

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : « **Automatique, Productique** »

préparée au **Laboratoire d'Automatique de Grenoble**

dans le cadre de l'Ecole Doctorale

« **Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal** »

présenté et soutenue publiquement

par

Jean-François DULHOSTE

Le 23 Novembre 2001

Titre :

**CONTRIBUTION A LA COMMANDE
NON LINEAIRE DE SYSTEMES
D'IRRIGATION**

Directeur de thèse : Didier GEORGES

Co-encadrant : Gildas BESANÇON

JURY

M. Guy BORNARD	,Président
M. Georges BASTIN	,Rapporteur
M. Hassan HAMMOURI	,Rapporteur
M. Didier GEORGES	,Directeur de thèse
M. Gildas BESANÇON	,Co-encadrant
M. Xavier LITRICO	,Examineur

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au sein de l'équipe Grand Systèmes (GSYS) du Laboratoire d'Automatique de Grenoble pendant la période comprise entre septembre 1998 et octobre 2001.

Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude à Monsieur Didier GEORGES, mon directeur de thèse, pour l'accueil qu'il m'a offert dans son équipe, pour ses qualités humaines et pour l'efficacité dans la direction des mes travaux de recherche.

Je voudrais aussi remercier Monsieur Gildas BESANÇON, co-encadrant de ma thèse, qui m'a soutenu scientifiquement dans les parcours quotidiens du travail de thèse. Je tiens à le remercier aussi pour sa compréhension, sa disponibilité et ses qualités humaines.

Je remercie toute l'équipe du laboratoire, permanents et doctorants, pour son accueil amical et pour l'ambiance agréable qui règne dans le laboratoire.

Je tiens à remercier les membres du jury :

- ❑ Monsieur Guy BORNARD pour avoir accepté d'être le président du jury.
- ❑ Monsieur Georges BASTIN pour avoir accepté d'être rapporteur.
- ❑ Monsieur Hassan HAMMOURI pour avoir accepté d'être rapporteur.
- ❑ Monsieur Xavier LITRICO pour avoir accepté d'être examinateur.

J'exprime ma reconnaissance envers L'Université des Andes à Mérida, Venezuela, qui m'a financé et permis de venir compléter ma formation en France, et plus particulièrement à mes collègues du département de Sciences Thermiques de l'école de Mécanique qui m'ont soutenu et encouragé dans ce projet. Je suis également reconnaissant pour l'apport du CONICIT, qui a complété le financement nécessaire pour ma formation doctorale.

Et, j'ai laissé pour la fin les plus importants, ma famille, et plus particulièrement mon épouse María Angélica et mes filles Diana et Verónica, qui m'ont aidé, accompagné, soutenu, encouragé et aimé tout au long de ces années passées en France. Ce travail est pour vous.

A vous tous, **merci de tout mon cœur.**

TABLE DES MATIERES

<i>Remerciements</i>	3
<i>Table des matières</i>	5
<i>Résumé</i>	11
<i>Mots clés</i>	11
<i>Publications</i>	13
<i>Introduction.</i>	15
<i>Systèmes de distribution d'eau</i>	19
<i>1.1. Introduction</i>	19
1.1.1. Réseaux sous pression	20
1.1.2. Réseau gravitaire de canaux à surface libre	20
<i>1.2. Canaux à surface libre</i>	20
1.2.1. Classification	20
1.2.1.1. Suivant l'origine	20
1.2.1.2. Suivant la structure	21
1.2.2. Géométrie d'un canal a surface libre	21
1.2.3. Ecoulement dans les canaux à surface libre	24
1.2.3.1. Variabilité de l'écoulement dans le temps	24
1.2.3.2. Variabilité de l'écoulement dans l'espace	25
1.2.3.3. Régimes d'écoulement	26
1.2.4. Modèles mathématiques	27
1.2.4.1. Classification suivant la méthode d'obtention	27
Modèle de représentation	27
Modèle de connaissance	27
1.2.4.2. Classification suivant le type de représentation spatiale	28
Modèle de dimension infinie	28
Modèle de dimension finie	28
<i>1.3. Equations de Barré de Saint-Venant</i>	29
1.3.1. Formulation en vitesse	29

1.3.2. Formulation en débit	30
1.3.3. Terme de frottement	32
1.3.4. Conditions aux limites et conditions initiales	33
1.3.5. Prises Latérales	33
1.3.6. Equations de Saint-Venant à l'équilibre	34
1.4. Ouvrages	35
1.4.1. Equation des ouvrages d'interconnexion de biefs	35
1.4.1.1. Déversoir et Vanne de fond	36
1.4.1.2. Déversoir et Orifice	38
1.4.1.3. Surverse.	39
1.4.2. Conditions de fonctionnement des ouvrages d'interconnexion de biefs	40
1.4.3. Ouvrages pour prises latérales.	41
1.4.3.1. Prise latérale par canal secondaire.	41
1.4.3.2. Prise par station de pompage.	42
1.5. Automatisation d'un canal d'irrigation	43
1.5.1. Objectif de l'automatisation d'un canal d'irrigation	44
1.5.2. Classification de la commande	44
1.5.2.1. Suivant les variables de contrôle	45
1.5.2.1.1. Variables contrôlées	45
1.5.2.1.2. Variables mesurées	47
1.5.2.1.3. Commandes	47
1.5.2.2. Suivant la logique de contrôle	48
1.5.2.3. Suivant le modèle utilisé	50
1.5.2.4. Suivant la méthode de synthèse de la commande	50
Méthodes Linéaires Monovariabiles	50
Méthodes Linéaires Multivariabiles	50
Méthodes Non Linéaires	51
1.6. Objectifs et limites de la thèse	52
Modélisation	53
2.1. Introduction	53
2.2. Equations de Barré de Saint-Venant	53

2.3. Modèle de Dimension Finie	54
2.3.1. Introduction	54
2.3.2. Méthode des différences finies explicite en temps des Equations de Saint-Venant	56
2.3.2.1. Discrétisation	56
2.3.2.2. Conditions aux limites	57
Conditions aux limites Q_{amont} et Q_{aval}	57
Conditions aux limites Q_{amont} et h_{aval}	58
Conditions aux limites h_{amont} et Q_{aval}	58
Conditions aux limites h_{amont} et h_{aval}	59
Conditions aux limites h_{amont} et Q_{amont}	59
2.3.2.3. Considérations finales	60
2.3.3. Méthode des différences finies implicite en temps des Equations de Saint-Venant	61
2.3.3.1. Discrétisation	61
2.3.3.2. Introductions des conditions aux limites Internes ou des prises latérales	63
2.3.4. Solution des Equations de Saint-Venant par la méthode de collocation	63
2.3.4.1. Principe de la méthode des résidus pondérés	63
2.3.4.2. Résolution des Equations de Saint-Venant par Collocation	67
2.3.4.3. Mise en œuvre	69
2.3.4.3.1. Fonctions de forme utilisées	69
2.3.4.3.2. Localisation des points de collocation	70
2.3.4.3.3. Introductions des conditions aux limites du système	72
2.3.4.3.4. Utilisation d'un nombre de points n différent pour h et Q	75
2.3.5. Modèle de commande	78
2.4. Validation du Modèle	79
2.4.1. Points d'équilibre du modèle de collocation	79
2.4.2. Validation des algorithmes de simulation	83
2.4.2.1. Comparaisons des simulations obtenues par Collocation avec celles du modèle de Preissmann	84
2.4.2.2. Comparaison des valeurs propres du modèle linéarisé et discrétisé obtenues par collocation et par Preissmann	98
2.4.2.2.1. Linéarisation des équations de Saint-Venant modifiées par collocation	98
2.4.2.2.2. Modèle de Preissmann Linéarisé	101
2.4.2.2.3. Comparaison des valeurs propres	102

2.4.2.3. Comparaison de la Méthode de Collocation avec la Méthode de Différences Finies par Discretisation Explicite	105
2.5. Conclusions	109
Commande	111
3.1. Introduction	111
3.2. Modèle de base pour la commande	112
3.3. Commande par linearisation entrée-sortie	112
3.3.1. Commande par retour d'état linéarisant statique	113
3.3.2. Commande par retour d'état linéarisant dynamique	114
3.3.2.1. Théorème :	115
3.3.2.2. Preuve :	116
Stabilité de la dynamique résiduelle Y_3	116
3.3.3. Mise en Œuvre	118
3.3.4. Variante de la commande par retour d'état linéarisant dynamique avec estimateur de l'infiltration q	119
3.4. Commande par une méthode Backstepping	121
3.4.1. Théorème	123
3.4.2. Preuve	123
3.4.2.1. Commande de h_2 avec U_1 par placement de pôles :	123
3.4.2.2. Commande de Q_2 et H avec U_2 par Backstepping :	123
Première étape : "commande de Q_2 avec H "	124
deuxième étape : "commande de H par U_2 "	124
3.4.3. Mise en Œuvre	126
3.5. Validation des commandes	127
3.5.1 Première étape : modèle par collocation à trois points	128
3.5.2. Deuxième étape : modèles plus précis	128
3.5.3. Troisième étape : Modèle avec équations d'ouvrages	134
3.5.4. Rejet de perturbations	138
3.5.4.1. Infiltration	138

3.5.4.2. Prises latérales	139
3.5.5. Conclusions	143
3.6. Observateur de débit et infiltration	144
3.6.1. Introduction	144
3.6.2. Observateur linéaire pour q	144
Proposition 1	145
3.6.3. Observateur à grand gain pour Q_2	145
Proposition 2	146
Preuve	146
3.6.4. Couplage des deux observateurs	147
3.6.5. Couplage Observateur-Commande	147
Proposition	148
3.7. Validation du couplage Observateur-Commande	148
3.7.1. Validation de l'observateur	148
3.7.2. Validation de la commande avec observation	153
3.7.3. Rejet de perturbation	157
3.7.3.1. Rejet de perturbation d'infiltration	157
3.7.3.2. Rejet de perturbation de prises latérales	158
3.7.4. Conclusions	160
3.8. Commande de biefs interconnectés	160
3.8.1. Introduction	160
3.8.2. Modèle pour un système à deux biefs	161
3.8.3. Détermination de la commande	163
3.8.4. Cas particulier de la commande par l'amont	164
3.8.4.1. Points d'équilibre	165
3.8.4.2. Simplification du système	166
3.8.4.3. Analyse de stabilité	168
3.8.5. Validation de la commande sur biefs interconnectés	170
3.8.5.1. Validation sur modèle par collocation à trois points	170
3.8.5.2. Validation sur modèle de Preissmann à 10 sections	172

3.8.5.3. Rejet de perturbation par prises latérales	174
3.8.6. Conclusions	175
<i>Conclusions et perspectives</i>	<i>177</i>
Conclusions	177
Perspectives	180
<i>Bibliographie</i>	<i>183</i>
<i>Bibliographie complémentaire</i>	<i>192</i>

RESUME

Ce rapport de thèse a pour but de résumer le travail de recherche sur la commande non linéaire de canaux à surface libre, basé sur un modèle de dimension finie, obtenu par une méthode de collocation orthogonale.

Il est divisé en trois grandes parties. Une première partie présente les systèmes de distribution d'eau en général, ainsi que quelques notions d'automatisation et un état de l'art sur le sujet.

La deuxième partie présente la modélisation de biefs de canaux ouverts par les équations de Saint-Venant, ainsi que trois méthodes d'intégration numérique de ces équations. Les méthodes présentées sont deux méthodes de différences finies, une explicite et une autre implicite dite de Preissmann, et une troisième est la méthode de collocation orthogonale, utilisée par la suite pour la commande.

La troisième partie est dédiée au développement de lois de commande non linéaires pour le modèle de canal à surface libre obtenu par la méthode de collocation orthogonale. Trois méthodes sont utilisées ici pour la commande : linéarisation entrée-sortie, linéarisation entrée-sortie dynamique et backstepping. De plus afin de s'affranchir de la nécessité de mesurer tous les états, un observateur de débit et infiltration a été développé. Enfin, quelques avancées sur la commande de biefs interconnectés sont présentées.

MOTS CLES

Hydraulique de canaux ouverts, méthodes de collocation, commande non linéaire, linéarisation entrée sortie, backstepping, observateurs non linéaires.

PUBLICATIONS

- ❑ **Didier Georges , Jean-F. Dulhoste et Gildas Besançon.** *Modelling and control of water flow dynamics via a collocation model.* MTNS2000. Perpignan, France, juin 2000.
- ❑ **Jean-F. Dulhoste, Gildas Besançon et Didier Georges.** *Non-linear Control of Water Flow Dynamics by Input-Output Linearization based on a Collocation Method Model.* European Control Conference (ECC2001), Porto, Portugal, septembre 2001.
- ❑ **Gildas Besançon, Jean-F. Dulhoste et Didier Georges.** *A Non-linear backstepping like controller for a three-point collocation model of water flow dynamics.* IEEE Conference on Control Applications, CCA2001, Mexico, septembre 2001.
- ❑ **Jean-F. Dulhoste, Didier Georges, Gildas Besançon, Jean-C. Dulhoste.** *Comparación de controladores de nivel para canales abiertos basados en un modelo por colocación.* **Accepté** au Quinto Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Cuarto Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. Mérida, Venezuela, octobre 2001.
- ❑ **Gildas Besançon, Jean-F. Dulhoste y Didier Georges.** *Nonlinear Observer Design for Water Level Control in Irrigation Canals.* **Accepté** à IEEE conference on Decision and Control, Orlando, USA, décembre 2001.
- ❑ **Jean-F. Dulhoste, Didier Georges y Gildas Besançon.** *Modelling and nonlinear control of open channel water flow dynamics.* **Proposé** à “Journal of Hydraulic Engineering, ASCE division”, en janvier 2001. Corrections en cours de réalisation.

INTRODUCTION.

L'eau est une ressource naturelle qui possède une très grande importance pour le développement d'une grande quantité d'activités propres de l'homme. Et bien que celle-ci soit si importante, sa distribution géographique et temporelle n'est pas tout à fait la meilleure. L'homme a donc depuis de nombreuses années mis en œuvre ces capacités pour faire face à ces difficultés, et pour que cette ressource puisse être mieux utilisée, ceci en construisant des systèmes hydrauliques de distribution d'eau.

Il y a trois grands groupes d'activités qui utilisent de l'eau : l'agriculture, l'industrie, et les usages domestiques. L'agriculture est l'activité qui consomme le plus grand volume [Malaterre, 1994], de là l'intérêt porté sur les systèmes de distribution d'eau à des fins d'irrigation.

Les systèmes de distribution d'eau à des fins d'irrigation possèdent diverses caractéristiques très particulières, les plus importantes sont les suivantes :

Une première caractéristique est l'aspect distribution géographique, car un réseau d'irrigation s'étend souvent sur plusieurs dizaines de kilomètres. Ceci en fait des systèmes de grande taille où les temps de réponse sont très grands. De là l'importance de prendre en compte les non-linéarités qui se présentent. Ces non-linéarités peuvent être prises en compte de deux façons différentes, la première, plus couramment utilisée, est de représenter le système comme un système linéaire avec retards, et la seconde est de représenter le système comme un système non linéaire distribué, donc à travers d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Nous avons choisi cette seconde option pour la modélisation de notre système car nous pensons que c'est celle qui représente mieux le système.

Une deuxième caractéristique est la grande hétérogénéité des systèmes rencontrés : réseaux gravitaires de canaux à surface libre comportant des réserves, raccordés à un réseau de canalisations sous pression assurant le transport et la distribution de l'eau aux usagers par l'intermédiaire de stations de pompage. Ceci fait que le système soit très complexe à analyser dans sa totalité, et c'est pour cette raison que nous avons fait le choix d'étudier une seule partie de ce système, celle correspondant aux canaux à surface libre. De plus c'est la partie plus difficile à commander, et celle qui, en général, pose le plus de problèmes de gestion. De là l'intérêt de développer un système de commande performant pour cette partie du système de distribution d'eau.

Actuellement la commande de la majorité des canaux d'irrigation est faite en opérant manuellement les ouvrages de régulation. Pour améliorer la gestion de ces systèmes il est important de pouvoir les automatiser d'une façon performante et sûre. Le but principal de cette commande est de satisfaire la consommation d'eau à chaque station de pompage. Et cela passe par maintenir un niveau d'eau adéquat, pour satisfaire cette consommation sans débordement ni diminution trop importante du

niveau, et cela dans chacune des sections et réserves constituant le système. Les avantages d'un système automatisé sont : d'abord des économies dans la construction (pour des systèmes neufs), car le besoin de réserves intermédiaires, qui sont utilisées pour compenser les variations de la consommation, diminuent, et ensuite une économie des ressources hydrauliques, donc un intérêt écologique, car l'eau non consommée peut être laissée dans son écosystème naturel.

Le développement d'un tel système de commande passe par plusieurs étapes importantes. La première est la compréhension du fonctionnement du système en général, et donc requiert une étude complète de tous ces composants. Les composants d'un canal à surface libre sont multiples : ceux-ci possèdent en général plusieurs biefs avec des géométries particulières, et des ouvrages d'interconnexion, les quels permettent la régulation du système.

Une seconde étape est la modélisation du système sous une forme simple mais suffisamment précise, et c'est peut être ici où se trouve la difficulté majeure. La modélisation de ce type de systèmes distribués peut se diviser en deux groupes, les modèles de dimension infinie et les modèles de dimension finie. Dans les modèles de dimension infinie on trouve principalement dans la littérature les auteurs qui utilisent directement des modèles non linéaires complexes [Chen,2001] [Coron et al,1999]. Le modèle utilisé ici est principalement le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, dites de Saint-Venant [Saint-Venant,1871] [Graf et Altinakar, 1993], système dont on ne connaît pas à ce jour de solution explicite (sauf dans des cas très particuliers et très restrictifs).

Dans les modèles de dimension finie on trouve dans la littérature, les auteurs qui utilisent des modèles linéaires décrits par fonctions de transfert issus de l'identification du système [Litrico,1999] [ElFawal,1999] ou de l'utilisation d'un modèle linéaire approximatif [Skertchly et Miles,1996]. Il est possible aussi de transformer les équations de Saint-Venant en des modèles de dimension finie, pour cela on doit utiliser des méthodes d'intégration numérique d'équations différentielles, les plus connues sont les méthodes de différences finies [Stelkoff,1970], et celles des éléments finis [Colley,1976]. Les solutions obtenues par ces méthodes sont en général encore trop complexes pour une utilisation directe pour la commande, donc en général ces solutions sont encore simplifiées en les linéarisant [Malaterre,1994].

