightarrow n = 5$$

Paso 2:

Utilizando el sistema MLtT, expresamos las variables en términos de sus dimensiones primarias:

F	V	D	ρ	μ
$\frac{ML}{t^2}$	$\frac{L}{t}$	L	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{M}{Lt}$

Dimensiones Primarias $\Rightarrow MLt \Rightarrow j' = 3$

Paso 3:

Seleccionamos tres (3) parámetros repetitivos y comprobamos que no forman un grupo adimensional por sí solos. $(V, D, \mu) \Rightarrow j' = j = 3$

Paso 4: $k = n - j = 5 - 3 = 2 \Rightarrow 2\ \Pi's$

Paso 5:

Ecuaciones dimensionales:

$$\Pi_1 = F V^a D^b \mu^c = \frac{ML}{t^2}\left(\frac{L}{t}\right)^a (L)^b \left(\frac{M}{Lt}\right)^c$$

$$\left.\begin{array}{l} M \Rightarrow 1 + c = 0 \\ L \Rightarrow 1 + a + b - c = 0 \\ t \Rightarrow -2 - a - c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} c = -1 & c = -1 \\ a = -2-(-1) \Rightarrow & a = -1 \\ b = -1-(-1)+(-1) \Rightarrow & b = -1 \end{array}$$

$$\Pi_1 = F V^{-1} D^{-1} \mu^{-1} = \frac{F}{VD\mu} = \frac{\frac{M\cancel{L}}{t^2}}{\frac{\cancel{L}}{\cancel{t}}\cancel{L}\frac{M}{\cancel{L}t}}$$

$$\Pi_2 = \rho V^d D^e \mu^f = \frac{M}{Lt}\left(\frac{L}{t}\right)^d (L)^e \left(\frac{M}{Lt}\right)^f$$

$$\left.\begin{array}{l} M \Rightarrow 1+f=0 \\ L \Rightarrow -3+d+e-f=0 \\ t \Rightarrow -d-f=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f=-1 \\ d=1 \\ e=3-(1)+(-1) \Rightarrow e=1 \end{array}$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\frac{\cancel{M}}{\cancel{L^3}}\frac{\cancel{L}}{\cancel{t}}\cancel{L}}{\frac{\cancel{M}}{\cancel{Lt}}}$$

Paso 6:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F}{VD\mu} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)}$$

Ejercicio #3

(P1) $\Delta h = f(D, \gamma, \sigma) \Rightarrow n = 4$

A — Δh $\quad D \quad \gamma \quad \sigma$

(P2) MLtT

$L \quad L \quad \frac{M}{L^2t^2} \quad \frac{M}{t^2} \Longrightarrow j' = 3$

B —

$\neq$

(P2) FLtT

$L \quad L \quad \frac{F}{L^3} \quad \frac{F}{L} \Longrightarrow j' = 2$

Como el número de dimensiones primarias es diferente según el sistema de dimensiones seleccionado, se construye la matriz de dimensiones

Caso A

	Δh	D	γ	σ
M	0	0	1	1
L	1	1	-2	0
t	0	0	-2	-2
T	0	0	0	0

$=2$

"El rango de una matriz es igual al orden de su determinante no nulo de mayor orden"

$\Rightarrow$ El rango de esta matriz es 2

Caso B

	Δh	D	γ	σ
F	0	0	1	1
L	1	1	-3	-1
t	0	0	0	0
T	0	0	0	0

$\Rightarrow$ Rango es 2

(P3) $\Rightarrow j = 2$

P3 (continuación) $j = 2 \Rightarrow$ Escogemos como variables repetitivas: D y γ

