**Mérida, 14 de marzo de 2015**

**ULA. FACULTAD DE INGENIERÍA**
**ESCUELA DE MECÁNICA**
**TEORÍA DE CONTROL. Secciones 01 y 02.**

## TERCER PARCIAL

1. Se quiere utilizar un termómetro de segundo orden para medir la temperatura de un ser humano. Se sabe que el termómetro responde con máxima velocidad de respuesta sin oscilar, siendo la velocidad de respuesta inicial igual a cero y que este posee una frecuencia natural $\omega_n$. Si la temperatura ambiente del lugar de trabajo es de 25ºC y la lectura no puede poseer un error mayor a 0.2 ºC, calcule cuanto tiempo se debe esperar para tomar la lectura del termómetro después de habérselo introducido al paciente, con una precisión de un décimo de segundo (0.1s).

   Nota: suponga que la frecuencia natural del sistema y la temperatura de la persona a la que se le mide la temperatura es:

   **Modelo A:** $\boldsymbol{\omega_n = 120\frac{rad}{min}, T_P = 36°C}$

   **Modelo B:** $\boldsymbol{\omega_n = 180\frac{rad}{min}, T_P = 38°C}$

   **Modelo C:** $\boldsymbol{\omega_n = 240\frac{rad}{min}, T_P = 40°C}$ **(10 puntos)**

2. Determine el valor o el rango de valores de $\boldsymbol{k}$ para que el sistema representado por las siguientes matrices de estado sea estable:

   **Modelo A**: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4-2k & -3k & -k-1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   **Modelo B**: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3-k & -2k & -k-2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   **Modelo C:** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-k & -k-1 & -2k \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

   (10 puntos)

**Mérida, 14 de marzo de 2015**

**ULA. FACULTAD DE INGENIERÍA**
**ESCUELA DE MECÁNICA**
**TEORÍA DE CONTROL. Secciones 01 y 02.**

**TERCER PARCIAL**
**SOLUCION**

1. Se quiere utilizar un termómetro de segundo orden para medir la temperatura de un ser humano. Se sabe que el termómetro responde con máxima velocidad de respuesta sin oscilar, siendo la velocidad de respuesta inicial igual a cero y que este posee una frecuencia natural $\omega_n$. Si la temperatura ambiente del lugar de trabajo es de 25ºC y la lectura no puede poseer un error mayor a 0.2 ºC, calcule cuanto tiempo se debe esperar para tomar la lectura del termómetro después de habérselo introducido al paciente, con una precisión de un décimo de segundo (0.1s).

   Nota: suponga que la frecuencia natural del sistema y la temperatura de la persona a la que se le mide la temperatura es:

**Modelo A:** $\boldsymbol{\omega_n = 120\frac{rad}{min}, T_P = 36°C}$
**Modelo B:** $\boldsymbol{\omega_n = 180\frac{rad}{min}, T_P = 38°C}$
**Modelo C:** $\boldsymbol{\omega_n = 240\frac{rad}{min}, T_P = 40°C}$

(10 puntos)

**SOLUCIÓN**

**Modelo A:** $\boldsymbol{\omega_n = 30\frac{rad}{min}, T_P = 36°C}$

La ecuación general de un sistema de segundo orden es:

$$D^2T_T + 2\xi\omega_n DT_T + \omega_n^2 T_T = \omega_n^2 T_p$$

En nuestro caso sabemos que $\xi = 1$, por ser máxima velocidad de respuesta sin oscilar, y $\omega_n = 120\frac{rad}{minutos} = 2\frac{1}{s}$, por lo que nos es más fácil escribir la ecuación en segundos:

$$D^2T_T + 4DT_T + 4T_T = 144$$
$$C.I.\ t = 0, T_T = 25°C, DT_T = 0$$

Resolvemos la ecuación:
Solución Transitoria:

$$D^2T_T + 4DT_T + 4T_T = 0$$

Ecuación Característica será:

$$D^2 + 4D + 4 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$D_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4}}{2} = -2$$