Le premier groupe (modèles de dimension infinie) est en général trop complexe pour pouvoir appliquer des techniques de commandes aujourd'hui suffisamment fiables pour être utilisées dans un système réel, tandis que le second (modèles linéaires de dimension finie) a le défaut de part la simplicité des modèles de ne pas garantir une modélisation précise des phénomènes non linéaires, comme la dépendance des retards de transport en fonction des débits. Pour combler les handicaps de ces modèles, un modèle mathématique de dimension finie basé sur une méthode de collocation orthogonale avec une approximation fonctionnelle par polynômes de Lagrange est proposé dans cette thèse [Georges et al, 2000]. Cette méthode fait partie d'un autre groupe de méthodes de calcul de

solutions approchées d'équations différentielles nommé méthode des résidus pondérés [Fletcher,1984], méthode utilisée couramment pour les systèmes physiques ou chimiques [Villadsen et Michelsen,1978] [Dochain et al,1992] mais rarement utilisés à ce jour pour les systèmes hydrauliques, on peut citer cependant [Alam et Bhuiyan,1995] qui ont utilisé une méthode d'éléments finis par collocation. Le modèle obtenu par cette méthode est simple et de dimension finie mais reste non linéaire. Il garantit cependant une grande précision dans un domaine de fonctionnement suffisamment large et une simplicité d'utilisation pour la commande.

Une troisième étape dans le développement d'un système de commande pour un canal d'irrigation est de développer et appliquer des méthodes de commandes aux modèles utilisés. Le but de ce travail est de développer des lois de commande suffisamment simples et précises pour être dès maintenant utilisables sur des systèmes réels.

Plusieurs méthodes de développement de lois de commande sont envisageables ici, on peut trouver dans la littérature surtout des travaux basés sur des techniques de commande linéaire telles que le PID [Skertchly et Miles,1996], la commande linéaire quadratique [Balogun et al,1988] [Malaterre,1994] [Reddy,1996] [Litrico et Georges,1999], la commande prédictive [Sawadogo,1992]. Ce sont des méthodes appliquées à des modèles linéaires et donc valides seulement à proximité d'un point de fonctionnement. Il existe aussi des travaux basés sur des méthodes de commande non linéaire telles que la commande optimale non linéaire [Chen et Georges,1999] ou des méthodes de Lyapunov [Coron et al,1999]. La première approche encore difficilement applicable à des systèmes réels en raison de sa complexité, et la seconde approche est valide que pour des canaux horizontaux sans friction.

Dans le but de trouver des lois de commande plus faciles à appliquer et utilisables sur une plage de fonctionnement plus large, des méthodes non linéaires ont été utilisées pour obtenir une commande par retour d'état à partir du modèle par collocation. Plusieurs méthodes ont été développées dans cette thèse, à savoir la méthode de linéarisation entrée-sortie partielle [Isidori,1995], une variante dynamique de celle-ci et une méthode de Backstepping [Krstic et al,1995]. De plus en vue de pouvoir faire une commande avec le moins de mesures possibles, un observateur non linéaire [Bornard et Hammouri,1991] de débit et infiltration a été développé, de cette façon la commande a besoin seulement de la mesure des niveaux du canal. Pour la validation de tels modèles plusieurs simulateurs de bief de canaux ouverts ont été utilisés et les équations des ouvrages d'interconnexion qui ne sont pas pris en compte initialement dans le modèle ont été ajoutées à ces modèles.

Finalement quelques tentatives de commande pour plusieurs biefs interconnectés ont été réalisées. Les résultats obtenus sont pour l'instant préliminaires.

Ce rapport de thèse a pour but de résumer le travail de recherche sur ce sujet pendant les trois dernières années, et il est organisé en trois grands chapitres comme suit.

Un premier chapitre est dédié à la présentation des systèmes de distribution d'eau en général. Ce chapitre traite des sujets généraux sur les systèmes d'irrigation et les canaux à surface libre en particulier, tel que leur structure et composants, leur classification, les écoulements et modèles mathématiques qui les décrivent. Il traite aussi des ouvrages d'interconnexion de biefs, de leurs fonctions et des types d'ouvrages. C'est ici que sont introduites les notions d'automatisation d'un tel système, les objectifs sont décrits, une petite classification est proposée et un bref état de l'art des méthodes de synthèse de lois de commande est présenté. Pour conclure ce chapitre les objectifs et limites de cette thèse sont précisés.

Un deuxième chapitre est dédié à la modélisation de biefs de canaux ouverts, par un modèle de connaissance et plus précisément par les équations de Saint-Venant. Sont présentés ici plusieurs méthodes d'intégration numérique de ces équations. Les méthodes présentées sont deux méthodes de différences finies, une explicite et une autre implicite dite de Preissmann [Preissmann,1963] [Malaterre,1994], méthodes qui sont bien connues dans le domaine de l'hydraulique. La troisième méthode présentée est la méthode de collocation orthogonale, celle-ci étant l'apport principal de cette thèse sur la modélisation de ce type de systèmes. Pour conclure ce chapitre une validation du modèle obtenu par la méthode de collocation est proposée, cette validation se fait en comparant les résultats obtenus par cette méthode avec les deux autres méthodes, connues et servant de référence dans le domaine.

Un troisième chapitre est dédié à la commande de systèmes de canaux ouverts. Dans ce chapitre sont résumées les études réalisées en vue de la commande d'un système d'irrigation basée sur le modèle de collocation. Il est traité initialement le développement de la commande d'un bief par une méthode de linéarisation entrée-sortie, linéarisation entrée-sortie dynamique et par backstepping, toutes les trois étant basées sur le modèle par collocation. Il est proposé par la suite une validation des commandes en les utilisant sur des simulateurs conçus à partir des modèles de collocation et de différences finies. Cette validation est complétée par l'utilisation de ces mêmes commandes sur un modèle plus complet qui inclut les équations des ouvrages. A fin de s'affranchir de la nécessité de mesurer tous les états, un observateur de débit et infiltration a été développé. Une validation de cet observateur est présentée à son tour ainsi que la validation de la commande avec utilisation des variables observées. Pour conclure ce chapitre quelques avancées sur la commande de biefs interconnectés sont présentées.

Enfin dans une dernière partie, nous présentons les conclusions générales de ce travail ainsi que les perspectives qui se présentent pour la suite des recherches sur le sujet.

SYSTEMES DE DISTRIBUTION D'EAU

1.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est dédié à la présentation des systèmes de distribution d'eau en général. Il traite pour cela les sujets généraux sur les systèmes d'irrigation et les canaux à surface libre en particulier, en essayant de prendre en compte tous les aspects à connaître pour pouvoir développer la commande avec succès.

Parmi ces sujets, qui ont été considérés importants pour la connaissance des canaux d'irrigation, sont à citer leurs structures et composants, leur classification, les écoulements et modèles mathématiques qui les décrivent. Il est aussi important de parler des ouvrages d'interconnexion de biefs, de leurs fonctions et types d'ouvrages. C'est ici que sont introduites les notions d'automatisation d'un tel système, les objectifs sont décrits, une petite classification est proposée et un bref état de l'art des méthodes de synthèse des commandes est présenté. Et pour conclure les objectifs et limites de ce travail sont précisés ici.

Un système hydraulique de distribution d'eau à des fins d'irrigation est habituellement constitué d'un réseau gravitaire de canaux à surface libre comportant des réserves, raccordé à un réseau de canalisations sous pression assurant le transport et la distribution de l'eau aux usagers par l'intermédiaire de stations de pompage.

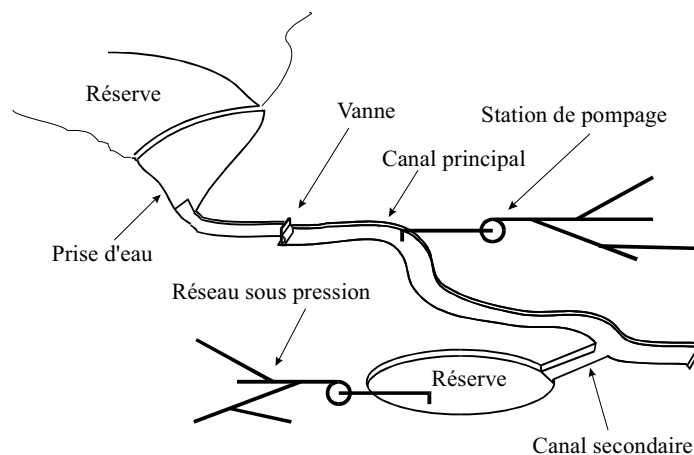


Figure 1.1. Réseau de distribution d'eau

Ces systèmes de distribution d'eau peuvent se diviser en deux sous systèmes, la partie des canaux à surface libre et la partie des réseaux sous pression.

Cependant on doit noter que les systèmes de distribution d'eau ne possèdent pas obligatoirement les deux parties, ainsi on trouvera une grande quantité d'aqueducs urbains formés seulement d'un réseau sous pression, tandis qu'il existe encore de nombreux systèmes d'irrigation constitués uniquement de

canaux à surface libre, comme c'est le cas en général des systèmes anciens. Cela peut nous conduire à parler plutôt d'une classification des systèmes de distribution d'eau.

1.1.1. Réseaux sous pression

Les réseaux sous pression sont des systèmes constitués de tuyaux fermés connectés entre eux, qui transportent l'eau sous pression depuis une source ou réserve jusqu'aux utilisateurs. L'eau se déplace d'un endroit à l'autre sous l'effet de la différence de pression qui est produite par des stations de pompage ou par l'effet de la force de gravité.

Dans de tels systèmes les variables sont la pression et la vitesse (débit) du fluide dans les tuyaux, et celles-ci dépendent de la géométrie du système, de la puissance utilisée dans le pompage et des consommations.

1.1.2. Réseau gravitaire de canaux à surface libre

Les réseaux gravitaires de canaux à surface libre sont des systèmes constitués par des canaux ouverts, qui transportent de l'eau avec la surface à pression constante, généralement à la pression atmosphérique, depuis une source ou réserve jusqu'aux utilisateurs. L'eau se déplace d'un endroit à un autre sous l'effet de la force de gravité, et par l'intermédiaire de la pente du canal, en cherchant toujours à former un plan d'eau à la partie la plus basse du canal.

Dans de tels systèmes les variables sont le niveau du canal (section) et la vitesse (débit) du fluide dans le canal, et celles-ci dépendent de la géométrie du canal, des apports d'eau depuis les sources et des consommations.

L'intérêt de ce projet sera fixé sur la partie des canaux à surface libre et pour cette raison seront traités par la suite les points importants pour les canaux à surface libre, en laissant de côté toute la partie des systèmes d'irrigation correspondant aux réseaux sous pression.

1.2. CANAUX A SURFACE LIBRE

Un canal à surface libre est un système de transport de fluide où la surface est soumise à une pression constante, en général la pression atmosphérique.

1.2.1. Classification

Il existe diverses classifications pour les canaux a surface libre, on va citer ici deux d'entre elles.

1.2.1.1. Suivant l'origine

Ils peuvent se classer en deux groupes :

- ❑ Les canaux naturels, les canaux existant dans la nature, et qui possèdent en général une géométrie très irrégulière, de même pour ses caractéristiques hydrauliques. Par exemple les ruisseaux, rivières, fleuves, etc.
- ❑ Les canaux artificiels, construits par l'homme, et qui possèdent en général une géométrie et donc des caractéristiques hydrauliques, plus régulières. Par exemple les canaux de navigation, d'irrigation, de drainage, les égouts, etc.

1.2.1.2. Suivant la structure

Ils peuvent se classer en deux groupes (Figure 1.2) :

- ❑ Les canaux découverts, construits au ras du sol, et dont la surface de l'eau est à pression atmosphérique. Par exemple les canaux de navigation, d'irrigation, de drainage, rivières, etc.
- ❑ Les canaux couverts, construits sous terre et dont la surface de l'eau est en général aussi à pression atmosphérique, mais peut sous certaines conditions être soumise à des pressions différentes. Par exemple les égouts, systèmes de drainage, rivières souterraines, etc. Dans le cas où la pression subie n'est pas la pression atmosphérique, la seule différence avec un réseau sous pression est que la section du canal n'est pas complètement pleine d'eau (ou d'un autre liquide).

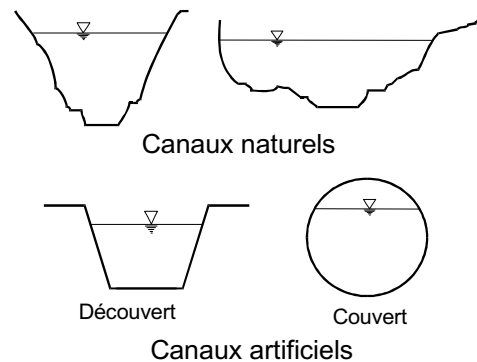


Figure 1.2. Classification des canaux

1.2.2. Géométrie d'un canal a surface libre

La géométrie d'un canal est définie par divers éléments qui peuvent être observés sur la section transversale et la section longitudinale du canal (Figure 1.3).

La section transversale est une coupe du canal, plane et normale à la direction de l'écoulement. Sur cette coupe sont définies diverses valeurs géométriques telles que la hauteur ou niveau d'eau (h), la largeur à la surface (B), la section (S) appelée aussi surface mouillée et qui correspond à la portion de section occupée par le liquide. Pour un canal de section rectangulaire la section (S) sera égale à Bh , mais cela n'est pas le cas pour des sections de forme différentes. On peut définir d'autres valeurs géométriques sur cette section transversale telles que : le périmètre mouillé (P) qui correspond à la longueur de la ligne sur la section en contact avec le liquide, le rayon hydraulique (R_h) défini par la relation S/P , la profondeur hydraulique (D_h) définie par la relation S/B .

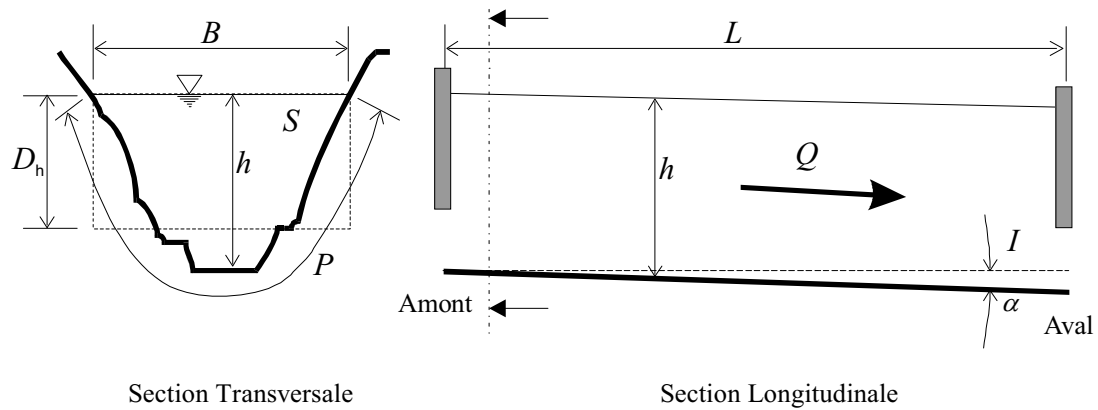


Figure 1.3. Sections d'un canal à surface libre

Pour des formes régulières de la section transversale il existe des relations entre les divers éléments géométriques, résumées pour les sections transversales les plus courantes dans le tableau 1.1. [Graf et Altinakar, 1993].

Tableau 1.1. Éléments géométriques pour différentes sections de canaux

	Rectangle	Trapèze	Triangle	Cercle	Parabole
S	Bh	$(b + mh)h$	mh^2	$\frac{1}{8}(\theta - \sin \theta)D^2$	$\frac{2}{3}Bh$
P	$B + 2h$	$b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	$2h\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{1}{2}\theta D$	$B + \frac{8}{3}h^2/B$
R_h	$\frac{Bh}{B + 2h}$	$\frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right)D$	$\frac{2B^2h}{3B^2 + 8h^2}$
D_h	h	$\frac{(b + mh)h}{b + 2mh}$	$\frac{1}{2}h$	$\left(\frac{\theta - \sin \theta}{\sin \theta/2}\right)\frac{D}{8}$	$\frac{2}{3}Bh$

Pour la parabole les valeurs indiquées sur la table sont valables sous la condition $0 < 4h/B \leq 1$, et si $4h/B > 1$ on peut définir le périmètre mouillé de la façon suivante :

$$P = (B/2) \left(\sqrt{1 + (4h/B)^2} + (1/(4h/B)) \ln \left((4h/B) + \sqrt{1 + (4h/B)^2} \right) \right) \quad (1.1)$$

La section longitudinale est une coupe plane, verticale et parallèle au sens de l'écoulement, sur cette section sont définies d'autres valeurs géométriques telles que la longueur du bief (L) et la pente du fond (I), la dernière étant en général exprimée en fonction de l'angle (α) que forme le fond avec l'horizontale : $I = \tan \alpha \cong \sin \alpha$, l'angle (α) étant en général petit. Cependant il est plus usuel

d'utiliser la valeur de l'angle en pourcentage, en remarquant que cela est aussi valide car pour des angles inférieurs à 10° ($\approx 10\%$) la valeur angulaire en degrés est approximativement la valeur en pourcentage. Quand la section transversale d'un canal ne varie pas sur la longueur, le canal prend le nom de "*canal prismatique*".

Un dernier élément qui définit la géométrie d'un canal est la rugosité. Cet élément dépend du matériel et de la forme comme est construit le canal, et a une influence importante sur les forces de friction qui se génèrent dans le mouvement du fluide.

