Mérida, 19 de mayo de 2014

ULA. FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE MECÁNICA
TEORÍA DE CONTROL.

TERCER EXAMEN PARCIAL

1. Se tiene un medidor de flujo para gasolina, con el cual se quiere medir la cantidad de combustible que gasta un vehículo en un momento determinado. Inicialmente el vehículo se encuentra apagado por lo que el flujo de combustible es nulo, y para un tiempo $t = 0$ se enciende el motor dejándolo en velocidad de marcha mínima, con lo cual empieza a consumir un caudal de combustible de 5 litros por hora. Al cabo de 30 segundos se comienza a acelerar el motor progresivamente por lo que el consumo de combustible aumenta a razón de 1 litro por hora cada segundo hasta alcanzar la velocidad máxima del motor, en donde éste consume 65 litros por hora. 30 segundos después de haber alcanzado la velocidad máxima se apaga el motor. Si el instrumento es de segundo orden con radio de amortiguamiento de 0.9 y frecuencia natural de 1 radian por segundo ¿Cuál será el valor de flujo indicado por el instrumento 1 minuto después de haberse encendido el motor?

(10 puntos)

Solución

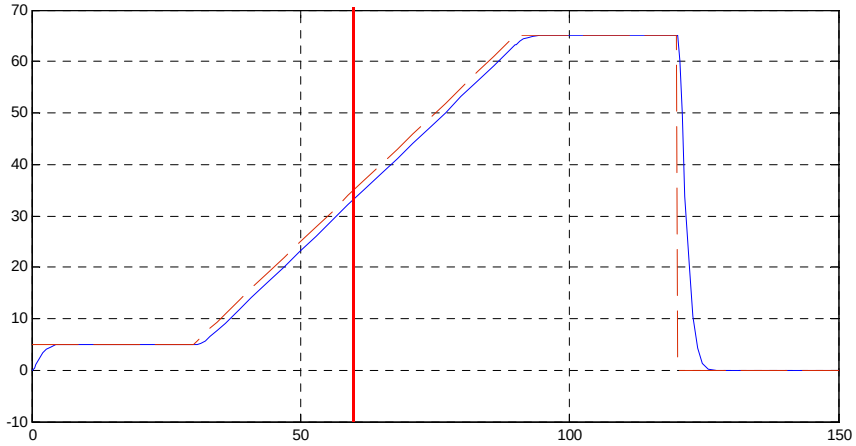
La ecuación del medidor es:

$$D^2Q_C + 2\xi\omega_n DQ_C + \omega_n^2 Q_C = \omega_n^2 K Q_M$$

Donde: $K = 1;\ \xi = 0.9\ \ \omega_n = 1$ para tiempo en segundos.

$$D^2Q_C + 1.8DQ_C + Q_C = Q_M$$

La grafica del proceso completo es:



Como se pide el valor del flujo al cabo de 1 minuto (60s), se debe calcular el flujo y su derivada al final del primer proceso, y luego calcular el valor del flujo al cabo de 30 segundos del segundo proceso.

<u>Primer proceso:</u>

$$Q_M = 5\ l/hr$$

$$D^2Q_C + 1.8DQ_C + Q_C = 5$$
$$C.I.:\quad t = 0\ \rightarrow Q_C = 0; DQ_C = 0$$

Solución transitoria:

Ec. Caracteristica:

$$D^2 + 1.8D + 1 = 0$$

Raices:

$$D_{1,2} = \frac{-1.8 \pm \sqrt{1.8^2 - 4}}{2} = -0.9 \pm 0.4359i$$

Solucion transitoria:

$$Q_{CT} = e^{-0.9t}(C_1 \sin 0.4359t + C_2 \cos 0.4359t)$$

Solución en estado estable:

Suponemos

$$Q_{CEE} = A$$
$$DQ_C = 0$$
$$D_C^2 = 0$$

Por lo tanto sustituyendo en ecuación:

$$A = 5$$
$$Q_{CEE} = 5$$

Solución completa:

$$Q_C = e^{-0.9t}(C_1 \sin 0.4359t + C_2 \cos 0.4359t) + 5$$

Su derivada:

$$DQ_C = -0.9e^{-0.9t}(C_1 \sin 0.4359t + C_2 \cos 0.4359t) + e^{-0.9t}(0.4359C_1 \cos 0.4359t - 0.4359C_2 \sin 0.4359t)$$