Dos raíces reales repetidas por lo tanto la solución es de la forma:

$$T_{Tt} = C_1 e^{Dt} + C_2 t e^{Dt} = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

Solución en estado estable:
Supongo respuesta constante por ser entrada en escalón:

$$T_{Tee} = A$$

Por tanto: $DT_T = 0$ y $D^2 T_T = 0$.
Sustituyo en ecuación:

$$0 + 4(0) + 4A = 144$$
$$A = \frac{144}{4} = 36$$

La solución completa será:

$$T_T = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + 36$$

Y su derivada:

$$DT_T = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t}$$

Con las condiciones iniciales calculo las constantes:

$$25 = C_1 e^{-2(0)} + C_2 (0) e^{-2(0)} + 36$$

$$0 = -2C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{-2(0)} - 2C_2 (0) e^{-2(0)}$$

Nos quedan dos ecuaciones algebraicas:

$$25 = C_1 + 36$$
$$0 = -2C_1 + C_2$$

Por lo tanto: $C_1 = -11$ y $C_2 = -22$

La solución completa será entonces:

$$T_T = -11e^{-2t} - 22te^{-2t} + 36$$

Para que el error sea inferior a 0,2, debo evaluar en que tiempo $T_T > 35.8°C$

$$35.8 < -11e^{-2t} - 22te^{-2t} + 36$$
$$0.2 > 11e^{-2t} + 22te^{-2t}$$
$$0.2 > (11 + 22t)e^{-2t}$$

Se cumple para un $T \cong 3{,}0\ s$

**SOLUCIÓN**

**Modelo B: $\omega_n = 180\frac{rad}{min}, T_P = 38°C$**

En nuestro caso sabemos que $\xi = 1$, por ser máxima velocidad de respuesta sin oscilar, y $\omega_n = 180\frac{rad}{minutos} = 3\frac{1}{s}$, por lo que nos es más fácil escribir la ecuación en segundos:

$$D^2T_T + 6DT_T + 9T_T = 342$$
$$C.I.\, t = 0, T_T = 25°C, DT_T = 0$$

Resolvemos la ecuación:
Solución Transitoria:

$$D^2T_T + 6DT_T + 9T_T = 0$$

Ecuación Característica será:

$$D^2 + 6D + 9 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$D_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 9}}{2} = -3$$

Dos raíces reales repetidas por lo tanto la solución es de la forma:

$$T_{Tt} = C_1e^{Dt} + C_2te^{Dt} = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t}$$

Solución en estado estable:
Supongo respuesta constante por ser entrada en escalón:

$$T_{Tee} = A$$

Por tanto: $DT_T = 0$ y $D^2T_T = 0$.
Sustituyo en ecuación:

$$0 + 6(0) + 9A = 342$$
$$A = \frac{342}{9} = 38$$

La solución completa será:

$$T_T = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t} + 38$$

Y su derivada:

$$DT_T = -3C_1e^{-3t} + C_2e^{-3t} - 3C_2te^{-3t}$$

Con las condiciones iniciales calculo las constantes:

$$25 = C_1e^{-3(0)} + C_2(0)e^{-3(0)} + 38$$
$$0 = -3C_1e^{-3(0)} + C_2e^{-3(0)} - 3C_2(0)e^{-3(0)}$$

Nos quedan dos ecuaciones algebraicas:

$$25 = C_1 + 38$$
$$0 = -3C_1 + C_2$$

Por lo tanto: $C_1 = -13$ y $C_2 = -39$
La solución completa será entonces:

$$T_T = -13e^{-3t} - 39te^{-3t} + 38$$

Para que el error sea inferior a 0,2, debo evaluar en que tiempo $T_T > 37.8°C$

$$37.8 < -13e^{-3t} - 39te^{-3t} + 38$$
$$0.2 > 13e^{-3t} + 39te^{-3t}$$
$$0.2 > (13 + 39t)e^{-3t}$$