La valeur de la rugosité est définie pour chaque type de matériaux de construction et de géométrie d'une façon expérimentale et a donné lieu à divers coefficients selon la modélisation de la friction correspondante. Les coefficients les plus connus pour les systèmes à surface libre sont les coefficients de Manning (n), de Strickler (K) et de Kutter (m_k) [Graf et Altinakar, 1993], mais il existe aussi d'autres coefficients, tels que le coefficient de Chézy (C) ou le coefficient de frottement de l'équation de Weisbach-Darcy (f); ce dernier étant utilisé plutôt pour des tuyaux circulaires à pression [Fox et McDonald, 1984] et obtenu par le diagramme de Moody-Stanton ou par l'équation de Colebrook et White pour les écoulements turbulents. Le tableau 1.2. [Graf et Altinakar, 1993] présente les valeurs de coefficients de Strickler et de Kutter pour divers types de canaux à surface libre, sachant que le coefficient de Manning est l'inverse du coefficient de Strickler ($n = 1/K$), et que le coefficient de Chézy peut être calculé à partir de la formule de Bazin ou de Kutter :

$$C = \frac{100}{1 + \left(m_k / \sqrt{R_h}\right)} \quad (1.2)$$

Tableau 1.2. Coefficient de Strickler et de Kutter

Matériel (Plus rugueux, Moins rugueux)	Coefficient de Strickler ($m^{1/3} s^{-1}$)		Coefficient de Kutter ($m^{1/2}$)	
	Plus rugueux	Moins rugueux	Plus rugueux	Moins rugueux
Canaux naturels (galets, gravier)	20	45	4	1.25
Canaux en terre	30	52	2.25	0.95
(Pierre brute, maçonnerie)	38	80	1.7	0.25
Béton (rugueux, lisse)	50	96	1	0.04
Acier (rivé, soudé)	62	100	0.62	0
Bois (non dressé, dressé)	65	96	0.55	0.04
Fonte (vieille, neuve)	64	88	0.60	0.14
Asbeste (variété d'amiante)	90	93	0.12	0.08
Verre, PVC	96	100	0.04	0

1.2.3. Écoulement dans les canaux à surface libre

Tableau 1.3. Types et régimes d'écoulement pour un canal à surface libre

Types d'écoulement			Régimes d'écoulement	
Variabilité dans le temps	Variabilité dans l'espace		Suivant N° Reynolds	Suivant N° Froude
	Type de variation	Qualité de la variation		
Permanent (Non variable)	Uniforme (Non variable)		Laminaire $Re < 2000$	Fluvial $Fr < 1$
	Non uniforme ou varié (Variable)	Graduelle		
		Rapide	Transition $2000 < Re < 8000$	Critique $Fr = 1$
Non permanent ou transitoire (Variable)	Uniforme (Non variable) (Rare)			
	Non uniforme (Variable)	Graduelle	Turbulent $Re > 8000$	Torrentiel $Fr > 1$
		Rapide		

Il existe divers types d'écoulement qui peuvent se produire dans un canal à surface libre, il est donc possible de faire divers types de classification, les plus courantes étant résumées dans le tableau 1.3 [Graf et Altinakar, 1993]. Les notions de *variabilité* dans le temps et dans l'espace, comme les *régimes* d'écoulement sont précisés dans les paragraphes qui suivent. Il est à noter que les divers régimes d'écoulement peuvent se produire sur n'importe quel type d'écoulement, et que dans la nature les écoulements sont, sauf quelques exceptions, de type turbulent.

1.2.3.1. Variabilité de l'écoulement dans le temps

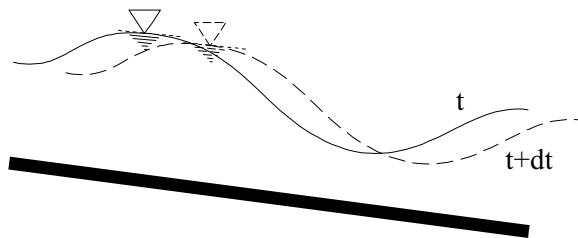


Figure 1.4. Écoulement non permanent

L'écoulement dans un canal varie en général dans le temps (Figure 1.4), néanmoins il existe des conditions où la variation temporelle est lente dans le temps ou très petite dans l'espace (par exemple pour des vagues de taille négligeable) ou cette variation peut être aussi négligeable, dans ce cas l'écoulement est considéré comme permanent.

Plus spécifiquement l'écoulement est considéré comme permanent quand les variations de la vitesse moyenne U , de la vitesse ponctuelle u , et de la profondeur h sont négligeables en temps et en

espace (pour une caractérisation stricte théorique du régime permanent, ces variables sont constantes). Dans ce cas le débit est constant dans le temps. En général les expressions pour un régime permanent sont utilisées pour le calcul des dimensions de canal nécessaires pour écouler une certaine quantité de fluide.

Dans le cas contraire, s'il existe une variation non négligeable d'une des variables indiquées, les expressions pour un régime transitoire doivent être utilisées. C'est bien entendu le cas pour la commande, car il est question de gérer des variations de débit et niveau.

1.2.3.2. Variabilité de l'écoulement dans l'espace

De même que dans le cas de la variabilité dans le temps, l'écoulement dans un canal varie généralement dans l'espace, c'est-à-dire que la profondeur d'eau h n'est pas la même dans toutes les sections du canal, principalement en raison de la variation géométrique d'une section à une autre (Figure 1.5). Mais il est de même possible de considérer ces variations comme négligeables dans certaines conditions.

Plus précisément l'écoulement est considéré comme uniforme si la variation de la profondeur h est négligeable d'une section à une autre du canal. Pour une caractérisation théorique stricte, il s'agit du cas où la pente du fond ne varie pas, et que la surface libre du fluide est parallèle au fond du canal.

Dans le cas contraire si la variation de la profondeur h n'est pas négligeable l'écoulement est non permanent ou varié, et dans ce cas la surface libre du fluide n'est pas parallèle au fond du canal.

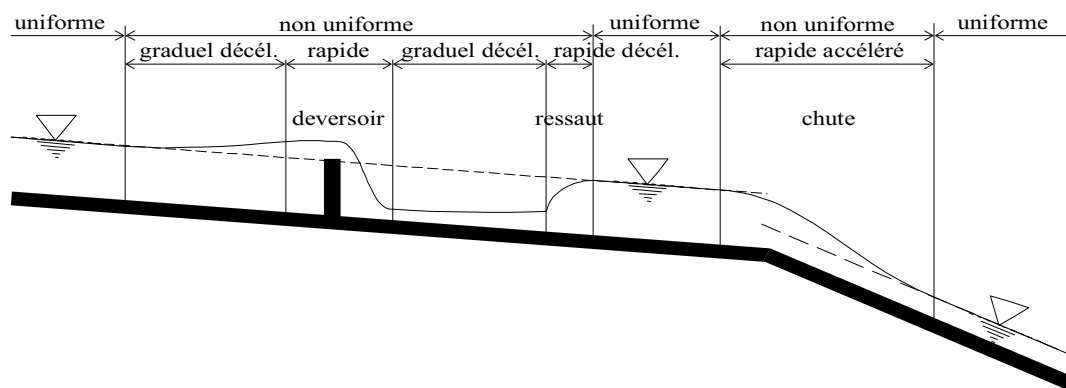


Figure 1.5. Ecoulements permanents

Pour un écoulement non uniforme, lorsque la variation d'une section à l'autre est petite l'écoulement est dit graduellement varié, et dans ce cas il est possible de considérer que l'écoulement est quasi uniforme dans un petit tronçon de canal. Quand la variation de la profondeur est rapide, ce qui se produit en général au voisinage d'une discontinuité (déversoir, changement brusque de pente), l'écoulement est rapidement varié.

1.2.3.3. Régimes d'écoulement

Le régime d'écoulement dans un canal à surface libre dépend des forces mises en œuvre dans le mouvement du fluide. Ces forces sont :

- Une force qui engendre le mouvement : la force de gravité.
- Deux forces qui s'opposent au mouvement : les forces d'inertie et de frottement.

La classification du régime d'écoulement se produit suivant la valeur obtenue pour deux nombres adimensionnels, qui font le rapport entre les forces engendrées dans le mouvement d'un fluide :

- Le Nombre de Froude, qui est un rapport entre les forces de gravité et les forces d'inertie. Il s'écrit en général pour un canal à surface libre comme :

$$Fr = \sqrt{\frac{\rho U^2 / D_h}{\rho g}} = \frac{U}{\sqrt{g D_h}} \quad (1.3)$$

La valeur du nombre de Froude permet de faire une classification du régime d'écoulement en faisant le ratio entre la vitesse d'écoulement et un indicatif de la section du canal, car pour un même canal il est possible d'obtenir un même débit avec deux vitesses différentes, selon que le régime est torrentiel ou fluvial, sauf dans le cas critique où les valeurs se rejoignent. La classification est la suivante :

- Ecoulement fluvial pour $Fr < 1$, petite vitesse et grande section pour un débit Q .
 - Ecoulement critique pour $Fr = 1$, une seule vitesse et section possible pour un débit Q .
 - Ecoulement torrentiel pour $Fr > 1$, grande vitesse et petite section pour un débit Q .
- Le nombre de Reynolds, qui est un rapport entre les forces de frottement et les forces d'inertie. Il s'écrit en général pour un canal à surface libre comme :

$$Re = \frac{\rho U / 4R_h}{\mu \left(U / (4R_h)^2 \right)} = \frac{\rho 4R_h U}{\mu} = \frac{4R_h U}{\nu} \quad (1.4)$$

Avec: μ = viscosité dynamique et ν = viscosité cinématique.

Le nombre de Reynolds permet de faire une classification du régime d'écoulement en faisant un ratio entre les deux forces s'opposant au mouvement du fluide, l'inertie et le frottement. La classification est la suivante:

- Ecoulement laminaire pour $Re < 2000$, très rare dans des cas réels.
- Régime de transition pour $2000 < Re < 8000$.
- Ecoulement turbulent pour $Re > 8000$.

1.2.4. Modèles mathématiques

Pour la commande de canaux ouverts il est nécessaire d'avoir un modèle mathématique pour un écoulement unidimensionnel non permanent, graduellement varié. Il existe plusieurs possibilités pour obtenir un modèle sous ces conditions, et deux classifications sont ici possibles : Une première classification suivant la méthode d'obtention du modèle, on parle ici de modèle de représentation ou de modèle de connaissance. Et la deuxième classification suivant le type de représentation spatiale du modèle, on parle ici de modèle de dimension infinie ou de modèle de dimension finie.

1.2.4.1. Classification suivant la méthode d'obtention

Modèle de représentation

Un modèle de représentation (boîte noire) est un modèle du système obtenu par identification du processus à contrôler. Un modèle de ce type possède l'avantage d'être simple, donc il est en général facile à utiliser pour la commande. Par contre les paramètres utilisés n'ont pas de sens physique, son domaine d'application est en général restreint à des systèmes dont la dynamique peut être approchée par des modèles simples, et la précision est souvent limitée, ce qui est le cas pour les systèmes de canaux ouverts.

Il existe plusieurs travaux de commande de canaux d'irrigations basés sur des modèles de représentation on trouve par exemple : Les travaux de [Beaume,1990] où un modèle de représentation pour un canal est obtenu à partir de l'identification de fonctions de transfert entrées-sorties du système prises en forme découplé, et basées sur une forme canonique de l'espace d'état. Ce modèle a été utilisé à la suite par [Kosuth,1994] pour la commande optimale de canaux. On peut citer aussi les travaux de [ElFawal et Georges,1997] où est réalisée une modélisation mixte basée sur une identification récursive des dynamiques du bief par filtre de Kalman, avec un modèle polynomial de type ARX, joint à des modèles de connaissance sur les autres éléments du canal. Tout cela pour la modélisation du canal de la Bourne. Par la suite [ElFawal,1999] a développé des modèles de représentation polynomiaux de type ARX et ARMAX, pour ce même canal de la Bourne, par identification avec une méthode de minimisation d'erreur de prédiction, une méthode de variables instrumentales, une méthode récursive de filtre de Kalman et une méthode de sous-espaces. Il est aussi développé sur ce travail un modèle de représentation non linéaire de type NARX. Un autre travail à citer est celui de [Litrico,1999] où il est proposé un modèle de représentation non linéaire pour un système barrage-rivière, en utilisant une méthode d'identification par minimisation de l'erreur de sortie, inspirée des méthodes d'optimisation par relaxation.

Modèle de connaissance

Un modèle de connaissance est un modèle obtenu à partir des lois physiques du système. Il possède l'avantage que ses paramètres ont un sens physique, donc présente des informations riches et un

domaine de validité en général large. Par contre ces modèles sont en général très complexes, donc d'utilisation difficile. De fait ces modèles sont en pratique simplifiés en posant certaines restrictions de fonctionnement, ce qui leur fait perdre une partie du domaine d'application et, dans la plupart des cas, une partie de leur précision.

Le modèle de connaissance est, pour les canaux ouverts en régime non permanent, celui des équations de Barré de Saint-Venant [Saint-Venant, 1871]. Ce sont des équations aux dérivées partielles, hyperboliques, non linéaires, du premier ordre. Il existe une multitude de travaux sur le sujet dont la principale différence est la méthode utilisée pour résoudre ces équations et les variables choisies. On peut citer ici quelques ouvrages qui présentent des versions légèrement différentes des équations de Saint-Venant ainsi que les méthodes classiques de résolution [Cunge et al. 1980] [Graf et Altinakar 1996]. Quelques modèles développés à partir de solutions de ces équations sont présentés dans [Strelkoff 1970] avec un modèle numérique obtenu par différences finies, [Keuning 1976] et [Colley et Moin 1976] avec des modèles obtenus par des méthodes d'élément finis, [Katapodes 1984] qui utilise un schéma dissipatif de Galerkin, [Alam et Bhuiyan 1995] qui utilisent une méthode de collocation par éléments finis et enfin [Baume et Malaterre 1997] qui utilisent un schéma de différences finis implicite de Preissmann pour développer un modèle par représentation d'état linéaire.

Il est possible aussi de construire des modèles approximatifs du système, ce qui peut être fait par analogie avec un autre système comme l'équation de Burger par exemple [Onizuka et Nii Odai, 1998] ou d'autres méthodes courantes en automatique telles que la transformée de Laplace [Schuurmans, 1997a] ou les réseaux de Petri [Corriga et al, 1997].

1.2.4.2. Classification suivant le type de représentation spatiale

Modèle de dimension infinie

Un modèle de dimension infinie est un modèle qui représente le système d'une façon continue sur toute sa dimension spatiale, la longueur dans le cas d'un canal d'irrigation. Le modèle prend en général la forme d'équations aux dérivées partielles, comme par exemple les équations de Saint-Venant. De fait les équations de Saint-Venant ont déjà fait l'objet d'approches en dimension infinie pour la commande [Coron, 1999] [Chen, 2001].

Modèle de dimension finie

Un modèle de dimension finie est un modèle qui représente le système de façon discrète sur la dimension spatiale, la longueur pour un canal d'irrigation. En d'autres termes, il représente les variables du canal en des points précis, répartis sur toute sa longueur. Les modèles de dimension finie sont en général des transformations des équations de Saint-Venant à l'aide de méthodes numériques telles que les différences finies, les éléments finis ou les résidus pondérés, quelques exemples de modèles de dimension finie issus de ces méthodes ont été cités au paragraphe sur les modèles de

connaissance. Sur l'utilisation de modèles de dimension finie pour la commande la méthode la plus couramment utilisée et celle des différences finies tant dans sa version explicite, ou on peut citer [Balogun et Hubbard,1988] [Reddy,1996], que dans sa version implicite avec l'utilisation du schéma de Preissmann [Khaladi,1992] [Malaterre,1994].

1.3. EQUATIONS DE BARRE DE SAINT-VENANT

Le modèle choisi dans ce travail est le modèle de connaissance du système à partir des équations de Barré de Saint-Venant [Saint-Venant,1871]. La formulation de ces équations vient de l'application de deux lois de la mécanique des fluides :

- La conservation de la masse, couramment appelée équation de continuité.
- La conservation de la quantité de mouvement, couramment appelée équation dynamique.

Ces équations sont obtenues sous les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est mono dimensionnel.
- La pente du canal est faible.
- La densité de l'eau (ρ) est considérée constante.
- La répartition de pression est hydrostatique.
- Les effets de la viscosité interne sont négligeables par rapport aux frottements externes.

Il existe plusieurs formulations possibles des équations de Saint-Venant suivant les variables choisies, et termes pris en compte. Les plus représentatives sont celles en vitesse et en débit présentées ci-après.

1.3.1. Formulation en vitesse

La formulation en vitesse comme son nom l'indique, est une formulation qui prend en compte la vitesse et la section comme variables principales. Dans ce cas les équations sont :

Equation de continuité :

$$S(x,t) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + U(x,t) \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + B \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

Equation dynamique :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{U(x,t)}{g} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} - J(U(x,t), S(x,t)) \quad (1.6)$$

Avec :

t : variable du temps.

x : variable d'espace dans le sens de l'écoulement.

S : section transversale

J : Terme d'introduction des forces de frottement (sera traité en détail postérieurement)

z : cote absolue de la surface.

h : niveau d'eau au fond du canal, ou tirant d'eau (voir Figure 1.3).

g : accélération de gravité.

U : vitesse d'écoulement.

$B = \frac{\partial S}{\partial h}$: Largeur du canal

Ces équations peuvent se simplifier, pour modéliser une partie ou condition particulière d'écoulement. Ainsi il est possible de schématiser sur l'équation dynamique [Graf et Altinakar, 1996], différents cas :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} - J \quad (1.7)$$

Onde cinématique

Onde diffusive

Onde dynamique quasi permanente

Onde dynamique

Onde simple

1.3.2. Formulation en débit

La formulation en débit comme son nom l'indique, est une formulation qui prend en compte le débit et la section comme variables principales. Dans ce cas les équations sont :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Equation dynamique :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial (Q^2(x,t)/S(x,t))}{\partial x} + S(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + S(x,t) \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = -S(x,t) J(Q(x,t), S(x,t)) \quad (1.9)$$

Avec :

Q : Débit

Il est possible d'ajouter à ces équations un terme qui prend en compte l'infiltration (q) [Malaterre,1994] et de n'utiliser que des éléments de niveaux relatifs au fond du canal. Dans ce cas les équation peuvent s'écrire comme :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = q(t) \quad (1.10)$$

Equation dynamique :

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (Q^2(x,t)/S(x,t))}{\partial x} + gS(x,t) \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} - I + J(Q(x,t), S(x,t)) \right) = k_q q(t) V(x,t) \quad (1.11)$$

Car :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z_{fond}}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - I \quad (1.12)$$

Avec :

q : débit latéral par unité de longueur ($q > 0$ pour apports, $q < 0$ pour pertes)

V : vitesse de l'écoulement. $V = \frac{Q}{S}$

$k_q = 0$ si $q > 0$, et $K_q = 1$ si $q < 0$. Il est supposé ainsi que les apports sont perpendiculaires au sens de l'écoulement et n'apportent pas de quantité de mouvement (pluie par exemple), et que les pertes sont parallèles au sens de l'écoulement et diminuent la quantité de mouvement (infiltration et évaporation par exemple).

I : Pente de fond du canal (dont le signe (-) dans l'équation indique le fait que la pente est négative, c'est à dire que par la suite I est positif quand le canal descend).

D'autre part, et vu que la plupart des canaux d'irrigation sont prismatiques, il est aussi possible de simplifier ces équations en spécifiant la section transversale du canal, si celle-ci est régulière. Ainsi par exemple pour un canal rectangulaire les équations de Saint-Venant peuvent s'écrire :

Equation de continuité :

$$B \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = q(t) \quad (1.13)$$

Equation dynamique :

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial (Q^2(x,t)/h(x,t))}{\partial x} + gBh(x,t) \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} - I + J(Q(x,t), h(x,t)) \right) = k_q q(t) V(x,t) \quad (1.14)$$

1.3.3. Terme de frottement

Le terme de frottement J peut être évalué de diverses façons :

- Equation de Weisbach-Darcy, très utilisée pour des sections circulaires :

$$J = f \frac{1}{4R_h} \frac{U^2}{2g} \quad (1.15)$$

Avec f coefficient de frottement, qui dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative. Il peut être obtenu avec le diagramme de Moody-Stanton ou, pour les écoulements turbulents, par l'équation de Colebrook et White [Graf et Altinakar, 1993].