P4 $k = n - j = 4 - 2 = 2$ parámetros adimensionales Π

P5 Ecuaciones dimensionales:

$$\Pi_1 = \Delta h \, D^a \gamma^b = L \, L^a \left(\frac{M}{L^2 t^2}\right)^b$$

$$\left.\begin{aligned} M &\Rightarrow b = 0 \\ L &\Rightarrow 1 + a - 2b = 0 \\ t &\Rightarrow -2b = 0 \end{aligned}\right\} \quad a = -1$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D} \longrightarrow \text{Verificamos: } \frac{L}{L} = 1 \; \checkmark$$

$$\Pi_2 = \sigma \, D^c \gamma^d = \frac{M}{t^2} L^c \left(\frac{M}{L^2 t^2}\right)^d$$

$$\left.\begin{aligned} M &\Rightarrow 1 + d = 0 \\ L &\Rightarrow c - 2d = 0 \\ t &\Rightarrow -2 - 2d = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow d = -1 \\ &\Rightarrow c = -2 \\ &\Rightarrow d = -1 \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{D^2 \gamma} \longrightarrow \text{Verificamos: } \frac{\frac{M}{t^2}}{L^2 \frac{M}{L^2 t^2}} = 1 \; \checkmark$$

P6 $$\Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \frac{\Delta h}{D} = f\left(\frac{\sigma}{D^2 \gamma}\right)$$

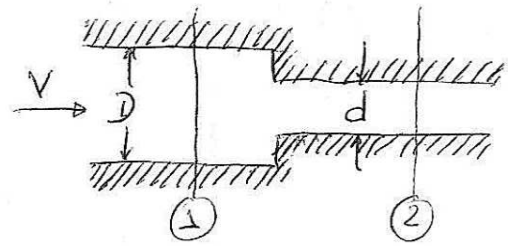
III PARCIAL

Problema #1

Las pruebas experimentales han demostrado que la caída de presión en una contracción súbita en un conducto circular se puede expresar como

$$\Delta p = P_1 - P_2 = f(\rho, \mu, V, d, D)$$

donde las variables geométricas están definidos en la figura. Se requiere ordenar algunos datos experimentales obtenidos en el laboratorio. Obtenga los parámetros adimensionales que resultan utilizando ρ, V y D como variables repetitivas.



Solución

Paso 1

$$\Delta P = f(\rho, \mu, V, d, D) \Rightarrow n = 6$$

Paso 2

Utilizamos el sistema MLtT

ΔP	ρ	μ	V	d	D
$\frac{M}{Lt^2}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{M}{Lt}$	$\frac{L}{t}$	L	L

$$\Rightarrow j' = 3$$

Paso 2'

Utilizando el sistema FLtT

ΔP	ρ	μ	V	d	D
$\frac{F}{L^2}$	$\frac{Ft^2}{L^4}$	$\frac{Ft}{L^2}$	$\frac{L}{t}$	L	L

$$\Rightarrow j' = 3$$

Paso 3

Como $j = j' = 3$, se seleccionan 3 parámetros repetitivos

Seleccionamos $\underbrace{\rho, V\ y\ D}_{A}$ $\left(ó\ \underbrace{\mu V D}_{B}\ ó\ \underbrace{\rho V d}_{A'}\ ó\ \underbrace{\mu V d}_{B'} \right)$

Paso 4 (A)

El número de parámetros adimensionales vendrá dado por

$k = n - j = 6 - 3 = 3$

Paso 5

Planteamos las ecuaciones dimensionales

$$\Pi_1 = \Delta P \rho^a V^b D^c = \frac{M}{Lt^2}\left(\frac{M}{L^3}\right)^a\left(\frac{L}{t}\right)^b\left(L\right)^c$$

$$\left.\begin{aligned} M &\Rightarrow 1 + a = 0 \\ L &\Rightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \\ t &\Rightarrow -2 - b = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -2 \\ c &= 1 + 3(-1) - (-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = \Delta P \rho^{-1} V^{-2} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} \quad \Rightarrow \text{Verificamos: } \frac{\frac{M}{Lt^2}}{\frac{M}{L^3}\frac{L^2}{t^2}} \ ; \ \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{Ft^2}{L}\frac{L^2}{t^2}} \quad \text{OK!}$$