Se cumple para un $T \cong 2.1\ s$

**SOLUCIÓN**

**Modelo C: $\omega_n = 240\frac{rad}{min}, T_P = 40°C$**

En nuestro caso sabemos que $\xi = 1$, por ser máxima velocidad de respuesta sin oscilar, y $\omega_n = 240\frac{rad}{minutos} = 4\frac{1}{s}$, por lo que nos es más fácil escribir la ecuación en segundos:

$$D^2T_T + 8DT_T + 16T_T = 640$$
$$C.I.\ t = 0, T_T = 25°C, DT_T = 0$$

Resolvemos la ecuación:
Solución Transitoria:

$$D^2T_T + 8DT_T + 16T_T = 0$$

Ecuación Característica será:

$$D^2 + 8D + 16 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$D_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 16}}{2} = -4$$

Dos raíces reales repetidas por lo tanto la solución es de la forma:

$$T_{Tt} = C_1e^{Dt} + C_2te^{Dt} = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$$

Solución en estado estable:
Supongo respuesta constante por ser entrada en escalón:

$$T_{Tee} = A$$

Por tanto: $DT_T = 0$ y $D^2T_T = 0$.
Sustituyo en ecuación:

$$0 + 8(0) + 16A = 640$$
$$A = \frac{640}{16} = 40$$

La solución completa será:

$$T_T = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} + 40$$

Y su derivada:

$$DT_T = -4C_1e^{-4t} + C_2e^{-4t} - 4C_2te^{-4t}$$

Con las condiciones iniciales calculo las constantes:

$$25 = C_1e^{-4(0)} + C_2(0)e^{-4(0)} + 40$$
$$0 = -4C_1e^{-4(0)} + C_2e^{-4(0)} - 4C_2(0)e^{-4(0)}$$

Nos quedan dos ecuaciones algebraicas:

$$25 = C_1 + 40$$
$$0 = -4C_1 + C_2$$

Por lo tanto: $C_1 = -15$ y $C_2 = -60$

La solución completa será entonces:

$$T_T = -15e^{-4t} - 60te^{-4t} + 40$$

Para que el error sea inferior a 0,2, debo evaluar en que tiempo $T_T > 39.8°C$

$$39.8 < -15e^{-4t} - 60te^{-4t} + 40$$
$$0.2 > 15e^{-4t} + 60te^{-4t}$$
$$0.2 > (15 + 60t)e^{-4t}$$

Se cumple para un $T \cong 1.6\ s$

3. Determine el valor o el rango de valores de ***k*** para que el sistema representado por las siguientes matrices de estado sea estable:

**Modelo A**: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4-2k & -3k & -k-1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 0 \quad 0]$

**Modelo B**: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3-k & -2k & -k-2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 1 \quad 1]$

**Modelo C:** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-k & -k-1 & -2k \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $C = [0 \quad 0 \quad 5]$

(10 puntos)

SOLUCION

**Modelo A**: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4-2k & -3k & -k-1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 0 \quad 0]$

Calculamos la ecuación característica del sistema:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2k-4 & 3k & s+k+1 \end{vmatrix} = s^2(s+k+1) + 2k - 4 + 3ks$$

$$s^3 + (k+1)s^2 + 3ks + 2k - 4 = 0$$

Construimos la tabla de Routh de esta ecuación característica:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 3k & 0 \\ s^2 & k+1 & 2k-4 & 0 \\ s & \dfrac{3k^2+k+4}{k+1} & 0 & \\ s^0 & 2(k-2) & & \end{array}$$

El elemento $b_1$ será:

$$b_1 = \frac{(k+1)3k - (2k-4)}{k+1} = \frac{3k^2 + 3k - 2k + 4}{k+1} = \frac{3k^2 + k + 4}{k+1}$$

Para que el sistema sea estable se deben cumplir las tres condiciones siguientes:

$$(1) \;\; k + 1 > 0 \rightarrow k > -1$$
$$(2) \; 2(k-2) > 0 \rightarrow k > 2$$

y

$$(3) \;\; \frac{3k^2 + k + 4}{k+1} > 0 \rightarrow \begin{cases} k+1 > 0 \; y \; 3k^2 + k + 4 > 0 \\ \text{ó} \\ k+1 < 0 \; y \; 3k^2 + k + 4 < 0 \end{cases}$$