- Equation de Chézy :

$$J = \frac{8g}{C^2} \frac{1}{4R_h} \frac{U^2}{2g} \quad (1.16)$$

Avec C coefficient de Chézy qui peut être calculé avec les formules de Bazin ou celle de Kutter :

$$C = \frac{100}{1 + \left(m_k / \sqrt{R_h} \right)} \quad (1.17)$$

Le coefficient de Kutter m_k dépend de la rugosité des parois, et donc du matériel (voir Tableau 1.2).

- Equation de Manning-Strickler :

$$J = \frac{|U|U}{R_h^{4/3}} n^2 \quad (1.18)$$

Avec n coefficient de Manning ($n = 1/k$, k coefficient de Strickler), le coefficient de Manning dépend de la rugosité des parois (voir Tableau 1.2).

Cette équation peut s'écrire aussi, pour une formulation en débit, comme :

$$J = \frac{Q^2 n^2}{S^2 R^{4/3}} \quad (1.19)$$

Ou en utilisant le coefficient de Strickler comme :

$$J = \frac{Q|Q|}{k^2 S^2 (S/P)^{4/3}} \quad (1.20)$$

Enfin elle peut s'écrire en utilisant la débitance du canal (K) comme suit :

$$J = \frac{|U|U}{K^2} \quad (1.21)$$

Avec : $K = kR_h^{2/3} S$

1.3.4. Conditions aux limites et conditions initiales

A ces équations il faut ajouter les conditions limites et conditions initiales. Les conditions limites expriment les profils temporaires des variables aux valeurs extrêmes des coordonnées spatiales, et les conditions initiales expriment leurs profils spatiaux à l'instant initial.

Pour les équations de Saint-Venant, et dans des conditions physiques réelles, il existe plusieurs possibilités pour les conditions limites, notamment selon le régime :

Pour un canal à pente faible (régime fluvial) on doit utiliser une condition limite à l'aval et une condition limite à l'amont, et donc quatre possibilités se présentent :

$$\begin{aligned} Q(x=0,t) = Q_1(t) \quad \text{ou} \quad Q(x=0,t) = Q_1(t) \quad \text{ou} \quad h(x=0,t) = h_1(t) \\ Q(x=L,t) = Q_n(t) \quad \text{ou} \quad h(x=L,t) = h_n(t) \quad \text{ou} \quad Q(x=L,t) = Q_n(t) \quad \text{ou} \\ h(x=0,t) = h_1(t) \\ h(x=L,t) = h_n(t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pour un canal à forte pente (régime torrentiel) on doit utiliser deux conditions limites à l'amont, car la condition aval ne peut pas se transmettre dans le canal vers l'amont, dans ce cas la seule possibilité est:

$$\begin{aligned} Q(x=0,t) = Q_1(t) \\ h(x=0,t) = h_1(t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Pour les conditions initiales, on pose :

$$\begin{aligned} h(x,0) = h(0) \\ Q(x,0) = Q(0) \quad \forall x \in [0, L] \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.3.5. Prises Latérales

Les canaux d'irrigation sont souvent sujet à des prises d'eau latérales (Figure 1.6) aussi appelées conditions limites internes, ce qui permet la distribution de l'eau aux utilisateurs.

Pour modéliser ces prises il faut ajouter une condition limite interne, et séparer ainsi le système d'équations en deux parties. Dans ce cas au point où il se produit la prise on ajoute les équations suivantes pour connecter les deux parties :

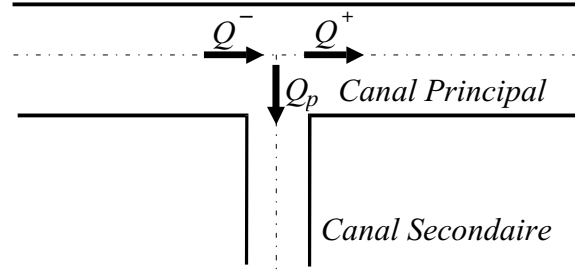


Figure 1.6. Prise d'eau latérale

$$\begin{aligned} Q^- + Q_p &= Q^+ \\ h^- &= h^+ \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.3.6. Equations de Saint-Venant à l'équilibre

Les conditions d'équilibre sont obtenues en posant dans les équations de Saint-Venant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Les points d'équilibre en hauteur et en débit sont solutions des équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} &= q \\ -\frac{Q_e(x)^2}{Bh_e(x)^2} \frac{\partial h_e(x)}{\partial x} + gBh_e(x) \left(\frac{\partial h_e(x)}{\partial x} - I + J_e(Q_e(x), h_e(x)) \right) &= (k_q - 2)q \frac{Q_e(x)}{Bh_e(x)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Une infinité de possibilités d'équilibre se présentent donc ici, et quelques cas particuliers sont intéressants. Si l'infiltration est nulle, on obtient les conditions d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{Q_e(x)^2}{Bh_e(x)^2} \frac{\partial h_e(x)}{\partial x} + gBh_e(x) \left(\frac{\partial h_e(x)}{\partial x} - I + J_e(Q_e(x), h_e(x)) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si de plus l'écoulement est uniforme (ou le tirant d'eau est constant) alors :

$$\frac{\partial h_e(x)}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

Et dans ce cas l'équilibre se fait pour un débit d'équilibre constant Q_e tel que :

$$J_e(Q_e, h_e) = I \quad (1.30)$$

On notera qu'il n'est pas possible d'avoir un équilibre avec un écoulement uniforme et une infiltration non nulle, en effet dans ce cas les équations de Saint-Venant deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} &= q \\ gBh_e(J_e(Q_e(x), h_e) - I) &= (k_q - 2)q \frac{Q_e(x)}{Bh_e} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Or ceci est une situation impossible, car la première équation indique que la variation du débit est constante égale à q , tandis que la deuxième ne peut être vérifiée que pour un débit constant, donc une variation du débit nulle.

1.4. OUVRAGES

Les ouvrages sont les éléments des canaux à surface libre qui permettent la connexion entre deux canaux, ou entre un canal et un autre élément du système de distribution tel qu'une prise d'eau, une réserve ou une connexion avec un réseau sous pression.

Ces ouvrages présentent certaines caractéristiques qui peuvent être traduites par les équations d'ouvrage, qui expriment mathématiquement la relation entre l'état d'un certain ouvrage et le débit qui le traverse, et par des conditions de fonctionnement de ces ouvrages qui traduisent la façon dont un ouvrage peut passer d'un état à un autre.

1.4.1. Equation des ouvrages d'interconnexion de biefs

Il existe plusieurs types d'ouvrages qui permettent l'interconnexion de biefs et la différence entre eux va dépendre des caractéristiques géométriques et des conditions d'écoulement. On peut néanmoins représenter la plupart de ces ouvrages par la Figure 1.7.

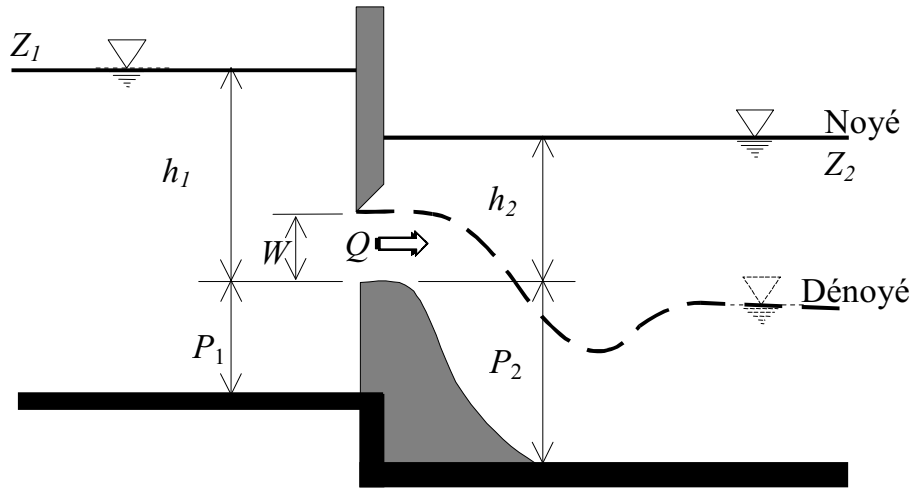


Figure 1.7. Schéma d'ouvrage transversal de canal

Les ouvrages peuvent se classer suivant les valeurs géométriques indiquées sur la Figure 1.7, et dans chaque cas l'équation de l'ouvrage est différente. Ceci fait que suivant les conditions d'écoulement un ouvrage peut passer d'un type à un autre, et qu'il est difficile d'assurer la continuité entre une condition de régime et une autre. Il existe pour cela plusieurs formulations mathématiques des ouvrages et la formulation retenue ici est celle de la note théorique du logiciel SIC [Beaume et Malaterre, 1997]. Celle-ci présente la particularité de bien garantir le passage d'un état de fonctionnement à un autre de la vanne, sans perte de continuité.

Une classification suivant la note théorique du logiciel SIC, accompagnée des équations d'ouvrage correspondantes est présentée ci-après.

1.4.1.1. Déversoir et Vanne de fond

On parle d'ouvrage de type "déversoir ou vanne de fond" quand la *pelle* (variable P dans la Figure 1.7) est faible : $P_1 \approx P_2 \approx 0$. Dans ce cas l'équation d'ouvrage peut s'écrire comme il suit :

$$Q = B\sqrt{2g} \left(k_a h_1^{3/2} - k_b (h_1 - W)^{3/2} \right) \quad (1.32)$$

Avec :

$$k_a = k_F \mu; \quad k_b = k_{F1} \mu_1 \quad (1.33)$$

On distingue entre déversoir et vanne de fond selon le rapport entre l'ouverture (W) de la vanne et la hauteur amont (h_1) (voir Figure 1.7)

□ Pour $h_1 \leq W$: **Déversoir.**

$$\mu = 0.32; \quad k_b = 0$$

$$\alpha = 0.75$$

Et le k_F dépend du régime (noyé/dénoué), selon la valeur de h_2/h_1 par rapport à α :

- Régime dénoyé si $h_2/h_1 \leq \alpha$:

$$k_F = 1$$

- Régime noyé si $h_2/h_1 > \alpha$:

k_F est un coefficient de réduction de débit noyé, sa valeur a été ajustée expérimentalement comme il suit :

$$\begin{aligned} x > 0.2 &\Rightarrow k_F = 1 - \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^\beta \\ x \leq 0.2 &\Rightarrow k_F = 5x \left(1 - \left(1 - \frac{0.2}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^\beta\right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Avec :

$$x = \sqrt{1 - \frac{h_2}{h_1}} \quad (1.35)$$

$$\beta = -2\alpha + 2.6 \quad (1.36)$$

- Pour $h_1 \geq W$: **Vanne de fond.**

Le passage noyé/dénoué se fait dans ce cas suivant les valeurs de :

$$\alpha = 1 - 0.14 \frac{h_2}{W} \quad (1.37)$$

- Régime dénoyé (si $(h_2/h_1) \geq \alpha$)

$$k_F = k_{F1} = 1$$

Avec les coefficients de débit :

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 - \left(\frac{0.08}{h_1/W}\right) & \mu_0 &\approx 0.4 \\ \mu_1 &= \mu_0 - \left(\frac{0.08}{(h_1/W) - 1}\right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

- Régime partiellement noyé (si $\alpha \leq 0.75$)

$$k_{F1} = 1 \quad (1.39)$$

Avec k_F calculé comme pour un déversoir de pelle faible.

- Régime totalement noyé (si $h_2 > \alpha_1 h_1 + (1 - \alpha_1)W$)

$$\alpha_1 = 1 - 0.14 \frac{h_2 - W}{W} \quad (1.40)$$

La formulation de k_{F1} est la même que pour k_F en remplaçant h_2 par $h_2 - W$ et h_1 par $h_1 - W$ pour le calcul de x et α .

1.4.1.2. Déversoir et Orifice

On parle de "déversoir ou orifice" quand la pelle est importante: $P_1 \gg 0$ ou $P_2 \gg 0$. Dans ce cas l'équation d'ouvrage dépend du type déversoir ou orifice selon le rapport de h_1 à W :

- Pour $h_1 < W$: **Déversoir.**

Dans ce cas l'équation diffère selon le régime comme suit :

- Régime dénoyé (si $h_2 \leq 2/3 h_1$)

$$Q = \mu_F B \sqrt{2g} h_1^{3/2} \quad (1.41)$$

Avec : $\mu_F = 0.4$ Coefficient de débit pour une formulation classique de déversoir dénoyé.

B = largeur de l'ouvrage.

- Régime noyé (si $h_2 \geq 2/3 h_1$)

$$Q = \mu_S B \sqrt{2g} (h_1 - h_2)^{1/2} h_2 \quad (1.42)$$

Avec $\mu_S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mu_F$ Coefficient de débit pour une formulation classique de déversoir noyé.

- Pour $h_1 \geq W$: **Orifice.**

Dans ce cas on distingue trois types de régimes :

- Régime dénoyé (si $h_2 \leq 2/3 h_1$)

$$Q = \mu B \sqrt{2g} (h_1^{3/2} - (h_1 - W)^{3/2}) \quad (1.43)$$

Avec $\mu = \mu_F$ Coefficient de débit.

Cette formulation s'applique bien aux orifices rectangulaires de grande largeur.

- Régime partiellement noyé (si $2/3 h_1 < h_2 < 2/3 h_1 + W/3$)

$$Q = \mu_F B \sqrt{2g} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} ((h_1 - h_2)^{1/2} h_2) - (h_1 - W)^{3/2} \right] \quad (1.44)$$

- Régime totalement noyé (si $h_2 > 2/3 h_1 + W/3$)

$$Q = \mu' B \sqrt{2g} (h_1 - h_2)^{1/2} W \quad (1.45)$$

Avec $\mu' = \mu_S$ Coefficient de débit pour une formulation classique d'orifices noyé.

1.4.1.3. Surverse.

Ici on modélise une condition particulière de fonctionnement d'une vanne, correspondant au cas où le niveau d'eau amont est supérieur à la hauteur de la vanne, et donc il existe un débit par-dessus de la vanne. Ce débit Q_S doit être ajouté à l'équation de la vanne.

- Régime dénoyé (si $h_2 \leq 2/3 h_1$)

$$Q_S = \mu_F B \sqrt{2g} (h_1 - W - h_s)^{3/2} \quad (1.46)$$

Avec h_s la hauteur de la vanne et

$\mu_F = 0.4$ Coefficient de débit pour une formulation classique de déversoir dénoyé.

- Régime noyé (si $h_2 \geq 2/3 h_1$)

$$Q_S = \mu_S B \sqrt{2g} (h_1 - h_2)^{1/2} (h_2 - W - h_s) \quad (1.47)$$

Avec $\mu_S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mu_F$ Coefficient de débit pour une formulation classique de déversoir noyé.

Dans la plupart des cas d'études théoriques, la formulation retenue est une formulation simplifiée correspondant à un orifice totalement noyé. Pour une étude complète, il faudrait considérer la formulation correspondante à chaque condition de fonctionnement. Dans ce travail la formulation complète sera retenue pour la construction du simulateur pour être le plus proche possible de la réalité.

1.4.2. Conditions de fonctionnement des ouvrages d'interconnexion de biefs

Les autres caractéristiques à prendre en compte pour les ouvrages sont les conditions de fonctionnement des vannes, en effet l'ouverture et la fermeture de celles-ci sont sujettes à des caractéristiques physiques bien connues, et trois contraintes sont ainsi considérées ici :

- La première sur les valeurs maximale et minimale d'ouverture, qui dépend des dimensions de l'ouvrage : la vanne s'ouvrira au plus selon sa taille maximale, et au moins d'une valeur nulle.

$$0 \leq W < W_{\max} \quad (1.48)$$

- La deuxième condition porte sur la vitesse d'ouverture de la vanne, qui dépend de la vitesse du moteur qui l'actionne. Donc il existe une vitesse maximale au-delà de laquelle la vanne ne peut pas se déplacer.

$$-\omega_{\max} \leq \frac{dW}{dt} \leq \omega_{\max} \quad (1.49)$$

Avec ω_{\max} fonction de la vitesse maximale du moteur.

- La troisième condition porte sur la dynamique du moteur qui actionne les vannes, dont l'effet sur l'ouverture de la vanne peut être approché par un second ordre :

$$\ddot{W} + \frac{2}{\tau} \dot{W} + \frac{1}{\tau^2} W = \frac{1}{\tau^2} W_d \quad (1.50)$$

Avec τ = constante de temps de la réponse du moteur et W_d = l'ouverture désirée de la vanne.

Soit, sous forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_W = Ax_W + Bu_W \\ y_W = Cx_W \end{cases} \quad (1.51)$$

Avec :

$$x_{W1} = y_W = W; \quad x_{W2} = \frac{dW}{dt}; \quad u_W = W_d \quad (1.52)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2}{\tau} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau^2} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

Il est clair que la dynamique du moteur est bien plus compliquée que cela, elle est de plus non linéaire, mais ce modèle est bien suffisant pour notre étude. Cette dynamique étant beaucoup plus

rapide que celle de la partie hydraulique, elle pourrait d'ailleurs être négligée dans notre étude sans grandes conséquences.

Les équations présentées sont aussi valables pour la connexion des biefs aux prises d'eau telles que barrages et réserves.

1.4.3. Ouvrages pour prises latérales.

Les prises latérales sont les éléments qui permettent que les utilisateurs puissent prélever un débit sur le bief. Il existe principalement deux formes de prélèvement :

1.4.3.1. Prise latérale par canal secondaire.

Dans ce cas la prise correspond à la Figure 1.8, et l'équation de cette prise est similaire à celle des vannes de fond. Il existe cependant la possibilité que les vannes ne soient pas rectangulaires, dans ce cas il faut calculer la section pour une ouverture rectangulaire équivalente.

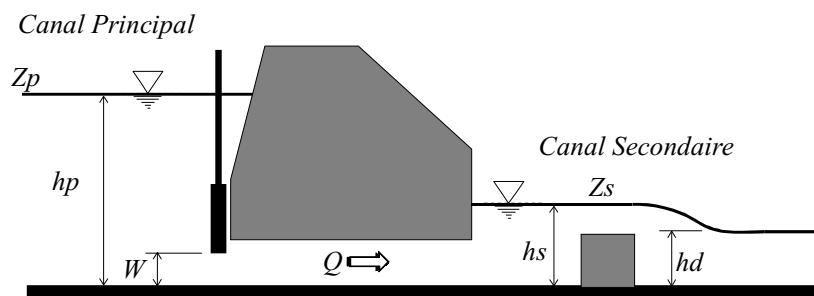


Figure 1.8. Prise latérale par canal secondaire

L'équation peut se résumer comme :

$$Q = B_L \sqrt{2g} (k_F \mu hp^{3/2} - k_{F1} \mu_1 (hp - W)^{3/2}) \quad (1.53)$$

Avec : $k_{F1} = 1$ pour régime partiellement noyé.

