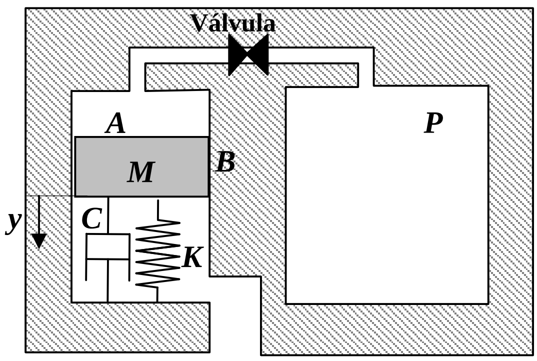
Mérida, 17 de septiembre de 2008

ULA. FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE MECÁNICA
TEORÍA DE CONTROL. Sección 01.

SEGUNDO PARCIAL

1. La siguiente figura muestra un sistema cilindro pistón conectado a un tanque mediante una válvula. El cilindro se encuentra inicialmente a presión atmosférica, y la válvula se encuentra cerrada. El tanque tiene un volumen muy grande (que se puede considerar infinito) y contiene aire a 1000KPa manométrica y de repente se abre la válvula que lo comunica al cilindro.
    a. Hacer la gráfica aproximada del desplazamiento y de la masa respecto del tiempo.
    b. Determine el desplazamiento y de la masa al cabo de 1/4 seg de haberse abierto la válvula.
    c. Determine el desplazamiento total de la masa para cuando el sistema se encuentre en estado estable.



Datos adicionales:

Masa M = 1.5 Kg,
Constante de resorte K = 120Nw/m,
Constante del amortiguador C = 10Nw.s/m,
Coeficiente de fricción B = 8Nw.s/m,
Area del pistón A = 1.2 mm2. (5 puntos)

2. Se tiene un recipiente con agua que se encuentra inicialmente a temperatura ambiente, y este comienza a calentarse por el efecto de una hornilla a razón de 5ºC por minuto hasta ebullición, al cabo de 10 minutos de comenzar a calentarse se introduce en el recipiente un termómetro que posee una constante de tiempo de 3 minutos, y 7 minutos después de haber llegado el agua a ebullición se apaga la hornilla con lo cual la temperatura comienza a descender a razón de 4ºC por minuto. Calcule el error que se produce en la lectura del termómetro si esta se hace a los 15 minutos de haber introducido el termómetro en el agua. Considere que el experimento se realiza a nivel del mar y que la temperatura ambiente es de 35ºC.

(5 puntos)

3. Determine la estabilidad del siguiente sistema:

$$4D^7 + 3D^6 + 2D^5 + D^4 + D^3 + 2D^2 + 3D + 4 = 0$$

(5 puntos)

4. Determine el valor o el rango de valores de K para que el siguiente sistema sea estable:

$$D^4 + 4D^3 + KD^2 + 2D^2 + 2D + K = 0$$

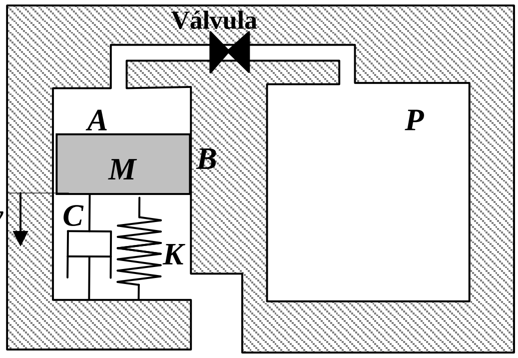
(5 puntos)

Mérida, 17 de septiembre de 2008

ULA. FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE MECÁNICA
TEORÍA DE CONTROL. Sección 01.

SEGUNDO PARCIAL
SOLUCIÓN

1. La siguiente figura muestra un sistema cilindro pistón conectado a un tanque mediante una válvula. El cilindro se encuentra inicialmente a presión atmosférica, y la válvula se encuentra cerrada. El tanque tiene un volumen muy grande (que se puede considerar infinito) y contiene aire a 1000KPa manométrica y de repente se abre la válvula que lo comunica al cilindro.
    a. Hacer la gráfica aproximada del desplazamiento y de la masa respecto del tiempo.
    b. Determine el desplazamiento y de la masa al cabo de 1/4 seg de haberse abierto la válvula.
    c. Determine el desplazamiento total de la masa para cuando el sistema se encuentre en estado estable.



Datos adicionales:

Masa M = 1.5 Kg,
Constante de resorte K = 120Nw/m,
Constante del amortiguador C = 10Nw.s/m,
Coeficiente de fricción B = 8Nw.s/m,
Area del pistón A = 1.2 mm2. (5 puntos)

SOLUCION

La ecuación que gobierna al sistema si el tanque de aire se considera infinito es:

$$PA - Ky - CDy - BDy = MD^2y$$
$$MD^2y + (C+B)Dy + Ky = PA$$
$$1.5D^2y + (18)Dy + 120y = 1.000.000x1.2x10^{-6}$$
$$1.5D^2y + 18Dy + 120y = 1.2$$
$$D^2y + 12Dy + 80y = 0.8$$
$$CI: t = 0, y = 0, Dy = 0$$

Se trata de un sistema de segundo orden con

$$w_n = 8.9443$$
$$\xi = 0.6708$$

Es decir un sistema subamotiguado.