En la condición (3) se utiliza solo la primera posibilidad, pues la segunda contradice la condición (1). Queda entonces por evaluar:

$$3k^2 + k + 4 > 0 \rightarrow se\ cumple\ para\ todo\ k$$

Por lo tanto el sistema será estable si $k > 2$ ó $k \in (2, \infty]$

SOLUCION

**Modelo B**: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3-k & -2k & -k-2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculamos la ecuación característica del sistema:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k-3 & 2k & s+k+2 \end{vmatrix} = s^2(s+k+2) + k - 3 + 2ks$$

$$s^3 + (k+2)s^2 + 2ks + k - 3 = 0$$

Construimos la tabla de Routh de esta ecuación característica:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 2k & 0 \\ s^2 & k+2 & k-3 & 0 \\ s & \dfrac{2k^2+3k+3}{k+2} & 0 & \\ s^0 & k-3 & & \end{array}$$

El elemento $b_1$ será:

$$b_1 = \frac{(k+2)2k - (k-3)}{k+2} = \frac{2k^2 + 4k - k + 3}{k+2} = \frac{2k^2 + 3k + 3}{k+2}$$

Para que el sistema sea estable se deben cumplir las tres condiciones siguientes:

$$(1)\ \ k + 2 > 0 \rightarrow k > -2$$
$$(2) k - 3 > 0 \rightarrow k > 3$$

y

$$(3)\ \ \frac{2k^2 + 3k + 3}{k+2} > 0 \rightarrow \begin{cases} k + 2 > 0\ y\ 2k^2 + 3k + 3 > 0 \\ \text{ó}\ k + 2 < 0\ y\ 2k^2 + 3k + 3 < 0 \end{cases}$$

En la condición (3) se utiliza solo la primera posibilidad, pues la segunda contradice la condición (1). Queda entonces por evaluar:

$$2k^2 + 3k + 3 > 0 \rightarrow se\ cumple\ para\ todo\ k$$

Por lo tanto el sistema será estable si $k > 3$ ó $k \in (3, \infty]$

SOLUCION

**Modelo C:** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-k & -k-1 & -2k \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $C = [0 \quad 0 \quad 5]$

Calculamos la ecuación característica del sistema:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k-1 & k+1 & s+2k \end{vmatrix} = s^2(s+2k) + (k-1) + (k+1)s$$

$$s^3 + 2ks^2 + (k+1)s + (k-1) = 0$$

Construimos la tabla de Routh de esta ecuación característica:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & k+1 & 0 \\ s^2 & 2k & k-1 & 0 \\ s & \dfrac{2k^2+k+1}{2k} & 0 & \\ s^0 & k-1 & & \end{array}$$

El elemento $b_1$ será:

$$b_1 = \frac{2k(k+1) - (k-1)}{2k} = \frac{2k^2 + 2k - k + 1}{2k} = \frac{2k^2 + k + 1}{2k}$$

Para que el sistema sea estable se deben cumplir las tres condiciones siguientes:

$$(1) \;\; 2k > 0 \rightarrow k > 0$$
$$(2) \;\; k - 1 > 0 \rightarrow k > 1$$

y

$$(3) \;\; \frac{2k^2 + k + 1}{2k} > 0 \rightarrow \begin{cases} 2k > 0 \; y \; 2k^2 + k + 1 > 0 \\ \text{ó} \; 2k < 0 \; y \; 2k^2 + k + 1 < 0 \end{cases}$$

En la condición (3) se utiliza solo la primera posibilidad, pues la segunda contradice la condición (1). Queda entonces por evaluar:

$$2k^2 + k + 1 > 0 \rightarrow se\ cumple\ para\ todo\ k$$

Por lo tanto el sistema será estable si $k > 1$ ó $k \in (1, \infty]$