$k_{F1} = 1$ et $k_F = 1$ pour régime dénoyé.

Une autre particularité est que pour tenir compte du possible ennoyage des prises, trois types de conditions aval du canal secondaires sont modélisables :

- Une cote aval fixe.
- Une cote aval h_s variant comme la cote amont d'un déversoir dénoyé :

$$Q(hs) = \mu B_L \sqrt{2g} (hs - hd)^{3/2} \quad (1.54)$$

- Une cote aval suivant une courbe de tarage :

$$Q(h_s) = Q_0 \left(\frac{h_s - h_d}{h_0 - h_d} \right)^n \quad (1.55)$$

1.4.3.2. Prise par station de pompage.

Dans le cas d'une prise par station de pompage, comme sur la Figure 1.9, le débit dépend des caractéristiques de la pompe, du réseau sous pression et du niveau d'eau dans le canal. Cela peut être modélisé par l'équation de Bernoulli comme suit :

$$gZ_p + \frac{P_p}{\rho} + \frac{V_p^2}{2g} + h_p = gZ_t + \frac{P_t}{\rho} + \frac{V_t^2}{2g} + h_t \quad (1.56)$$

Avec :

l'indice p qui indique les valeurs sur la surface du canal,

l'indice t à la sortie du système sous pression.

h_p puissance de la pompe

h_t les pertes par friction dans les tuyaux.

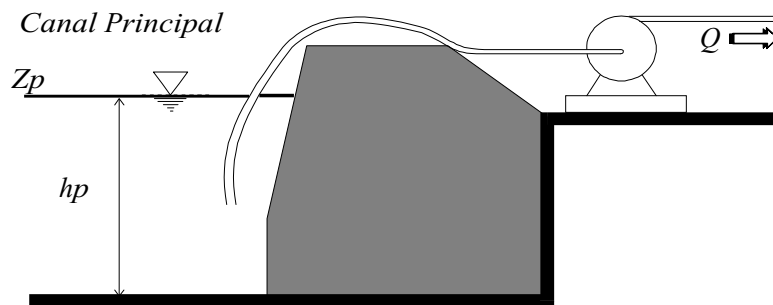


Figure 1.9. Prise latérale par station de pompage

Le calcul du débit se fait en tenant compte des considérations suivantes :

$Z_p = 0$ si les cotes sont relatives à la surface du canal.

$P_p = 0$ pour des pressions manométriques.

$V_p = 0$ car la vitesse du fluide à la surface du canal est orthogonale au débit dans le tuyau.

$P_t = 0$ car les sorties des tuyaux se trouvent à pression atmosphérique.

$V_t = Q/S_t$ avec : S_t la section du tuyau à l'entrée de la pompe.

Finalement l'équation pour le débit de pompage se transforme en :

$$\frac{(Q/S_t)^2}{\rho} = hp - ht - gZt \quad (1.57)$$

$$Q = S_t \sqrt{\rho(hp - ht - gZt)} \quad (1.58)$$

On voit que le débit ne dépend que de la puissance de la pompe et des caractéristiques du système sous pression, donc le débit peut être considéré comme constant pour la modélisation de la prise sur le canal.

1.5. AUTOMATISATION D'UN CANAL D'IRRIGATION

Les canaux d'irrigation fonctionnent aujourd'hui principalement de façon manuelle. Et bien que ce fonctionnement manuel ne pose pas de gros problèmes en soi, il est clair que le fait de pouvoir automatiser leur fonctionnement présente beaucoup de bénéfices [Malaterre,1994] [Framji et Verdier,1978].

Dans les bénéfices que présente un tel système d'automatisation il y a bien sûr un intérêt économique pour plusieurs raisons. La première est le fait de libérer l'homme d'une tâche où il ne serait pas a priori indispensable, donc une économie de main d'œuvre, mais il y a aussi une possibilité d'économie dans les coûts d'investissement par la diminution du nombre de réservoirs tampons. Mais ceci n'est pas le seul bénéfice, il est aussi possible de prétendre à une économie des ressources naturelles ou au moins à une utilisation plus performante, on peut parler ici d'un meilleur rendement. Ce rendement est de l'ordre de 30% à 40% pour des canaux manuels et de 60% à 80% pour des canaux automatisés [Litrico,1999] [Cemagref,1997] [Plusquellec,1988]. De plus on peut parler aussi d'une amélioration de la qualité du service pour les usagers et une facilitation de la gestion pour les gestionnaires, et finalement un gain en sécurité pour le système est bien sûr envisageable.

Pour toutes ces raisons, plusieurs études pour le développement de systèmes automatiques de commande de canaux d'irrigation ont été réalisées depuis les années 60, avec des méthodes mécaniques ou électromécaniques, et dernièrement diverses études sont apparues avec le développement de nouvelles méthodes de commande. Dans tous ces travaux il existe une multitude d'approches différentes. Mais ces systèmes ne sont pas très simples, donc les méthodes utilisées tentent dans tous les cas de simplifier d'une façon ou d'une autre la modélisation du système, notamment en négligeant certaines variables qui rendent l'étude complexe, ce qui fait qu'il existe très peu de travaux qui ont abouti à une application sur un système réel.

Cette partie du travail tente d'expliquer les points pratiques importants pour la mise en place d'un système de commande automatique pour un canal d'irrigation, et donnera un bref état de l'art des méthodes utilisées dans certains travaux récents.

1.5.1. Objectif de l'automatisation d'un canal d'irrigation

L'objectif idéalisé de l'automatisation d'un canal d'irrigation est de permettre le fonctionnement du canal, sans l'intervention manuelle de l'homme, et cela pour toutes les conditions de fonctionnement possibles du canal, et en présence de toutes les perturbations imaginables.

Bien sûr cet objectif est bien ambitieux et les connaissances actuelles sur le sujet sont loin de permettre un tel niveau d'automatisation. Cela, car le système est en soi très complexe, et son fonctionnement implique la maîtrise de deux niveaux de gestion rationnelle [Litrico,1999].

Un premier niveau correspond à la gestion proprement dite, appelée aussi gestion stratégique, avec laquelle les consignes du canal sont établies. Pour cela il faut prendre en compte une multitude de variables telles que les prévisions météorologiques, les estimations de prélèvement des cours d'eau, la disponibilité de la ressource, etc [Parent,1991]. Ce niveau se fait à une échelle régionale et avec des grands pas de temps.

Le deuxième niveau correspond à la commande, appelée aussi gestion tactique, pour déterminer les commandes nécessaires de façon à satisfaire les consignes élaborées dans la premier niveau [Tardieu,1998]. Ce niveau se fait à une échelle locale et avec de petits pas de temps.

Il est clair que la plus grande difficulté pour l'automatisation se situe au premier niveau, et de fait beaucoup de gestionnaires pensent que cela n'est pas envisageable, car dépendant souvent de paramètres subjectifs, et il est difficile d'obtenir un modèle fiable et suffisamment simple. Par contre le deuxième niveau, bien que complexe, est plus simple à automatiser car il dépend seulement de variables locales, et il est possible de développer des modèles mathématiques qui les mettent en relation ou d'utiliser des modèles déjà existants, sur lesquels pourront être appliquées des méthodes de commande moderne.

Il est donc souhaitable, de nos jours, de simplifier l'objectif d'automatisation énoncé au début de ce paragraphe, et de le limiter à l'automatisation de la commande (gestion tactique) d'un canal d'irrigation. Ce dernier sera donc l'objectif d'automatisation poursuivi dans cette thèse.

1.5.2. Classification de la commande

Il existe une grande diversité d'approches possibles et imaginables pour développer la commande d'un canal d'irrigation. Les différences entre les approches dépendent de plusieurs facteurs tels que les variables de contrôle utilisées pour la commande, la logique de contrôle, la méthode de synthèse utilisée et le type de modèle utilisé pour cette synthèse.

Une classification récente de ces approches a été établie dans [Malaterre et al, 1998] et il existe une multitude de classifications moins récentes dont il est possible de citer [Malaterre,1994]

[Goussard,1993] [Ankum,1992] [Khaladi,1992] [Deltour,1992] [Chevereau,1991] [Buyalski,1991] [Zimbelman,1987].

Dans la suite est présenté un résumé de classification de ces systèmes.

1.5.2.1. Suivant les variables de contrôle

Les variables de contrôle sont de trois types, les variables contrôlées, les variables mesurées et les commandes.

1.5.2.1.1. Variables contrôlées

Les variables contrôlées sont les variables que le système automatisé doit réguler. Ce sont les variables sur lesquelles sont assignées les consignes et elles sont considérées comme sorties du système. Il est possible d'utiliser pour les canaux à surface libre trois variables physiques comme variables contrôlées: les débits, les cotes et les volumes.

Les débits

Le débit est la variable qui exprime naturellement les besoins des usagers des canaux d'irrigation, et donc est la variable qui naturellement doit être contrôlée par le système automatisé. Ceci d'une manière directe ou indirecte. On parlera de commande en débit quand cette variable est contrôlée directement. Les autres variables contrôlées étant en fait des variables intermédiaires pour contrôler indirectement le débit.

Cette variable de contrôle est utilisée fréquemment pour des systèmes barrage-rivière. Il est possible de citer comme exemple de commande directe des débits [Chevereau,1991] [Sawadogo,1992] [Rodellar,1993] [Sawadogo et al,1997] [Litrico,1999]

Les Volumes

L'utilisation des volumes comme variable contrôlée est une manière plus souple de définir une commande en débit, car le volume correspond à l'intégrale du débit sur une période de temps. Les résultats obtenus sont en général moins sensibles aux perturbations mais les temps de réponse sont augmentés.

La commande utilisant cette variable de contrôle nécessite de gros volumes de stockage. Il est possible de citer comme exemple de commande en volume [Deltour,1988] [Buyalski,1991] [Liu et al,1997] [Reddy,1997] [Seatzu,2000].

Les cotes

Les cotes sont les variables les plus utilisées comme variable contrôlée. En effet sur un canal d'irrigation il est bien plus facile de mesurer les cotes que les débits et de plus il existe certaines

contraintes supplémentaires sur les cotes telles que le risque de débordement, la lutte contre le développement de plantes aquatiques, les contraintes d'alimentation de prises gravitaires, etc.

Il est à noter de plus que pour un canal en état d'équilibre, avec la surface de l'eau parallèle au fond du canal, la valeur du débit est directement proportionnelle à la cote, mise à part la possibilité d'être en régime fluvial ou torrentiel. Donc dans ce cas, la régulation du niveau implique indirectement la régulation du débit, car pour garantir un débit donné, il suffit de choisir une consigne de niveau d'une valeur égale à celle correspondant au débit désiré. Cette condition pour les canaux d'irrigation est la plus performante en terme d'économie de la ressource eau, car dans ce cas le débit est optimal sans volume de stockage additionnel. Il est donc facile de voir que sous certaines conditions la commande des cotes est équivalente à la commande des débits, mais avec quelques garanties de fonctionnement supplémentaires.

Diverses configurations sont possibles pour une commande en cote (Figure 1.10).

L'utilisation de la cote amont du bief permet de répondre rapidement aux demandes imprévues et de stocker de l'eau en cas de diminution de consommation, cela par la formation d'un volume de stockage entre le débit maximum et le débit nul. Par contre son utilisation n'est envisageable que pour des canaux à berges horizontales, ce qui est coûteux en génie civil. Des exemples de cette commande sont disponibles dans les travaux de [Zimelman,1987] [Goussard,1993].

La cote aval du bief permet quant à elle d'être utilisée sur des canaux avec la berge parallèle à la pente naturelle du terrain, mais ne permet pas de répondre à une demande imprévue ni de stocker l'eau non consommée. Des exemples de cette commande sont disponibles dans les travaux de [Zimelman,1987] [Deltour,1992] [Goussard,1993].

Une cote intermédiaire du bief permet un compromis entre les défauts et avantages des deux autres dispositions. Il est aussi possible d'utiliser une combinaison linéaire de la mesure de plusieurs côtes mais avec l'inconvénient supplémentaire de devoir réaliser plusieurs mesures. Des exemples de cette dernière configuration sont disponibles dans [Zimelman,1987] [Chevereau,1991].

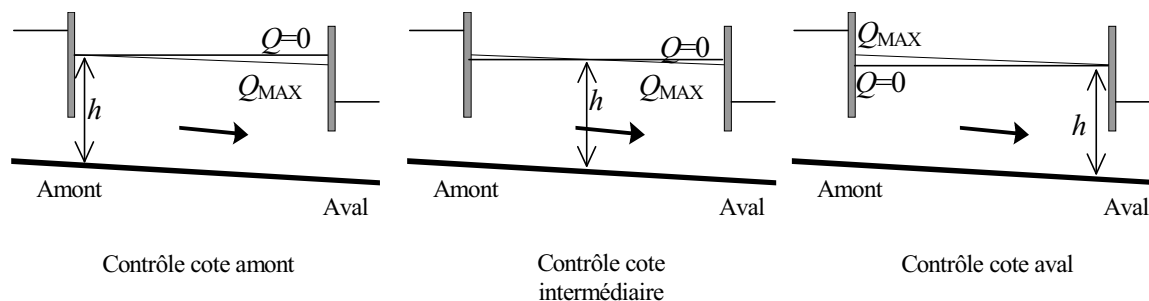


Figure 1.10. Position des cotes commandées

Finalement il faut noter, que sous certaines conditions, il est possible de contrôler simultanément les deux extrémités du bief. Cela est possible techniquement, au moins pour un bief, et en plus de présenter un compromis entre les avantages et désavantages de l'utilisation de la cote aval ou amont, permet de faire fonctionner le bief en configuration débit maximum, et donc permet de faire une commande en débit de façon indirecte.

Le travail de cette thèse utilise cette configuration, et aucun autre exemple de cette configuration n'a été trouvé dans la littérature. Le désavantage de ce choix de variables contrôlées est la difficulté de contrôler plusieurs biefs interconnectés, comme on le verra plus en détails par la suite.

1.5.2.1.2. Variables mesurées

Les variables mesurées sont les entrées du système de commande. Dans les canaux ouverts il est possible de mesurer diverses variables de fonctionnement, telles que les niveaux, en amont (h_1), à l'aval (h_n) ou à une position intermédiaire (h_i), un débit traversant (Q) un ouvrage, ainsi qu'une vitesse de mouvement à un certain point du canal (V_i), avec laquelle il est possible de calculer le débit à ce point (Q_i). Et finalement il est possible de mesurer la position de la vanne d'un ouvrage de régulation (W).

Bien que toutes ces variables puissent être techniquement mesurées, dans la pratique les mesures se limitent à des niveaux à certains endroits du canal, car les autres mesures représentent en général des coûts additionnels élevés et sont souvent moins précises. La position des ouvrages est quant à elle bien connue car imposée par la commande.

1.5.2.1.3. Commandes

Les commandes sont les variables sur lesquelles sont effectuées les actions de contrôle, pour commander les variables contrôlées. Ce sont les sorties du système de commande. Il est possible de parler ici de seulement deux types de commandes, selon que les ouvrages sont ou pas pris en compte dans la commande [Malaterre et al,1998] : les débits (Q) ou l'ouverture des vannes (W). Dans le premier cas un algorithme doit transformer le débit de commande en une valeur d'ouverture de vanne, car c'est dans un système réel la seule variable de commande du bief.

Il est aussi important de noter les possibilités existantes par rapport à la position de la variable de commande. Sur un bief de canal trois configurations sont possibles : l'utilisation de la vanne amont comme commande (appelé commande par l'aval), l'utilisation de la vanne aval comme commande (appelé commande par l'amont) ou l'utilisation des deux vannes (appelé commande mixte), voir Figure 1.11.

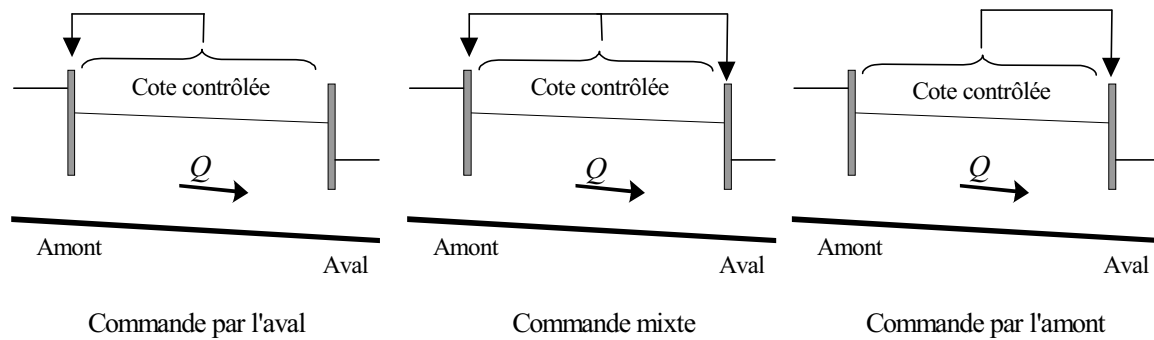


Figure 1.11. Configuration des commandes

La commande en cote par l'aval présente la particularité de conduire indirectement à une commande en débit. Dans [Chevereau,1991] [Deltour,1992] [Litrice,1999] [Chen,2001] sont présentés des exemples de ce type de commande.

Une commande par l'amont par contre ne conduit pas indirectement à une commande en débit, et doit être complétée par une commande en débit [Malaterre,1994]. Des exemples de cette commande se trouvent dans [Buyalski,1991] [Cardona et al,1997] [Compas et Pages,1997] [Akouz et al,1997].

La commande mixte quant à elle garde la particularité de conduire indirectement à une commande en débit. Quelques exemples récents de ce type de commande se trouvent dans [Reddy et al,1992] [Garcia et al,1992] [Malaterre,1994] [Malaterre,1995] [Sawadogo et al,1995] [Malaterre et Rodellar,1997] [Akouz et al,1997].

1.5.2.2. Suivant la logique de contrôle

Suivant l'automatique classique deux possibilités de logique de contrôle se présentent : la commande en boucle ouverte ou la commande en boucle fermée. Dans le cas de la commande de canaux d'irrigation les deux approches indépendantes ne sont en général pas suffisantes.

Pour la boucle ouverte la commande est calculée à partir des consignes Y_C et une estimation de la perturbation \hat{P} , celle-ci pouvant de cette façon compenser les retards du système en anticipant les besoins des usagers. Ces besoins doivent être estimés en fonction des données climatiques, agronomiques, sociologiques et de statistiques de la consommation. La boucle ouverte n'est généralement pas suffisante car les perturbations sont en général très difficiles à estimer.