$$\Pi_2 = \mu \rho^d V^e D^f = \frac{M}{Lt}\left(\frac{M}{L^3}\right)^d\left(\frac{L}{t}\right)^e\left(L\right)^f$$

$$\left.\begin{aligned} M &\Rightarrow 1 + d = 0 \\ L &\Rightarrow -1 - 3d + e + f = 0 \\ t &\Rightarrow -1 - e = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d &= -1 \\ e &= -1 \\ f &= 1 + 3(-1) - (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = \mu \rho^{-1} V^{-1} D^{-1} = \frac{\mu}{\rho V D} \quad \Rightarrow \text{Verificamos: } \frac{\frac{M}{Lt}}{\frac{M}{L^3}\frac{L}{t}L} = \frac{L^3 t}{L^3 t} \Rightarrow \text{OK!}$$

$$\Pi_3 = d \rho^g V^h D^i = L\left(\frac{M}{L^3}\right)^g\left(\frac{L}{t}\right)^h\left(L\right)^i$$

$$\left.\begin{aligned} M &\Rightarrow g = 0 \\ L &\Rightarrow 1 - 3g + h + i = 0 \\ t &\Rightarrow -h = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= -1 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{\frac{M}{Lt^2}}{\frac{M}{L^3}\frac{L^2}{t^2}} \quad \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{Ft^2}{L^4}\frac{L^2}{t^2}}$$

$$\Pi_3 = d D^{-1} = \frac{d}{D} \quad \Rightarrow \text{Verificamos: } \frac{L}{L} \Rightarrow \text{OK!}$$

$$\frac{M\frac{L}{L^2}}{\frac{M}{L^3}\frac{L^2}{t^2}L^2}$$

Paso 5 (B)

(con $\mu V D$ como parámetros repetitivos)

$$\Pi_1 = \Delta P \mu^a V^b D^c = \frac{M}{Lt^2}\left(\frac{M}{Lt}\right)^a\left(\frac{L}{t}\right)^b\left(L\right)^c$$

$$\left.\begin{array}{l} M \Rightarrow 1+a=0 \\ L \Rightarrow -1-a+b+c=0 \\ t \Rightarrow -2-a-b=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-1 \\ c=1+(-1)-(-1)=1 \end{array}$$

$$\Pi_1 = \Delta P \mu^{-1} V^{-1} D = \frac{\Delta P D}{\mu V}$$

$$\Pi_2 = \rho \mu^d V^e D^f = \frac{M}{L^3}\left(\frac{M}{Lt}\right)^d\left(\frac{L}{t}\right)^e\left(L\right)^f$$

$$\left.\begin{array}{l} M \Rightarrow 1+d=0 \\ L \Rightarrow -3-d+e+f=0 \\ t \Rightarrow -d-e=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=-1 \\ e=1 \\ f=1 \end{array}$$

$$\Pi_2 = \rho \mu^{-1} V D = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$$\Pi_3 = d \mu^g V^h D^i = L\left(\frac{M}{Lt}\right)^g\left(\frac{L}{t}\right)^h\left(L\right)^i$$

$$\left.\begin{array}{l} M \Rightarrow g=0 \\ L \Rightarrow 1-g+h+i=0 \\ t \Rightarrow -g-h=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g=0 \\ h=0 \\ i=-1 \end{array}$$

$$\Pi_3 = d D^{-1} = \frac{d}{D}$$

Paso 6 (A)

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left(\underbrace{\frac{\mu}{\rho V D}}_{\frac{1}{Re}}, \frac{d}{D}\right) \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho V^2} = g\left(\underbrace{\frac{\rho V D}{\mu}}_{Re}, \frac{d}{D}\right)$$

Paso 6 (B)

$$\frac{\Delta P D}{\mu V} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{d}{D}\right)$$