Con las condiciones iniciales:

$$0 = e^0(C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + 5$$
$$0 = -0.9e^0(C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + e^0(0.4359C_1 \cos 0 - 0.4359C_2 \sin 0)$$

$$0 = C_2 + 5$$
$$0 = -0.9C_2 + 0.4359C_1$$

$$C_2 = -5$$
$$C_1 = -10.323$$

Solución será:

$$Q_C = e^{-0.9t}(-10.323 \sin 0.4359t - 5 \cos 0.4359t) + 5$$

$$DQ_C = -0.9e^{-0.9t}(-10.323 \sin 0.4359t - 5 \cos 0.4359t) + e^{-0.9t}(0.4359(-10.323) \cos 0.4359t - 0.4359(-5) \sin 0.4359t)$$

Evaluó en $t = 30s$ tanto el flujo como la derivada:

$$Q_C = 5\ l/hr$$
$$DQ_C = -3.7853 \times 10^{-12} \ \cong 0$$

<u>Segundo proceso:</u>

$$Q_C = 5\ (l/hr) + t(l/hr.s)$$

$$D^2Q_C + 1.8DQ_C + Q_C = 5 + t$$
$$C.I.: \ \ t = 0 \ \rightarrow Q_C = 5; DQ_C = 0$$

Solución transitoria:

$$Q_{CT} = e^{-0.9t}(C_1 \sin 0.4359t + C_2 \cos 0.4359t)$$

Solución en estado estable:

Suponemos

$$Q_{CEE} = A + Bt$$
$$DQ_C = B$$
$$D_C^2 = 0$$

Por lo tanto sustituyendo en ecuación:

$$1.8B + A + Bt = 5 + t$$
$$B = 1$$
$$1.8(1) + A = 5$$
$$A = 3.2$$

La solución en estado estable es:

$$Q_{CEE} = 3.2 + t$$

Solución completa:

$$Q_C = e^{-0.9t}(C_1 \sin 0.4359t + C_2 \cos 0.4359t) + 3.2 + t$$

Su derivada:

$$DQ_C = -0.9e^{-0.9t}(C_1 \sin 0.4359t + C_2 \cos 0.4359t) + e^{-0.9t}(0.4359C_1 \cos 0.4359t - 0.4359C_2 \sin 0.4359t) + 1$$

Con las condiciones iniciales:

$$0 = e^0(C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + 3.2 + 0$$
$$0 = -0.9e^0(C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + e^0(0.4359C_1 \cos 0 - 0.4359C_2 \sin 0) + 1$$

$$0 = C_2 + 3.2$$
$$0 = -0.9C_2 + 0.4359C_1 + 1$$

$$C_2 = -3.2$$
$$C_1 = -8.9011$$

La solución completa será entonces:

$$Q_C = e^{-0.9t}(-8.9011 \sin 0.4359t - 3.2 \cos 0.4359t) + 3.2 + t$$

Evaluó en $t = 30\ s$

$$Q_C = 33.2\ (l/hr)$$

2. Determine, utilizando el criterio de ROUTH, el valor o el rango de valores de K para que el siguiente sistema sea estable:

$$D^4 + 4D^3 + 3KD^2 + 2D + K = 0$$

(5 puntos)

Solución

Hacemos la tabla de Routh

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 3K & K & 0 \\ 4 & 2 & 0 & \\ 3K - \frac{1}{2} & K & 0 & \\ \frac{2K-1}{3K-\frac{1}{2}} & 0 & & \\ K & & & \end{array}\right.$$

$$C_1 = \frac{6K - 1 - 4K}{\left(3K - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2K-1}{3K - \frac{1}{2}}$$

Para que el sistema sea estable:

$$3K - \frac{1}{2} > 0 \ \rightarrow K > \frac{1}{6}$$

$$\frac{2K-1}{3K-\frac{1}{2}} > 0 \ \rightarrow 2K - 1 > 0 \ \rightarrow K > \frac{1}{2}$$

$$K \geq 0$$

Por lo tanto el sistema es estable para todo

$$K > \frac{1}{2}$$

3. Determine, utilizando el criterio de HURWITZ, si el sistema representado por las siguientes matrices de estado es estable:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

(5 puntos)

Solución

Calculo la ecuación característica del sistema

$$|sI - A| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 3 & s+1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 3 & s+1 \end{vmatrix} = ss(s+1) + 4 - (-1)3s = s^3 + s^2 + 3s + 4$$

Construimos los determinantes de Hurwitz:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

El sistema es INESTABLE.