La boucle fermée quant à elle permet d'établir une commande U en fonction de l'erreur entre les variables mesurées Y et les consignes Y_C . Mais comme dans ce cas les perturbations sont prises en compte après avoir affecté le système, et que dans les systèmes de canaux ouverts les retards sont très grands, alors la commande en boucle fermée n'est pas suffisante non plus.

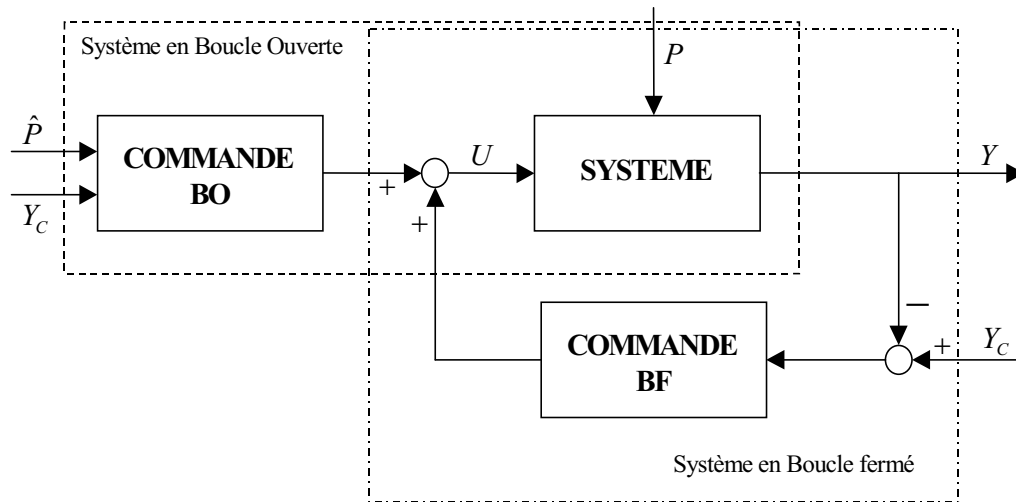


Figure 1.12. Logique de contrôle boucle ouverte boucle fermée

C'est pour cela que dans les systèmes d'irrigation il est en général nécessaire de mettre en œuvre les deux logiques en même temps comme le montre la Figure 1.12 [Malaterre et al,1998]. Mais il est aussi possible de développer des commandes à deux étapes, et de cette façon faire varier la consigne de la commande en boucle fermée \hat{Y}_C en fonction des besoins estimés \hat{P} , cela avec une commande en boucle ouverte. Cette configuration est présentée sur la Figure 1.13. On peut remarquer qu'avec cette configuration le système revient naturellement aux deux étapes de gestion, la boucle ouverte pour la gestion stratégique et la boucle fermée pour la gestion tactique ou commande [Litrice,1999].

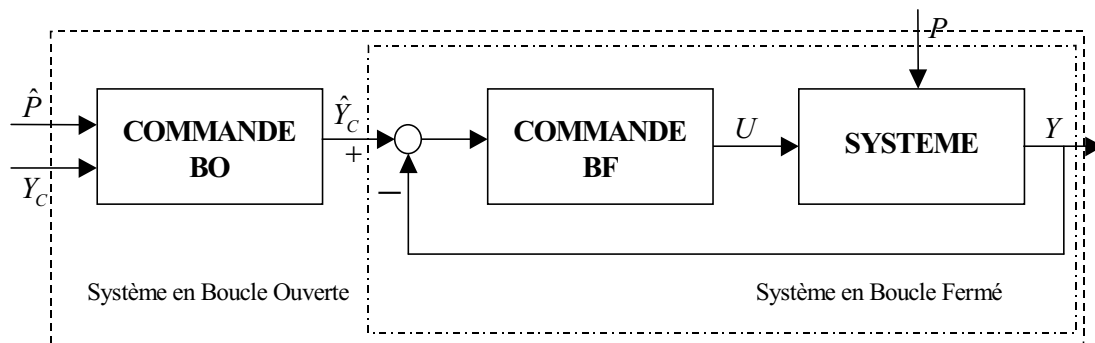


Figure 1.13. Logique de contrôle boucle ouverte boucle fermée à deux étapes

Il est possible de citer comme exemples récents de ce type de commande, pour la commande en boucle fermée [Chevereau,1991] [Sawadogo,1992] [Khaladi,1992] [Deltour,1992] [Rodellar et al,1993] [Liu,1995] [Litrice,1999] [ElFawal,1999] [Chen,2001] et pour la commande en boucle ouverte [Chevereau,1991] [Sawadogo,1992] [Khaladi,1992] [Zihui et Manz,1992] [Beaume et al,1993].

1.5.2.3. Suivant le modèle utilisé

Les modèles utilisés pour la commande peuvent être de plusieurs types, et ont déjà été traités dans les paragraphes précédents. Il sera simplement noté ici que la commande peut être développée à partir des types de modèles mentionnés (des exemples ont déjà été donnés), mais peut aussi se réaliser sans modèle, comme par exemple pour une commande PID comme c'est le cas dans [Skertchly et Miles,1996].

1.5.2.4. Suivant la méthode de synthèse de la commande

La méthode de synthèse de la commande est la méthode, choisie parmi les méthodes de commande développées par les automaticiens, et appliquée au système d'irrigation étudié ici. C'est sur ce sujet qu'il y a le plus de travaux différents, car c'est ici que se concentre en général le savoir-faire des automaticiens. Il est possible de classifier ou regrouper les méthodes de synthèse en plusieurs groupes tels que : méthodes monovariables et multivariables, méthodes linéaires et non linéaires, méthodes continues et discrètes, méthodes analytiques et méthodes numériques. Il existe des exemples de tous ces types de méthodes, et une liste (non exhaustive) des travaux récents est présenté ci-après.

Méthodes Linéaires Monovariables

- ❑ Méthodes heuristiques basées sur l'Hydraulique [Zimbelman,1987], [Burt,1983].
- ❑ Méthodes empiriques [Roux,1992] [Marzouki,1989].
- ❑ PI [Chentouf et al,2000] [Xu et Sallet,1999].
- ❑ PID [Litrico,1999] [Skertchly et Miles,1996] [Khaladi,1992].
- ❑ PIR [Sanfilippo,1993] [Deltour,1992].
- ❑ Placement de pôles [Litrico,1999].
- ❑ Commande prédictive monovariante [Akouz et al,1997] [Compas et pages,1997] [Sawadogo,1992] [Rodellar et al,1993] [Linkens et Mahfouf,1992] [Soeterboek,1990].
- ❑ Commande prédictive adaptative linéaire [Cardona et al,1997].
- ❑ Découplage en divers systèmes monovariants [Schuurmans,1992].
- ❑ Commande floue [Voron et Bouillot,1997] [Parrish,1997] [Stringam et Merkley,1997].

Méthodes Linéaires Multivariables

- ❑ Retour de sortie [Chevereau,1991] [Liu et al,1992].
- ❑ Retour d'état [Liu et al,1994].
- ❑ Optimisation linéaire [Sabet,1985].

- ❑ Régulateur linéaire quadratique [Corriga et al,1983] [Balogun,1985] [Hubbard et al,1987] [Garcia,1988] [Reddy et al,1992] [Malaterre,1994] [Kosuth,1994] [Sawadogo et al,1995].
- ❑ Commande Robuste linéaire [Schuurmans,1997b] [Litrice,1999].
- ❑ Commande prédictive multivariable linéaire [Malaterre et Rodellar,1997] [Sawadogo et al,1997] [Compas et Pages,1997].
- ❑ Approche par semi-groupes [Bounit et al,1997] [Chen,2001].

Méthodes Non Linéaires

- ❑ Optimisation non linéaire en boucle ouverte [Tomicic,1989] [Khaladi,1992] [Lin et Manz,1992] [Gennadii et al,1998].
- ❑ Commande par une méthode de Lyapunov en dimension infinie [Coron et al,1999].
- ❑ Commande optimale non linéaire en boucle fermée [Chen et Georges,1999] [Chen et Georges,2000b] [Chen,2001].
- ❑ Commande robuste non linéaire [Chen et Georges,2000a] [Chen,2001] [Chen et Georges,2001].
- ❑ Linéarisation entrée sortie en dimension finie [Dulhoste et al,2001].
- ❑ Backstepping en dimension finie [Besançon et al,2001].

Tous ces modèles ont leur particularité de fonctionnement, avec des avantages et désavantages les uns par rapport aux autres, les détails sont très nombreux et pour cela ne seront pas précisés ici.

Les principales remarques, qui peuvent se faire, sont que les commandes basées sur des méthodes linéaires présentent l'avantage d'être simples, mais l'inconvénient de n'être valides que sur une petite plage de fonctionnement, proche du point de fonctionnement où a été calculé le modèle linéaire.

Notons que le comportement des systèmes hydrauliques à surface libre est marqué par la forte dépendance des retards de propagation en fonction du débit. Cette caractéristique fortement non linéaire limite souvent la validité des modèles linéaires utilisés pour décrire le comportement de ces systèmes.

D'un autre côté les commande établies à partir de méthodes non linéaires, sont, à ce jour, soit trop complexes pour envisager une application réelle, soit basées sur des modèles non linéaires trop simplifiés, comme par exemple un canal sans pente ni friction.

De nos jours seuls sont appliquées sur des systèmes réels des méthodes simples, du type PI, PID ou PIR, quelques exemples se trouvent dans [Bozakov et Laycock,1997] [Ruiz et al,1997]. Il existe aussi des méthodes dites informatiques telles que [Rogers,1997], des méthodes de supervision telles que [Hansen et Pugh,1997] et des méthodes de commande linéaire de type RST [Dumur et al,2001].

1.6. OBJECTIFS ET LIMITES DE LA THESE

Cette thèse se place dans le cadre de l'application de méthodes de synthèse de commande. Elle prendra donc seulement en compte la partie de la gestion d'un canal d'irrigation correspondant à la commande (gestion tactique), ce qui réduit l'étude à l'utilisation d'une logique de commande en boucle fermée.

Les objectifs sont de développer une commande qui puisse pallier les défauts des méthodes existantes, c'est-à-dire une méthode suffisamment simple et précise pour pouvoir être appliquée sur un système réel. Pour cela le choix est porté sur l'utilisation de méthodes non linéaires, qui sont les plus aptes à garantir une plage de fonctionnement suffisamment large.

Pour pouvoir réaliser cela il est nécessaire d'avoir un modèle non linéaire suffisamment simple. L'obtention de ce modèle est la première partie de cette étude, car les modèles existants sont soit trop complexes pour appliquer des méthodes non linéaires, soit trop approximatifs. Le choix s'est porté sur l'utilisation d'un modèle de dimension finie, obtenu par la résolution des équations de Saint-Venant avec une méthode de collocation.

A partir du modèle obtenu sont appliquées des méthodes non linéaires de commande, et notamment deux types de méthodes dites géométriques : la méthode de linéarisation entrée-sortie, et une méthode de Backstepping. Les variables choisies pour le développement de la commande seront : Les niveaux pour les variables contrôlés et les débits pour la commande. Et dans un souci de meilleure approximation de la réalité, on ajoutera un modèle pour les équations d'ouvrage aux algorithmes de simulation.

Quant aux variables mesurées, il sera considéré de manière réaliste que seuls les niveaux sont mesurés, ce qui produira par la suite le besoin d'un observateur pour les autres variables nécessaires à la commande (Q et q). Cet observateur sera aussi de type non linéaire, plus précisément un observateur à grand gain.

Pour finir, quelques idées pour résoudre le problème de l'interconnexion de biefs seront présentées.

MODELISATION

2.1. INTRODUCTION

Pour la commande de canaux ouverts il est nécessaire d'avoir un modèle mathématique décrivant un écoulement unidimensionnel non permanent, graduellement varié. Le choix de ce modèle est très important car de lui dépend en grande partie la précision et la simplicité de la commande qui sera développée par la suite.

Comme il a été dit au chapitre précédent la modélisation des canaux ouverts peut se faire de deux façons différentes, la première est l'utilisation d'un modèle de représentation et la deuxième est l'utilisation d'un modèle de connaissance. Le choix a été porté ici sur les Equations de Saint-Venant [Saint-Venant,1871], qui constituent le modèle de connaissance de base pour ce type de systèmes. La complexité de ces équations et l'absence à ce jour d'une solution analytique, rendent très difficile l'utilisation directe des ces équations pour la commande, et c'est pour cela que sera proposé un modèle de dimension finie basé sur ces équations.

Diverses méthodes existent pour résoudre les équations de Saint-Venant et pour les transformer en un système de dimension finie. Trois de ces méthodes seront présentées ici : Une qui sera utilisée par la suite pour obtenir le modèle de base pour la commande et qui correspond à une méthode de résidus pondérés [Fletcher,1984], nommée "*méthode de collocation orthogonale*", avec une formulation variationnelle qui utilise les polynômes de Lagrange comme fonctions de base [Villadsen et Michelsen,1978]; et deux autres qui seront utilisées comme références pour valider la première et évaluer ses performances. Il s'agit de deux méthodes de différences finies, l'une explicite et l'autre implicite, cette dernière est connue sous le nom de méthode de Preissmann [Preissmann,1965].

2.2. EQUATIONS DE BARRE DE SAINT-VENANT

La formulation des équations de Saint-Venant utilisée dans ce travail sera la formulation en débit, avec prise en compte du terme d'infiltration [Malaterre,1994]. De plus, dans un souci de simplification, ce travail ne concernera que l'étude que les canaux à section rectangulaire.

Les équations de Saint-Venant pour une section rectangulaire de canal sont :

$$B \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = q(t) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial (Q(x,t)^2 / h(x,t))}{\partial x} + gBh(x,t) \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} - I + J(Q(x,t), h(x,t)) \right) = k_q q(t) V(x,t) \quad (2.2)$$

Avec :

$$J(x,t) = \frac{Q(x,t) |Q(x,t)|}{k^2 B^2 h(x,t)^2 (Bh(x,t)/(B + 2h(x,t)))^{4/3}} \quad (2.3)$$

$$V(x,t) = \frac{Q(x,t)}{Bh(x,t)} \quad (2.4)$$

A ces équations il faut ajouter des conditions limites et des conditions initiales.

Les canaux d'irrigation étant en général de faible pente, et fonctionnant donc en régime fluvial (sous critique) on doit utiliser une condition limite à l'aval et une condition limite à l'amont de sorte que quatre possibilités se présentent :

$$\begin{aligned} Q(x=0,t) = Q_1(t) \quad Q(x=L,t) = Q_n(t) \quad \text{ou} \quad Q(x=0,t) = Q_1(t) \quad h(x=L,t) = h_n(t) \quad \text{ou} \\ h(x=0,t) = h_1(t) \quad Q(x=L,t) = Q_n(t) \quad \text{ou} \quad h(x=0,t) = h_1(t) \quad h(x=L,t) = h_n(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} h(x,0) = h(0) \\ Q(x,0) = Q(0) \quad \forall x \in [0, L] \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3. MODELE DE DIMENSION FINIE

2.3.1. Introduction

A partir du modèle analytique rappelé dans la section précédente, et dont la solution analytique n'est pas connue à ce jour, sauf pour des cas particuliers très simples, il faut développer un modèle de dimension finie. Pour cela on va utiliser des méthodes numériques qui permettent d'obtenir une solution approchée des équations de Saint-Venant. Il existe diverses méthodes numériques pour la résolution de systèmes de ce type, les plus connues étant la méthode des caractéristiques [Graf et Altinakar,1996], les méthodes d'éléments finis [Colley et Moin,1976] [Keuning,1976], les méthodes de différences finies [Preissmann,1965] [Cunge,1966] [Stelkoff,1970] et les méthodes de résidus pondérés [Villadsen et Michelsen,1978] [Fletcher,1984].

Les méthodes les plus utilisées pour la commande de canaux ouverts sont les méthodes de différences finies, car ce sont les plus simples et bien adaptées à une modélisation unidimensionnelle. Deux possibilités se présentent dans ce type de méthodes : l'utilisation d'une discrétisation explicite en temps [Balogun et Hubbard,1988] [Reddy,1996] et l'utilisation d'une discrétisation implicite en temps [Khaladi,1992] [Malaterre,1994]. La première option est une solution plus simple, mais la stabilité de la solution dépend du choix de la période de temps, la deuxième option est plus complexe et requiert plus de temps de calcul, mais est inconditionnellement numériquement stable. Rappelons que la méthode de discrétisation de Preissmann, qui est la plus utilisée pour la modélisation de canaux ouverts à une dimension, entre dans ce deuxième cas. Les résultats obtenus avec cette méthode sont très bons, mais il est difficile de l'utiliser pour la commande car elle induit un modèle avec un grand nombre d'états et de plus le système obtenu est implicite du type $H(x_{t+1}, x_t, u_t) = 0$. Cependant ce type de modèle a déjà été utilisé pour la commande de façon directe [Chen,2001] ou en se restreignant à l'étude du linéarisé tangent [Malaterre,1994].

L'intérêt du présent travail est d'étudier une autre méthode de résolution, très peu utilisée pour des systèmes hydrauliques, mais qui est aussi simple et bien adaptée pour des simulations unidimensionnelles. Cette méthode est la méthode de "*collocation orthogonale*", avec une formulation variationnelle par polynômes de Lagrange. Elle fait partie de la famille des méthodes de *résidus pondérés*, et a principalement été utilisée en chimie [Villadsen et Stewart,1967] [Michelsen et Villadsen,1972] [Georgakis et al,1977] [Dochain et al,1992] [Lefèvre et al,2000] mais très peu pour des systèmes hydrauliques. Quelques exemples existent cependant comme dans [Alam et Bhuiyan,1995] qui utilise une méthode d'éléments finis par collocation pour modéliser une rupture de barrage.

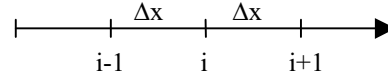
Ci-après sont présentées les bases des deux méthodes de différences finies indiquées et le développement complet de la méthode de collocation pour la solution des équations de Saint-Venant.

La méthode de discrétisation de Preissmann sera utilisée par la suite pour valider le modèle par collocation, et la méthode de discrétisation explicite pour comparer ses performances avec celles obtenues par la méthode de collocation.

2.3.2. Méthode des différences finies explicite en temps des Equations de Saint-Venant

2.3.2.1. Discrétisation

La discrétisation spatiale se fait suivant le schéma de la Figure 2.1.



