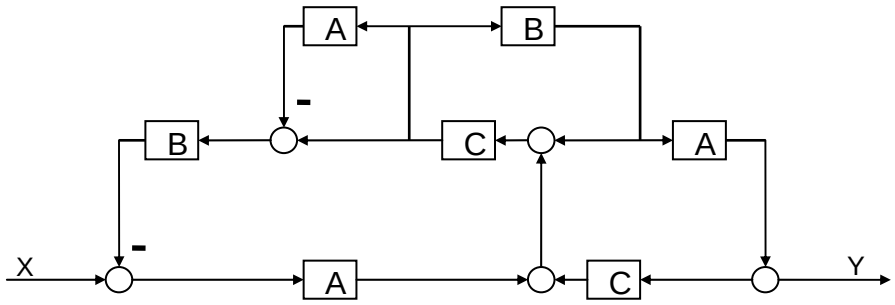
ULA. FACULTAD DE INGENIERIA. **Mérida, 18/05/2012**
ESCUELA DE MECANICA.
TEORIA DE CONTROL.

SEGUNDO PARCIAL Diferido

1. Hallar la función de transferencia de lazo abierto del siguiente sistema de control:



(10 puntos)

2. Determine las matrices A, B, C de una representación de espacio de estado para el sistema representado por la siguientes ecuaciones:

$$C_1DP_1 + R_1P_1 = b_1P + b_2P_2$$
$$C_2DP_2 + R_2P_2 = b_3P_1$$
$$MD^2z + CDz + Kz = F - PA$$

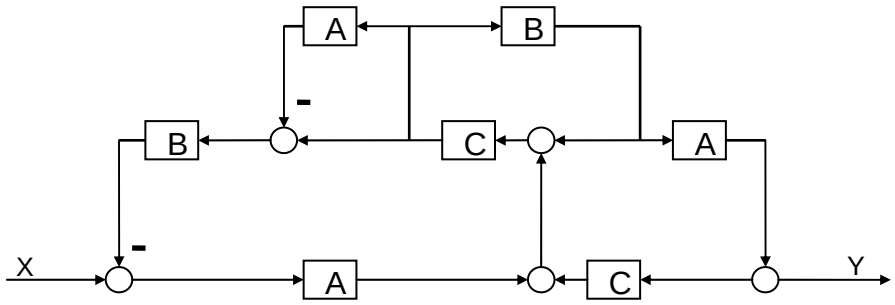
Donde las entradas son: $u = [P, F]$ y las salidas son $y = [z, m_3]$,
Sabiendo que: $m_3 = \frac{P_2}{R_3}$, que P_1 y P_2 son presiones y que los demás términos son constantes del sistema.

(10 puntos)

ULA. FACULTAD DE INGENIERIA. **Mérida, 18/05/2012**
ESCUELA DE MECANICA.
TEORIA DE CONTROL.