Respuesta transitoria:

$$D^2y + 12Dy + 80y = 0$$
$$D^2 + 12D + 80 = 0$$

$$D = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4x80}}{2} = -6 \pm 6.6332i$$

$$y_T = e^{-\xi \omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right) t - C_2 \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right) t\right)$$

$$y_T = e^{-6t}(C_1 \sin 6.6334\, t - C_2 \cos 6.6334\, t)$$

Respuesta en estado estable:

$$y_{EE} = A; Dy = 0; D^2y = 0$$

$$0 + 12x0 + 80A = 0.8$$

$$A = 0.01$$

Solución completa:

$$y = e^{-6t}(C_1 \sin 6.6334\, t - C_2 \cos 6.6334\, t) + 0.01$$

$$Dy = -6e^{-6t}(C_1 \sin 6.6334\, t - C_2 \cos 6.6334\, t) + e^{-6t}(6.6334C_1 \cos 6.6334\, t + 6.6334C_2 \sin 6.6334\, t)$$

Con las condiciones iniciales:

$$0 = e^{-0}(C_1 \sin 0 - C_2 \cos 0) + 0.01$$

$$0 = -6e^{-0}(C_1 \sin 0 - C_2 \cos 0) + e^{-0}(6.6334C_1 \cos 0 + 6.6334C_2 \sin 0)$$

$$0 = -C_2 + 0.01 \ \rightarrow C_2 = 0.01$$

$$0 = -6(-C_2) + 6.6334C_1 \ \rightarrow C_1 = -0.009045$$

$$y = e^{-6t}(-0.009045 \sin 6.6334\, t - 0.01 \cos 6.6334\, t) + 0.01$$

Evalúo en $t = 0.25$:

$$y = e^{-6(0.25)}(-0.009045 \sin 6.6334\,(0.25) - 0.01 \cos 6.6334\,(0.25)) + 0.01$$

$$y = e^{-1.5}(-0.009045 \sin 1.6583 - 0.01 \cos 1.6583) + 0.01$$

$$y = 0.2231(-0.0090103 + 0.0008739) + 0.01$$

$$y = 0.008185m = 8.1885mm$$

Para cuando el sistema esté en estado estable:

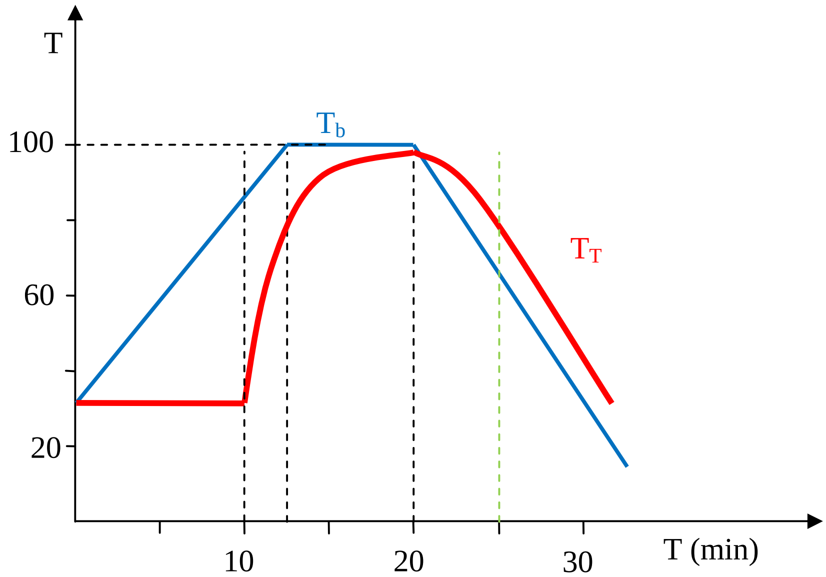
$$y = 0.01m = 10mm$$

2. Se tiene un recipiente con agua que se encuentra inicialmente a temperatura ambiente, y este comienza a calentarse por el efecto de una hornilla a razón de 5ºC por minuto hasta ebullición, al cabo de 10 minutos de comenzar a calentarse se introduce en el recipiente un termómetro que posee una constante de tiempo de 3 minutos, y 7 minutos después de haber llegado el agua a ebullición se apaga la hornilla con lo cual la temperatura comienza a descender a razón de 4ºC por minuto. Calcule el error que se produce en la lectura del termómetro si esta se hace a los 15 minutos de haber introducido el termómetro en el agua. Considere que el experimento se realiza a nivel del mar y que la temperatura ambiente es de 35ºC.