Avec les approximations et simplifications de notation suivantes :

Figure 2.1. Schéma de discrétisation spatiale

$$\begin{aligned}
 h(x_i, t) &\cong h_i(t) := h_i \text{ niveau à l'abscisse spatiale d'indice } i \\
 Q(x_i, t) &\cong Q_i(t) := Q_i \text{ débit à l'abscisse spatiale d'indice } i \\
 \frac{\partial h(x_i, t)}{\partial t} &\cong \frac{\partial h_i(t)}{\partial t} := \dot{h}_i \text{ variation temporelle de niveau à l'abscisse spatiale d'indice } i \\
 \frac{\partial Q(x_i, t)}{\partial t} &\cong \frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} := \dot{Q}_i \text{ variation temporelle de débit à l'abscisse spatiale d'indice } i
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les dérivées partielles sont approchées par différences finies du premier ordre (à droite ou à gauche) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial x} &\approx \frac{\Delta h_i}{\Delta x} = \frac{(h_{i+1} - h_i)}{\Delta x} \text{ ou } \frac{(h_i - h_{i-1})}{\Delta x} \\
 \frac{\partial Q}{\partial x} &\approx \frac{\Delta Q_i}{\Delta x} = \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{\Delta x} \text{ ou } \frac{(Q_i - Q_{i-1})}{\Delta x} \\
 \frac{\partial \left(\frac{Q_i^2}{h_i} \right)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta \left(\frac{Q_i^2}{h_i} \right)}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{Q_{i+1}^2}{h_{i+1}} - \frac{Q_i^2}{h_i} \right)}{\Delta x} \text{ ou } \frac{\left(\frac{Q_i^2}{h_i} - \frac{Q_{i-1}^2}{h_{i-1}} \right)}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En chaque point de discrétisation les équations de Saint-Venant deviennent deux équations différentielles ordinaires non linéaires :

$$\begin{aligned}
 B\dot{h}_i + \frac{\Delta Q_i}{\Delta x} &= q \\
 \dot{Q}_i + \frac{1}{B} \frac{\Delta(Q_i^2 / h_i)}{\Delta x} + gBh_i \left(\frac{\Delta h_i}{\Delta x} - I + J_i \right) &= k_q q \frac{Q_i}{Bh_i}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec:

$$J = \frac{Q_i |Q_i|}{k^2 B^2 h_i^2 (B h_i / (B + 2 h_i))^{4/3}} \quad (2.10)$$

En les réorganisant elles peuvent s'écrire comme équations de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \frac{\Delta Q_i}{\Delta x} \right) \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{B} \frac{\Delta(Q_i^2 / S_i)}{\Delta x} - g B h_i \left(\frac{\Delta h_i}{\Delta x} - I + J \right) + k_q q \frac{Q_i}{B h_i} \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'utilisation des différences finies à gauche ($x_{i+1} - x_i$) ou à droite ($x_i - x_{i-1}$) dépend des conditions aux limites utilisées. Les possibilités suivantes se présentent :

2.3.2.2. Conditions aux limites

Avec N_s sections de discrétisation.

Conditions aux limites Q_{amont} et Q_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux N_s sections de discrétisation donnent $N_s + 1$ états x_1, \dots, x_{N_s+1} . Pour les débits les deux valeurs aux extrémités Q_1 et Q_{N_s+1} sont prises comme commandes u_1 et u_2 , et les $N_s - 1$ valeurs restantes donnent $N_s - 1$ états $x_{N_s+2}, \dots, x_{2N_s}$.

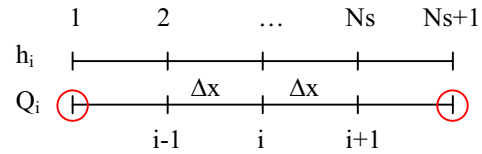


Figure 2.2. Conditions aux limites Q_{am} - Q_{av}

Les équations de Saint Venant discrétisées sont :

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{\Delta x} \right) & i = 1, \dots, N_s + 1 \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{B} \frac{(Q_{i+1}^2 / h_{i+1}) - (Q_i^2 / h_i)}{\Delta x} - g B h_i \left(\frac{(h_{i+1} - h_i)}{\Delta x} - I + J \right) + k_q q \frac{Q_i}{B h_i} & i = 2, \dots, N_s \end{aligned} \quad (2.12)$$

Conditions aux limites Q_{amont} et h_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux Ns sections de discrétisation donnent Ns états x_1, \dots, x_{Ns} , avec la valeur à l'extrémité aval h_{Ns+1} prise comme commande u_2 . Pour les débits la valeur à l'extrémité amont Q_1 est prise comme commande u_1 , et les Ns valeurs restantes donnent Ns états x_{Ns+1}, \dots, x_{2Ns} .

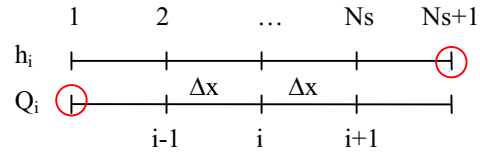


Figure 2.3. Condition aux limites $Q_{\text{am}} - h_{\text{av}}$

Les équations de Saint Venant discrétisées sont :

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{\Delta x} \right) & i = 1, \dots, Ns \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{B} \frac{(Q_i^2 / h_i) - (Q_{i-1}^2 / h_{i-1})}{\Delta x} - gBh_i \left(\frac{(h_i - h_{i-1})}{\Delta x} - I + J \right) + k_q q \frac{Q_i}{Bh_i} & i = 2, \dots, Ns+1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Conditions aux limites h_{amont} et Q_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux Ns sections de discrétisation donnent Ns états x_1, \dots, x_{Ns} , avec la valeur à l'extrémité amont h_1 prise comme commande u_1 . Pour les débits la valeur à l'extrémité aval Q_{Ns+1} est prise comme commande u_2 , et les Ns valeurs restantes donnent Ns états x_{Ns+1}, \dots, x_{2Ns} .

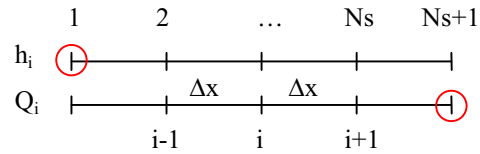


Figure 2.4. Conditions aux limites $h_{\text{am}} - Q_{\text{av}}$

Les équations de Saint Venant discrétisées sont :

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \frac{(Q_i - Q_{i-1})}{\Delta x} \right) & i = 2, \dots, Ns+1 \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{B} \frac{(Q_{i+1}^2 / h_{i+1}) - (Q_i^2 / h_i)}{\Delta x} - gBh_i \left(\frac{(h_{i+1} - h_i)}{\Delta x} - I + J \right) + k_q q \frac{Q_i}{Bh_i} & i = 1, \dots, Ns \end{aligned} \quad (2.14)$$

Conditions aux limites h_{amont} et h_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux Ns sections de discrétisation donnent $Ns-1$ états x_1, \dots, x_{Ns-1} , car les valeurs aux extrémités h_1 et h_{Ns+1} sont prises comme commande u_1 et u_2 .

Pour les débits les $Ns+1$ valeurs restantes donnent $Ns+1$ états x_{Ns-1}, \dots, x_{2Ns} .

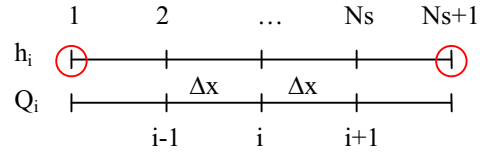


Figure 2.5. Conditions aux limites h_{am} - h_{av}

Les équations de Saint Venant discrétisées sont :

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{\Delta x} \right) & i = 2, \dots, Ns \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{B} \frac{(Q_{i+1}^2 / h_{i+1}) - (Q_i^2 / h_i)}{\Delta x} - g B h_i \left(\frac{(h_{i+1} - h_i)}{\Delta x} - I + J \right) + k_q q \frac{Q_i}{B h_i} & i = 1, \dots, Ns+1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Conditions aux limites h_{amont} et Q_{amont}

Ce dernier cas correspond à une condition particulière de canaux avec un écoulement torrentiel, c'est à dire un nombre de Froude supérieure à un, ce qui est le cas en général pour un canal avec une forte pente ou une rivière qui ne possède pas d'ouvrage à l'aval.

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux Ns sections de discrétisation donnent Ns états x_1, \dots, x_{Ns} , avec la valeur à l'extrémité amont h_1 prise comme commande u_1 . Pour les débits la valeur à l'extrémité amont Q_1 est prise comme commande u_2 , et les Ns valeurs restantes donnent Ns états x_{Ns+1}, \dots, x_{2Ns} .

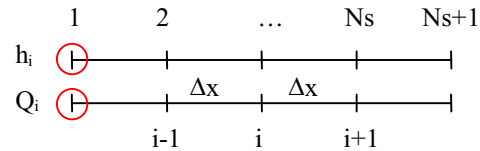


Figure 2.6. Conditions aux limites Q_{am} - h_{am}

Les équations de Saint Venant discrétisées sont :

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \frac{(Q_i - Q_{i-1})}{\Delta x} \right) & i = 2, \dots, Ns \\ \dot{Q}_i &= -\frac{1}{B} \frac{(Q_i^2 / h_i) - (Q_{i-1}^2 / h_{i-1})}{\Delta x} - g B h_i \left(\frac{(h_i - h_{i-1})}{\Delta x} - I + J \right) + k_q q \frac{Q_i}{B h_i} & i = 2, \dots, Ns \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.3.2.3. Considérations finales

L'introduction des conditions limite internes se fait pour ce système comme il est décrit au paragraphe 1.3.5., c'est-à-dire qu'il faut séparer le système en deux au point de la prise latérale, et le transformer en deux systèmes, en ajoutant les équations de liaison.

Le système obtenu par discrétisation spatiale, est un ensemble d'équations différentielles ordinaires, non linéaires, deux équations pour chaque section de discrétisation. Ce nouveau système peut être résolu numériquement par des méthodes classiques de résolution d'équations différentielles telles que la méthode de Runge-Kutta.

Le système est obtenu avec un schéma explicite, c'est à dire que si pour un temps t les valeurs de h et Q sont connues alors il est possible de connaître les valeurs de h et Q pour un temps $t + \Delta t$.

Le système obtenu par cette méthode de discrétisation est numériquement stable, c'est-à-dire que l'erreur $\varepsilon(t, x)$ tend vers 0 quand le temps t tend vers l'infini, si la condition de Courant est satisfaite, à savoir :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(|U| + c)} = \frac{\Delta x}{(|Q/Bh| + \sqrt{gh})} \quad (2.17)$$

Avec : Δt pas de temps utilisé dans la méthode de résolution.

Cela contraint en général à l'utilisation de pas de temps petits par rapport à ceux admissibles dans les méthodes implicites.

Il est à noter que la discrétisation faite est seulement spatiale, avec pour but l'obtention d'un système continu dans le temps, l'objectif étant de définir des lois de commandes continues. Mais en général on discrétise plutôt en temps et en espace de sorte que le système résultant soit complètement discret.

2.3.3. Méthode des différences finies implicite en temps des Equations de Saint-Venant

2.3.3.1. Discrétisation

Il existe plusieurs schémas pour la discrétisation implicite des équations de Saint-Venant, le schéma utilisé ici est celui de [Preissmann,1965], qui est très utilisé dans la littérature pour ces équations.

Ce schéma a la particularité de produire une solution numériquement stable pour n'importe quelle période de temps de calcul, avec une grande précision, mais il est par contre plus difficile à résoudre.

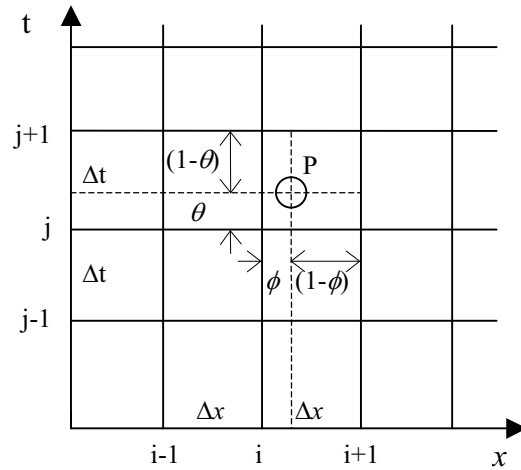


Figure 2.7. Schéma de discrétisation de Preissmann

La méthode de discrétisation peut être décrite de la façon suivante :

Pour une fonction f telle que le débit Q ou le niveau h , il est possible de faire une approximation de cette fonction et ses dérivées en espace et en temps, suivant le schéma de la Figure 2.7. Cette approximation, avec la notation $f_i^j = f(x_i, t_j)$, est donnée par :

$$f(x, t) \cong \theta(\phi f_{i+1}^{j+1} + (1-\phi)f_i^{j+1}) + (1-\theta)(\phi f_{i+1}^j + (1-\phi)f_i^j) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x} (\theta(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}) + (1-\theta)(f_{i+1}^j - f_i^j)) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t} (\phi(f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^j) + (1-\phi)(f_i^{j+1} - f_i^j)) \quad (2.20)$$

Les coefficients de pondération, temporel (θ) et spatial (ϕ), prennent des valeurs entre 0 et 1 comme on peut le voir sur la Figure 2.7, et de la valeur de θ dépend le degré d'implicité du schéma. Ainsi :

- Pour $\theta = 0$, le schéma est explicite.
- Pour $\theta = 0.5$, le schéma correspond au cas classique de Preissmann, centré à quatre points.
- Pour $\theta = 1$, le schéma est complètement implicite.

De ce degré d'implicité dépend aussi la stabilité numérique de la solution, le système sera inconditionnellement stable si $0.5 < \theta < 1$, et sera inconditionnellement instable si $\theta < 0.5$ [Malaterre,1994]. Cela indépendamment des valeurs de Δt et Δx , ce qui permet une grande liberté dans le choix de ces valeurs. Le pas de temps particulièrement peut être choisi très grand par rapport aux pas de temps utilisés avec une méthode explicite. La valeur de $\theta = 0.66$ est recommandée par [Liggett et Cunge,1975] pour que le schéma reste numériquement stable et précis. La valeur de ϕ peut être quelconque, une valeur de 0.5 étant plus confortable pour le calcul.

En chaque point de discrétisation les équations de Saint-Venant deviennent :

Equation de continuité :

$$B \left[\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i+1}^j}{2\Delta t} + \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{2\Delta t} \right] + \left[\theta \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x} \right] - q = 0 \quad (2.21)$$

Equation dynamique:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{2\Delta t} + \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{2\Delta t} \right] + \frac{1}{B} \left[\frac{\theta}{\Delta x} \left(\left(\frac{Q^2}{h} \right)_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{Q^2}{h} \right)_i^{j+1} \right) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left(\left(\frac{Q^2}{h} \right)_{i+1}^j - \left(\frac{Q^2}{h} \right)_i^j \right) \right] + \\ & 0.5gB \left[\theta (h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1}) + (1-\theta)(h_{i+1}^j + h_i^j) \right] \left[\theta \frac{(h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1})}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{(h_{i+1}^j - h_i^j)}{\Delta x} \right] - I + J \quad (2.22) \\ & 0.5 \frac{k_q q}{B} \left[\theta \left(\left(\frac{Q}{h} \right)_{i+1}^{j+1} + \left(\frac{Q}{h} \right)_i^{j+1} \right) + (1-\theta) \left(\left(\frac{Q}{h} \right)_{i+1}^j + \left(\frac{Q}{h} \right)_i^j \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Avec :

$$J = \left[\frac{\theta (Q_{i+1}^{2j+1} + Q_i^{2j+1}) + (1-\theta)(Q_{i+1}^{2j} + Q_i^{2j})}{k^2 B^2 [\theta (h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1}) + (1-\theta)(h_{i+1}^j + h_i^j)]} \right] \times \left[\frac{1}{\left(\frac{0.5B[\theta (h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1}) + (1-\theta)(h_{i+1}^j + h_i^j)]}{B + [\theta (h_{i+1}^{j+1} + h_i^{j+1}) + (1-\theta)(h_{i+1}^j + h_i^j)]} \right)^{4/3}} \right] \quad (2.23)$$

Les équations de Saint-Venant sont ainsi transformées en un système d'équations discrètes implicites non linéaires. Pour la résolution d'un tel système il faut utiliser une méthode d'optimisation, par exemple la méthode de Gauss-Newton ou celle de Levenberg-Marquardt (ou d'autres méthodes de la même famille). Nous avons utilisé dans nos simulations la méthode de Levenberg-Marquardt.

Les conditions aux limites possibles sont dans ce cas les mêmes que celles utilisées pour une discrétisation explicite, mais cette fois, contrairement à la discrétisation explicite, les équations restent inchangées quelque soit le choix de conditions limites. Il suffit simplement d'indiquer dans l'algorithme de simulation la valeur de la condition et la variable à laquelle elle correspond.

2.3.3.2. Introductions des conditions aux limites Internes ou des prises latérales

L'introduction des conditions aux limites internes se fait pour ce système comme il est décrit au paragraphe 1.3.5. Il est à noter cependant que cela ne peut se faire que sur les nœuds des éléments de discrétisation, de sorte qu'à chaque nœud doit être ajoutée la somme de toutes les prises latérales à l'amont du nœud, c'est-à-dire :

$$Q_i^- + \sum Q_p = Q_i^+ \quad (2.24)$$

Comme le niveau reste constant en ce point, il n'y a pas par contre de modification à faire sur les équations qui gouvernent le niveau.

2.3.4. Solution des Equations de Saint-Venant par la méthode de collocation

La méthode de collocation appartient à un groupe de méthodes dites de résidus pondérés [Fletcher,1984], qui sont des méthodes de résolution numérique d'équations différentielles, moins populaires que les autres pour les systèmes hydrauliques. On peut aussi les considérer comme une méthode de réduction de modèle de systèmes en dimension infinie.

2.3.4.1. Principe de la méthode des résidus pondérés

On considère une équation différentielle définie par l'opérateur L :

$$L(u) = 0 \quad (2.25)$$

Ou encore plus généralement une équation aux dérivées partielles non linéaires définies sur un domaine Ω .

Avec les conditions initiales $I(u) = 0$, et les conditions aux limites $S(u) = 0$ dans le cas d'une équation aux dérivées partielles.

Le principe général d'une méthode des résidus pondérés est le suivant :

1. Il s'agit de choisir une approximation fonctionnelle de la solution u sous la forme générale :

$$u_a(x, t) = u_o(x, t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \phi_j(x) \quad (2.26)$$

avec :

ϕ_j : des fonctions analytiques connues appelées couramment fonctions de forme (modales ou tests) (en anglais "*trial functions*").

a_j : coefficients à déterminer

$u_o(x, t)$: éventuellement introduit pour satisfaire les conditions initiales et aux frontières.