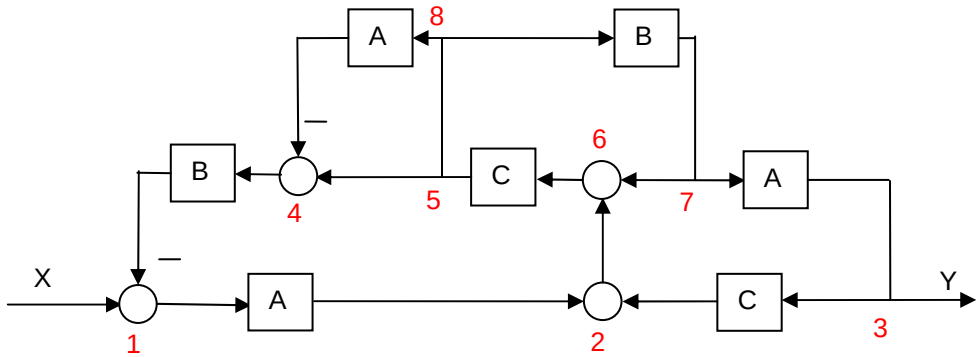
SEGUNDO PARCIAL Diferido

1. Hallar la función de transferencia de lazo abierto del siguiente sistema de control:

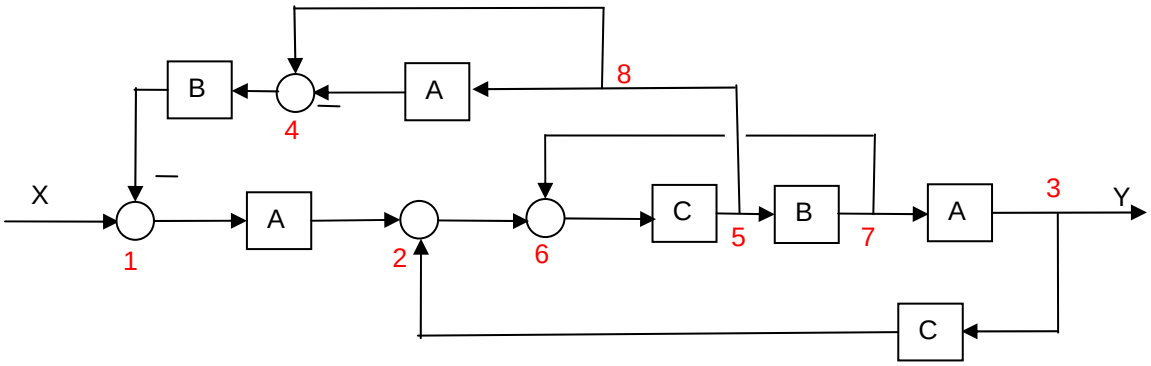


(10 puntos)

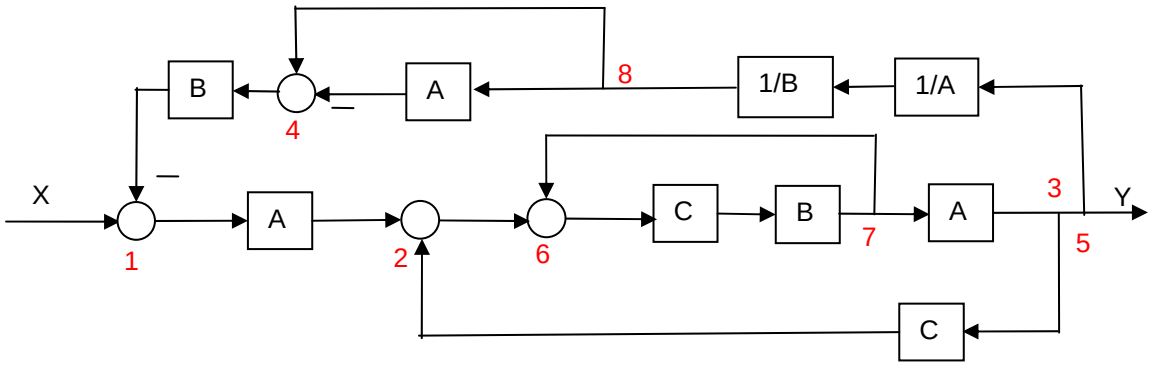
Solución:
Numeramos los puntos de suma y ramificación:



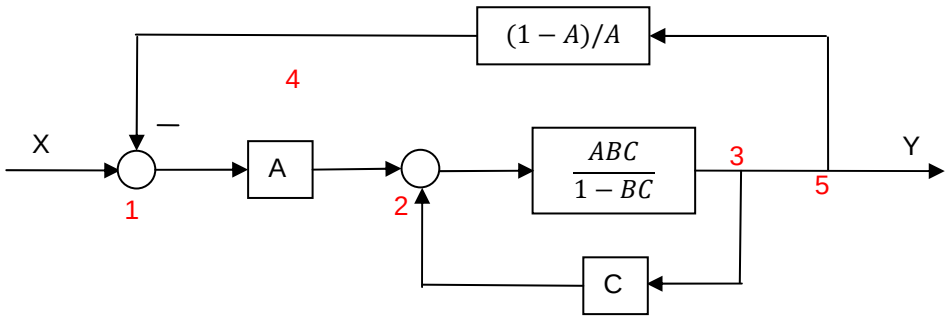
Redibujamos el diagrama para apreciar mejor las relaciones entre los bloques:



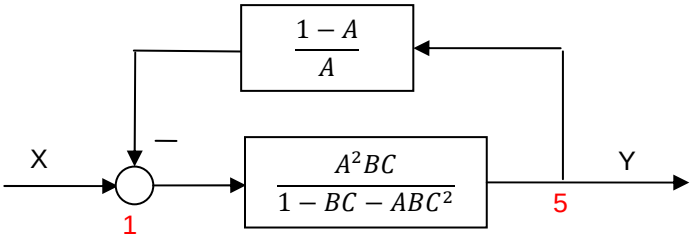
Movemos 5 después de B, después de A e intercambiamos con 3.



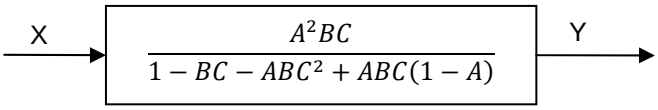
Simplificamos suma de 4 a 8, y bloques B, 1/B y 1/A en cascada.
Resolvemos retroalimentación entre 6 y 7, y cascada con bloque A.



