MECÁNICA DE FLUIDOS I
GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 4
SOLUCIÓN

Ejercicio 1

Un campo de velocidades viene dado por

$$\vec{V} = 4tx\hat{\imath} - 2t^2y\hat{\jmath} + 4xz\hat{k}$$

¿Es el flujo estacionario o no estacionario?¿Es bidimensional o tridimensional? Calcule, en el punto (x,y,z)=(-1,1,0), (a) el vector aceleración y (b) un vector unitario normal a la aceleración.

Solución:

- El flujo es *no estacionario* porque la variable tiempo (t) aparece explícitamente en las componentes del velocidad (es decir, la velocidad depende del tiempo).

- El flujo es tridimensional porque el vector velocidad tiene componentes no nulas en todas las direcciones del espacio.

(a) El vector aceleración tiene la siguiente forma (recordar el concepto de derivada material):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right)$$

Resolviendo para cada componente:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 4x + 4tx(4t) - 2t^2(0) + 4xz(0) = 4x + 16t^2x$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -4ty + 4tx(0) - 2t^2y(-2t^2) + 4xz(0) = -4ty + 4t^4y$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = 0 + 4tx(4z) - 2t^2y(0) + 4xz(4x) = 16txz + 14x^2z$$

Agrupando términos por componente tenemos:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (4x + 16t^2x)\hat{\imath} + (-4ty + 4t^4y)\hat{\jmath} + (16txz + 14x^2z)\hat{k}$$

Finalmente, evaluando para (x,y,z)=(-1,1,0):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -4(1 + 4t^2)\hat{\imath} - 4t(1 - t^3)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

(b) En el punto donde se calculó la aceleración (-1,1,0) existen muchos vectores unitarios normales a dicha aceleración. El más obvio es $\hat{k}$.

Ejercicio 2

Un flujo incompresible idealizado tiene la siguiente distribución tridimensional de velocidades:

$$\vec{V} = 4xy^2\hat{\imath} + f(y)\hat{\jmath} - zy^2\hat{k}$$

Determine la forma que debe tener la función f(y) para que se cumpla la ecuación de continuidad.

Solución:

En un flujo incompresible, la ecuación de continuidad viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Sustituyendo las componentes de la velocidad, queda

$$\frac{\partial}{\partial x}(4xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}f(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-zy^2) = 4y^2 + \frac{df(y)}{dy} - y^2 = 0$$

Entonces:

$$\frac{df(y)}{dy} = -3y^2$$

Separando variables e integrando:

$$f(y) = \int(-3y^2)dy$$

$$f(y) = -y^3 + constante$$

Ejercicio 3

Si z es vertical, positiva hacia arriba, ¿qué condiciones deben cumplir las constantes a y b para que el campo de velocidades u = ay, v = bx, w = 0 sea una solución exacta de las ecuaciones del movimiento (continuidad y Navier-Stokes) de un fluido incompresible?

Solución:

Primero se examina la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}= \frac{\partial}{\partial x}(ay)+\frac{\partial}{\partial y}(bx)+\frac{\partial}{\partial z}(0)=0+0+0=0$$

(Se cumple para cualquier *a* y *b*).

A continuación se examinan las ecuaciones de cantidad de movimiento, si se puede encontrar una distribución de presiones única, la solución es exacta.

Como z es vertical y positiva hacia arriba entonces $g_x = g_y = 0$.

Para la componente x tenemos:

$$\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho(0)-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ay)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(ay)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(ay)\right)$$
$$=\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}(ay)+(ay)\frac{\partial}{\partial x}(ay)+(bx)\frac{\partial}{\partial y}(ay)+(0)\frac{\partial}{\partial z}(ay)\right)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu(0+0+0)=\rho(0+(ay)(0)+(bx)(a)+0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\rho abx$$

De manera similar, para la componente y:

$$\rho g_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho(0)-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bx)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(bx)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(bx)\right)$$
$$=\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}(bx)+(ay)\frac{\partial}{\partial x}(bx)+(bx)\frac{\partial}{\partial y}(bx)+(0)\frac{\partial}{\partial z}(bx)\right)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu(0+0+0)=\rho(0+(aby)+(bx)(0)+0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\rho aby$$

Y para la componente z:

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\rho(-g) - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(0) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(0)\right)$$
$$= \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}(0) + (ay)\frac{\partial}{\partial x}(0) + (bx)\frac{\partial}{\partial y}(0) + (0)\frac{\partial}{\partial z}(0)\right)$$

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu(0+0+0) = \rho(0+0+0+0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

(En la dirección z el gradiente de presiones es hidrostático).

Para conseguir la distribución de presiones integramos parcialmente cada uno de los gradientes (para cada dirección, manteniendo las variables de las otras direcciones como constantes), comparando en cada paso con los restantes. Comenzamos con $\partial P/\partial x$:

$$P = \int \frac{\partial P}{\partial x}dx = \int(-\rho abx)dx = -\frac{1}{2}\rho abx^2 + f_1(y,z)$$

La constante de integración que aparece es una función de las variables no integradas (*y* y *z*). Derivando parcialmente este resultado con respecto a *y* y comparando con el $\partial P/\partial y$ obtenido anteriormente, tenemos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\rho aby$$

Entonces,

$$f_1 = \int(-\rho aby)dy = -\frac{1}{2}\rho aby^2 + f_2(z)$$

Agrupando términos, la distribución de presiones se convierte en:

$$P = -\frac{1}{2}\rho abx^2 - \frac{1}{2}\rho aby^2 + f_2(z)$$

Derivando esta expresión respecto a *z* y comparando con el gradiente correspondiente, tenemos:

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = -\rho g$$

Donde,

$$f_2 = \int(-\rho g)dz = -\rho gz + C$$

Finalmente, la distribución de presiones buscada es:

$$P = -\frac{1}{2}\rho abx^2 - \frac{1}{2}\rho aby^2 - \rho gz + C$$

(El campo de velocidades dado es una solución exacta y es independiente de los valores de a y b).

Ejercicio 4

Un campo fluido incompresible bidimensional está definido por las componentes de velocidad

$$u = 2V\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)\ ;\ v = -2V\frac{y}{L}$$

Donde V y L son constantes. En caso de existir, determine la función de corriente y el potencial de velocidades.

Solución:

En primer lugar debemos verificar si se cumple la ecuación de continuidad y la condición de irrotacionalidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2V}{L} - \frac{2V}{L} = 0$$

(Se cumple, por lo tanto Ψ existe).

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} = \left(0 + \frac{2V}{L}\right) \neq 0$$

(No se cumple, por lo tanto Φ no existe).

Para determinar la función de corriente, utilizamos la definición de *u* y *v* e integramos:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2V\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)$$

$$\Psi = \int \left[2V\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)\right] dy = 2V\left(\frac{xy}{L} - \frac{y^2}{2L}\right) + f(x)$$

Derivando esta expresión respecto a *x* y comparando con la definición de *v*:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{2Vy}{L} + \frac{df}{dx} = -v = \frac{2Vy}{L}$$

Entonces,

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Integrando $\partial\Psi/\partial$x respecto a *x* tenemos, finalmente:

$$\Psi = V\left(\frac{2xy}{L} - \frac{y^2}{L}\right) + C$$