(5 puntos)

SOLUCION

Grafica del proceso:



Ecuación:

$$\tau DT_T + T_T = T_b$$
$$3DT_T + T_T = T_b \text{ en minutos}$$

<u>Primer proceso</u>:

$$3DT_T + T_T = 85 + 5t$$
$$C.I.: t = 0, T_T = 35$$

Solución transitoria:

$$T_{TT} = Ce^{-\frac{t}{3}}$$

Solución en estado estable:

$$T_{TEE} = A + Bt; DT_T = B$$

Sustituyendo:

$$3B + A + Bt = 85 + 5t$$
$$\begin{cases} B = 5 \\ 3B + A = 85 \end{cases} \rightarrow A = 70$$

Solución completa:

$$T_T = Ce^{-\frac{t}{3}} + 70 + 5t$$

Con las C.I.:

$$35 = Ce^{0} + 70 + 5(0)$$
$$C = -35$$

$$T_T = -35e^{-\frac{t}{3}} + 70 + 5t$$

Evaluamos en $t = 3$

$$T_T = -35e^{-1} + 70 + 15$$
$$T_T = 72.124$$

<u>Segundo proceso</u>

$$3DT_T + T_T = 100$$
$$C.I.: t = 0, T_T = 72.124$$

Solución transitoria:

$$T_{TT} = Ce^{-\frac{t}{3}}$$

Solución en estado estable:

$$T_{TEE} = A; DT_T = 0$$

Sustituyendo:

$$0 + A = 100$$

Solución completa:

$$T_T = Ce^{-\frac{t}{3}} + 100$$

Con las C.I.:

$$72.124 = Ce^{0} + 100$$
$$C = -27.876$$

$$T_T = -27.876e^{-\frac{t}{3}} + 100$$

Evaluamos en $t = 7$

$$T_T = -27.876e^{-\frac{7}{3}} + 100$$
$$T_T = 97.297$$

<u>Tercer proceso</u>

$$3DT_T + T_T = 100 - 4t$$
$$C.I.: t = 0, T_T = 97.9098$$

Solución transitoria:

$$T_{TT} = Ce^{-\frac{t}{3}}$$

Solución en estado estable:

$$T_{TEE} = A + Bt; DT_T = B$$

Sustituyendo:

$$3B + A + Bt = 100 - 4t$$
$$\begin{cases} B = -4 \\ 3B + A = 100 \end{cases} \rightarrow A = 112$$

Solución completa:

$$T_T = Ce^{-\frac{t}{3}} + 112 - 4t$$

Con las C.I.:

$$97.297 = Ce^{0} + 112 - 4(0)$$
$$C = -14.703$$

$$T_T = -14.7032e^{-\frac{t}{3}} + 112 - 4t$$

Evaluamos en $t = 5$

$$T_T = -14.703e^{-\frac{5}{3}} + 112 - 4(5)$$

$$T_T = 89.233$$

ERROR

$$E_{rr} = 89.233 - 80 = 9.233$$

3. Determine la estabilidad del siguiente sistema:

$$4D^7 + 3D^6 + 2D^5 + D^4 + D^3 + 2D^2 + 3D + 4 = 0$$

(5 puntos)

SOLUCION

Tabla de ROUTH

$$\left|\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 & 0 \\ \frac{17}{2} & \frac{25}{2} & 4 & 0 & 0 \\ \frac{-45}{17} & \frac{-45}{17} & 0 & 0 & \\ 4 & 4 & 0 & & \\ 0 & 0 & & & \\ 4 & & & & \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0.6667 & -1.6667 & -2.3333 & 0 & 0 \\ 8.5 & 12.5 & 4 & 0 & 0 \\ -2.6471 & -2.6471 & 0 & 0 & \\ 4 & 4 & 0 & & \\ 0 & 0 & & & \\ 4 & & & & \end{array}\right.$$

El sistema es INESTABLE

4. Determine el valor o el rango de valores de K para que el siguiente sistema sea estable:

$$D^4 + 4D^3 + KD^2 + 2D^2 + 2D + K = 0$$

(5 puntos)

SOLUCION

Tabla de ROUTH

$$\begin{array}{|cccc}
1 & K+2 & K & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 \\
K+\frac{3}{2} & K & 0 & 0 \\
\frac{-2K+3}{K+\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\
K & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Para que el sistema sea estable se requiere que:

$$K \geq 0$$

$$K + \frac{3}{2} > 0 \ \rightarrow K > -\frac{3}{2}$$

$$\frac{-2K+3}{K+\frac{3}{2}} > 0 \rightarrow \begin{cases} -2K+3 > 0 \ \ y \ \ K+\frac{3}{2} > 0 \\ \text{ó} \\ -2K+3 < 0 \ \ y \ \ K+\frac{3}{2} < 0 \ no \ cumple \ otra \ condición \end{cases}$$

$$\rightarrow \ -2K+3 > 0 \ \rightarrow \ K < \frac{3}{2}$$

Por tanto el sistema será estable si $0 \leq K < 3/2 \ , K\epsilon[0,3/2)$