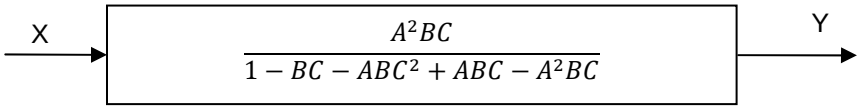
Resolvemos retroalimentación entre 2 y 3, y bloque en cascada A.



Resolvemos retroalimentación entre 1 y 5



Finalmente al simplificar nos queda



2. Determine las matrices A, B, C de una representación de espacio de estado para el sistema representado por la siguientes ecuaciones:

$$C_1DP_1 + R_1P_1 = b_1P + b_2P_2$$
$$C_2DP_2 + R_2P_2 = b_3P_1$$
$$MD^2z + CDz + Kz = F - PA$$

Donde las entradas son: $u = [P, F]$ y las salidas son $y = [z, m_3]$,
Sabiendo que: $m_3 = \frac{P_2}{R_3}$, que P_1 y P_2 son presiones y que los demás términos son constantes del sistema.

(10 puntos)

Solución:
Primera opción con las ecuaciones directamente.
Si seleccionamos como estados a: $x = [P_1, P_2, z, Dz]$ obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$C_1Dx_1 + R_1x_1 = b_1u_1 + b_2x_2$$
$$C_2Dx_2 + R_2x_2 = b_3x_1$$
$$M\dot{x}_4 + Cx_4 + Kx_3 = u_2 - Au_1$$

Reordenando y simplificando tendremos:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{C_1}x_1 + \frac{b_2}{C_1}x_2 + \frac{b_1}{C_1}u_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{b_3}{C_2}x_1 - \frac{R_2}{C_2}x_2$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = -\frac{K}{M}x_3 - \frac{C}{M}x_4 - \frac{A}{M}u_1 + \frac{1}{M}u_2$$
$$y_1 = x_3$$
$$y_2 = \frac{1}{R_3}x_2$$

En forma matricial esto se expresa como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{C_1} & \frac{b_2}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{b_3}{C_2} & -\frac{R_2}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{A}{M} & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segunda opción reduciendo el sistema a 2 ecuaciones.
Obtenemos inicialmente una sola ecuación:

$$C_1DP_1 + R_1P_1 = b_1P + b_2P_2$$
$$C_2DP_2 + R_2P_2 = b_3P_1$$
$$MD^2z + CDz + Kz = F - PA$$
$$m_3 = \frac{P_2}{R_3}$$

De 4 despejo a P_2 y sustituyo en 1 y 2

$$C_1DP_1 + R_1P_1 = b_1P + b_2R_3m_3$$

$$\frac{C_2R_3}{b_3}Dm_3 + \frac{R_2R_3}{b_3}m_3 = P_1$$

Sustituyo a P_1 en 1.

$$C_1D\left(\frac{C_2R_3}{b_3}Dm_3 + \frac{R_2R_3}{b_3}m_3\right) + R_1\left(\frac{C_2R_3}{b_3}Dm_3 + \frac{R_2R_3}{b_3}m_3\right) = b_1P + b_2R_3m_3$$

Obtengo un sistema de 2 ecuaciones:

$$\frac{C_2R_3C_1}{b_1b_3}D^2m_3 + \left(\frac{R_2R_3C_1}{b_1b_3} + \frac{C_2R_3R_1}{b_1b_3}\right)Dm_3 + \left(\frac{R_2R_3R_1}{b_1b_3} - \frac{b_2R_3}{b_1}\right)m_3 = P$$

$$MD^2z + CDz + Kz = F - PA$$

Aquí escojo como variables de estado a $x = (m_3,\ Dm_3,\ z, Dz)^T$

Sustituyendo me queda:

$$\frac{C_2R_3C_1}{b_1b_3}\dot{x}_2 + \left(\frac{R_2R_3C_1}{b_1b_3} + \frac{C_2R_3R_1}{b_1b_3}\right)x_2 + \left(\frac{R_2R_3R_1}{b_1b_3} - \frac{b_2R_3}{b_1}\right)x_1 = u_1$$
$$K_3\dot{x}_2 + K_2x_2 + K_1x_1 = u_1$$
$$M\dot{x}_4 + Cx_4 + Kx_3 = u_2 - Au_1$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{K_3}x_1 - \frac{K_2}{K_3}x_2 + \frac{1}{K_3}u_1 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\frac{K}{M}x_3 - \frac{C}{M}x_4 - \frac{A}{M}u_1 + \frac{1}{M}u_2 \\
y_1 &= x_3 \\
y_2 &= x_1
\end{aligned}$$

En forma matricial esto se expresa como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{K_3} & -\frac{K_2}{K_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{K_3} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{A}{M} & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$