2. Ensuite on génère un résidu R de l'équation (2.25) en y injectant la solution approchée (2.26) :

$$L(u_a) = R \quad (2.27)$$

3. Enfin il faut déterminer les coefficients a_j qui rendent le résidu nul ou minimal au sens de (2.28).

$$(R, W_k(x)) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

Où :

$W_k(x)$ fonction de pondération

Et le produit interne est définie comme :

$$(f, g) = \int_D f g \, dx dy \quad (2.29)$$

La relation (2.28), d'où la méthode prend le nom, est analogue à la forme faible de l'équation :

$$(L(u), W_k(x)) = 0 \quad (2.30)$$

Pour déterminer les coefficients a_j il est nécessaire d'avoir des relations indépendantes, et pour une forme analytique des $W_k(x)$ il est possible de choisir des relations indépendantes.

Une classification de la méthode peut se faire suivant le type de résidu obtenu [Collatz, 1960] :

- (i) L'équation différentielle est satisfaite exactement ($R = 0$) à l'intérieur du domaine : les méthodes sont dénommées *Méthodes aux frontières* (*Boundary Methods*).
- (ii) Les conditions aux frontières sont satisfaites exactement ($R_b = 0$) : les méthodes sont appelées *Méthodes Intérieures* (*Interior Methods*).
- (iii) Le résidu s'annule nulle part on parle alors *Méthodes Mixtes*.

Les méthodes des résidus pondérés sont définies en général pour les méthodes intérieures, comme dans le cas de l'approximation (2.26), même si les méthodes aux frontières et mixtes ne sont pas exclues.

Il existe diverses méthodes qui forment partie de la famille des méthodes des résidus pondérés, elles se différencient entre elles par le choix des fonctions de pondération W_k , les plus connus sont :

- La méthode de Galerkin. Ici les fonctions de pondérations sont choisies dans la même famille que les fonctions de forme.

$$W_k(x) = \phi_k(x) \quad k = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

Dans cette méthode les conditions suivantes sont posées sur le choix des fonctions :

- (i) Les fonctions de pondération sont choisies dans la même famille que les fonctions de forme
- (ii) Les fonctions de pondération et de forme doivent être linéairement indépendantes.
- (iii) Les fonctions de pondération et de forme doivent être les N premiers éléments d'une base de fonctions.
- (iv) Les fonctions de forme doivent satisfaire exactement les conditions aux frontières.

Cette méthode est à la base des méthodes modernes telles que les méthodes de Galerkin spectrales et les méthodes d'éléments finis de Galerkin.

- La méthode de Galerkin généralisée. Ici les fonctions de pondérations sont similaires aux fonctions de forme :

$$W_k(x) = P_k(x) \quad (2.32)$$

Dans ce cas $P_k(x)$ est une fonction analytique similaire à ϕ_k mais avec des termes ou facteurs additionnels pour imposer des conditions à la solution.

- La méthode des Moments. Ici les fonctions de pondération sont définies comme :

$$W_k(x) = x^k, \quad k = 0, \dots, n \quad (2.33)$$

- La méthode des Moindres Carrés.

$$W_k(x) = \frac{\partial R}{\partial a_k} \quad (2.34)$$

Où a_k représente les coefficients à déterminer dans l'expression (2.26).

- La méthode des Sous-Domains. Ici le domaine est divisé en n sous domaines D_j , qui peuvent se superposer, les fonctions de pondération sont alors définies comme :

$$W_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } D_k \\ 0 & \text{dehors} \end{cases} \quad (2.35)$$

Avec cette formulation la méthode devient la même que la méthode des volumes finis.

- La méthode de Collocation. Il s'agit en fait d'une variante de la méthode des sous-domaines, où les sous-domaines sont des points, appelés points de collocation. Dans ce cas, les fonctions de pondération sont de la forme :

$$W_k(x) = \delta(x - x_k) \quad (2.36)$$

Où δ indique la fonction impulsion ou delta de Dirac, et x_1, \dots, x_n correspondent aux coordonnées des points de collocation répartis sur le domaine.

Dans ce cas (2.28) se réduit à un ensemble d'équations : $R(x_k) = 0$

Un point important dans cette méthode est le choix des points de collocation, [Villadsen et Stewart, 1967] ont montré que la solution était plus précise pour un choix des points de collocation placés aux racines des polynômes de Jacobi. Cette méthode est appelée "*Méthode de Collocation Orthogonale*".

Une comparaison subjective de quelques unes de ces méthodes a été réalisée par [Fletcher, 1984], et se résume dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1. Comparaison subjective des différentes méthodes de résidus pondérés.

Méthode	Galerkin	Moindres Carrés	Sous Domaines	Collocation
Précision	Très grande	Très grande	Grande	Modérée
Facilité de formulation	Modérée	Pauvre	Bonne	Très bonne
Remarques additionnelles	Equivalente à la méthode de Ritz si applicable	Non adéquate pour des problèmes de valeurs propres ou évolutions	Equivalente à la méthode de volumes finis, bonne pour des formulations de conservation	Collocation orthogonale donne une grande précision

Il est aussi noté par [Villadsen et Stewart, 1967] que la méthode de collocation orthogonale peut se voir comme une méthode analogue discrète de la méthode de Galerkin. Leurs essais ont montré que celle-ci donne une précision presque identique à la méthode de Galerkin, tout en étant plus simple à mettre en œuvre.

2.3.4.2. Résolution des Equations de Saint-Venant par Collocation

La méthode de collocation appliquée aux Equations de Saint-Venant revient à choisir un nombre n de points de collocation x_i et, pour chaque point, à faire l'approximation :

$$h_a(x_i, t) = \sum_{j=1}^n h_j(t) N_j(x_i) \quad (2.37)$$

$$Q_a(x_i, t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t) N_j(x_i) \quad (2.38)$$

Où :

$\bar{Q} = \{Q_j(t)\}$ et $\bar{h} = \{h_j(t)\}$ sont les coefficients à calculer

Les $N_j(x_i)$ désignent les fonctions de forme choisies évaluées en x_i .

Pour simplifier les notations, on note : $h_a(x_i, t) = h_{ai}$, $Q_a(x_i, t) = Q_{ai}$, $h_j(t) = h_j$ et $Q_j(t) = Q_j$.

L'introduction de ces approximations dans les équations de Saint-Venant donne alors pour chaque point de collocation x_i :

$$\begin{aligned} B \frac{\partial h_{ai}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{ai}}{\partial x} - q &= R_1(x_i, \bar{h}, \bar{Q}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial Q_{ai}}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial (Q_{ai}^2 / h_{ai})}{\partial x} + g B h_{ai} \left(\frac{\partial h_{ai}}{\partial x} - I + J_i \right) - k_q q \frac{Q_{ai}}{B h_{ai}} &= R_2(x_i, \bar{h}, \bar{Q}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avec :

$$J_i = \frac{Q_{ai}^2}{k^2 B^2 h_{ai}^2 \left(\frac{B h_{ai}}{B + 2 h_{ai}} \right)^{4/3}} \quad (2.40)$$

On obtient un système de $2n$ équations et $2n$ inconnues en \bar{h} et \bar{Q} :

$$\begin{aligned} R_1(x_i, \bar{h}, \bar{Q}) &= 0 \\ R_2(x_i, \bar{h}, \bar{Q}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Soit sous sa forme faible :

$$\begin{cases} B \frac{\partial h_{ai}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{ai}}{\partial x} - q = 0 \\ \frac{\partial Q_{ai}}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial (Q_{ai}^2 / h_{ai})}{\partial x} + g B h_{ai} \left(\frac{\partial h_{ai}}{\partial x} - I + J_i \right) - k_q q \frac{Q_{ai}}{B h_{ai}} = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Comme les termes $N_j(x_i)$ dépendent seulement de x et les coefficients h_j et Q_j dépendent seulement de t il est possible de simplifier l'équation en dérivant les termes correspondant, de plus les termes $N_j(x_i)$ sont constants une fois introduits les point de collocation pour une fonction de forme donnée donc, il est possible de les écrire sur une matrice N_{ji} et de même pour les dérivées par rapport à x sur une matrice N'_{ji} .

Finalement après substitution dans les équations le nouveau système d'équations est :

Pour $i = 1$ à n :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dot{h}_j N_{ji} &= \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) \\ \sum_{j=1}^n \dot{Q}_j N_{ji} &= - \frac{2 \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right) \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right)} + \frac{\left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right)^2} \\ &\quad - g B \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right) \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J \right) + \frac{k_q q \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right)}{B \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Avec :

$$J_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right)^2}{k^2 B^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right)^2 \left(\frac{B \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right)}{B + 2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N_{ji} \right)} \right)^{4/3}} \quad (2.44)$$

$$N'_{ji} = \frac{\partial N_j}{\partial x}(x_i) \quad (2.45)$$

Nous avons donc transformé le système de 2 équations non linéaires aux dérivées partielles avec 2 inconnues, en un système de $2n$ équations différentielles ordinaires avec $2n$ inconnues. Il reste alors à résoudre ce nouveau système avec une méthode traditionnelle de solutions d'équations différentielles, telle que la méthode de Runge-Kutta par exemple.

Il faut noter de plus, qu'avec cette méthode le nouveau système obtenu est explicite, donc la stabilité numérique de la solution est sujette à la condition de Courant, comme pour la méthode de discrétisation spatiale explicite. Il sera donc nécessaire de choisir une valeur pour la période de temps de simulation adéquate.

2.3.4.3. Mise en œuvre

Dans la mise en œuvre de la méthode de collocation il existe plusieurs points importants à noter : Les fonctions de forme utilisées, la localisation des points de collocation et l'introduction des conditions limites internes et externes du système.

2.3.4.3.1. Fonctions de forme utilisées

Le choix des fonctions de forme est en principe soumis, en théorie, à la seule condition d'être un jeu de fonctions linéairement indépendantes, mais dans la pratique il est intéressant d'utiliser des fonctions qui puissent rendre plus simple le calcul de la solution, et qui permettent en plus l'obtention d'une solution plus précise et plus robuste.

En fonction des objectifs indiqués, les fonctions de forme choisies sont les fonctions d'interpolation de Lagrange [Rappaz et Picasso, 1998] [Fortin, 1995]. L'intérêt des fonctions d'approximation de Lagrange est l'obtention de coefficients $h_j(t)$ et $Q_j(t)$ correspondants aux valeurs physiques des hauteurs et des débits aux points de collocation.

Etant donné un ensemble de points de collocation x_1, \dots, x_n , ces fonctions de forme se construisent avec la récurrence suivante :

$$N_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (2.46)$$

Soit sous la forme développée :

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)} \\
N_2 &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)} \\
&\vdots \\
N_n &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Ce type de fonction de forme présente l'avantage de produire des valeurs de 1 pour la variable avec l'indice correspondant au point de collocation et zéro pour les autres valeurs, donc on obtient une matrice unitaire pour les N_{ji} , c'est à dire :

$$N_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \tag{2.48}$$

Ainsi il existe une relation directe entre les coefficients à calculer dans les nouvelles équations et les valeurs physiques réelles, i.e. :

$$\begin{aligned}
h_a(t, x_i) &= h_i(t) \\
Q_a(t, x_i) &= Q_i(t)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Dans ce cas le modèle se simplifie et les équations de Saint-Venant deviennent :

Pour $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_i &= \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) \\
\dot{Q}_i &= - \frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B h_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B h_i^2} - g B h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_i}{h_i}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Avec :

$$J_i = \frac{Q_i^2}{k^2 B^2 h_i^2 \left(\frac{B h_i}{B + 2 h_i} \right)^{4/3}} \tag{2.51}$$

2.3.4.3.2. Localisation des points de collocation

En principe la méthode de collocation ne pose pas de conditions spécifiques sur la localisation des points de collocation, cependant cette localisation est très importante dans cette méthode pour la précision du résultat. Il est à noter, que la solution des équations différentielles par cette méthode est une approximation de la solution par interpolation polynomiale, et donc présente les caractéristiques

propres à ces méthodes d'approximation, en particulier vis-à-vis du nombre et du choix des points de collocation.

Il est bien connu dans ces méthodes que pour obtenir une solution acceptable il est nécessaire d'utiliser un certain nombre de points, et que quand le nombre de points devient très élevé avec une répartition équidistante, la solution présente des oscillations [Théodor,1994]. Ces oscillations apparaissent principalement sur les bords, et sont dues à l'ordre élevé du polynôme d'interpolation.

Pour éviter ce problème il est alors nécessaire de disposer les points de collocation suivant les racines de polynômes orthogonaux, de sorte que les points sont plus rapprochés sur les bords réduisant ainsi les oscillations.

Il existe plusieurs travaux sur le choix des points de collocation parmi les quels on peut citer les travaux de [Villadsen et Michelsen,1978] et [Lefèvre et al,2000]. Dans le premier travail il est démontré qu'un très bon choix des points de collocation est donné par les racines des polynômes de Jacobi, dans un domaine normalisé entre 0 et 1, au sens où la solution devient presque identique à une solution par la méthode de Galerkin, connue pour être très précise. Ces polynômes peuvent se construire suivant la récurrence :

$$\begin{aligned}
 Poly_{(0)} &= 1 \\
 Poly_{(1)} &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \left(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)x \\
 &\vdots \\
 Poly_{(n)} &= \frac{1}{2} \frac{(2n+a+b-1)(a^2-b^2 + (2n+a+b-2)(2n+a+b)x)Poly_{(n-1)} -}{n(n+a+b)(2n+a+b-2)} - \\
 &\quad \frac{(n+a-1)(n+b-1)(2n+a+b)Poly_{(n-2)}}{n(n+a+b)(2n+a+b-2)}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Avec : a et b des coefficients positifs.

Un cas particulier des polynômes de Jacobi est celui des polynômes de Legendre, construits avec a et b égaux à zéro, de sorte que la récurrence devient :

$$\begin{aligned}
 Poly_{(0)} &= 1 \\
 Poly_{(1)} &= x \\
 &\vdots \\
 Poly_{(n)} &= \frac{(2n-1)xPoly_{(n-1)}}{n} - \frac{2(n-1)^2 Poly_{(n-2)}}{n(2n-2)}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Ces polynômes ont été utilisés avec succès par [Alam et Bhuiyan,1995], pour la résolution d'un problème de rupture de barrage, avec un modèle d'éléments finis par collocation à partir des équations de Saint-Venant.

Un résultat plus classique sur les méthodes numériques montre que pour obtenir une erreur minimale, pour une interpolation polynomiale de Lagrange, le meilleur choix pour la localisation des points de collocation est celui des racines des polynômes de Tchebycheff [Théodor,1994]. Ces polynômes peuvent se construire avec la récurrence :

$$\begin{aligned} Poly_{(0)} &= 1 \\ Poly_{(1)} &= x \\ &\vdots \\ Poly_{(n)} &= 2xPoly_{(n-1)} - Poly_{(n-2)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Il faut noter qu'aucune des racines de ces polynômes ne donne des points aux extrémités des biefs, de sorte qu'il faudra ajouter aux points calculés deux points aux extrémités pour pouvoir satisfaire les conditions limites du système. Ceci n'est pas nécessaire pour tout type de système physique. Finalement il faudra toujours calculer les racines d'un polynôme de degré $n-2$, pour obtenir n points de collocation.

Dans le simulateur réalisé au cours de cette thèse divers types de positionnement des points de collocation sont disponibles, notamment un positionnement équidistant, un positionnement aux racines des polynômes de Legendre ou encore aux racines des polynômes de Tchebycheff.

2.3.4.3.3. Introductions des conditions aux limites du système

Avec les fonctions de forme de Lagrange, l'introduction des entrées est très simple : la relation directe entre les valeurs physiques et les variables à calculer permet en effet de substituer directement les valeurs des entrées dans le système. A noter qu'il existe ici les mêmes possibilités pour le choix des conditions limites que dans les méthodes antérieures, et que dans cette méthode il faut éliminer l'équation correspondant à la condition limite choisie. En définitive le système sera donné de façon différente selon les conditions limites choisies :

Conditions aux limites Q_{amont} et Q_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n points de collocation donnent n états x_1, \dots, x_n . Pour les débits les deux valeurs aux extrémités Q_1 et Q_n sont prise comme commandes u_1 et u_2 , et les $n-2$ valeurs restantes donnent $n-2$ états x_{n+1}, \dots, x_{2n-2} .

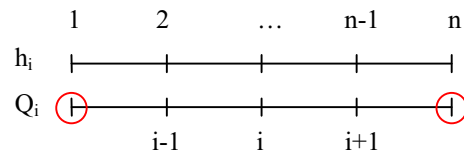


Figure 2.8. Conditions aux limites $Q_{\text{am}} - Q_{\text{av}}$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dot{h}_i = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) & i = 1, \dots, n \\ \dot{x}_{i+n} = \dot{Q}_i = -\frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{Bh_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{Bh_i^2} - gBh_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_i}{h_i} & i = 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.55)$$

Notons cependant que pour ce choix de conditions aux limites il existe une relation entre les équations des dynamiques des niveaux telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{h}_i = 0$, ce qui conduit à un état non commandable sur le système obtenu.

Il est possible de contourner ce problème en utilisant moins de points pour l'approximation du niveau que pour l'approximation du débit, les possibilités existantes pour cette solution sont présentées au paragraphe 2.3.4.3.4, qui traite de l'utilisation d'un nombre de points différent sur h et Q .

Conditions aux limites Q_{amont} et h_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n points de collocation donnent $n-1$ états x_1, \dots, x_{n-1} , avec la valeur à l'extrémité aval h_n prise comme commande u_2 . Pour les débits la valeur à l'extrémité amont Q_1 est prise comme commande u_1 , et les $n-1$ valeurs restantes donnent $n-1$ états x_n, \dots, x_{2n-2} .

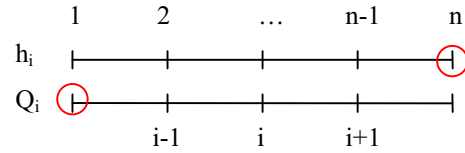


Figure 2.9. Condition aux limites Q_{am} - h_{av}

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dot{h}_i = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i+n-2} = \dot{Q}_i = -\frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{Bh_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{Bh_i^2} - gBh_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_i}{h_i} & i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.56)$$

Conditions aux limites h_{amont} et Q_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n points de collocation donnent $n-1$ états x_1, \dots, x_{n-1} , avec la valeur à l'extrémité amont h_1 prise comme commande u_1 . Pour les débits la valeur à l'extrémité aval Q_n est prise comme commande u_2 , et les $n-1$ valeurs restantes donnent $n-1$ états x_n, \dots, x_{2n-2} .

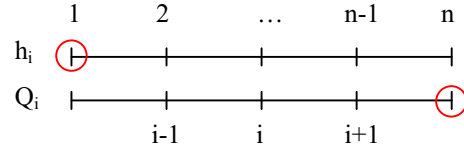


Figure 2.10. Conditions aux limites $h_{\text{am}} - Q_{\text{av}}$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i-1} = \dot{h}_i = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) & i = 2, \dots, n \\ \dot{x}_{i+n-1} = \dot{Q}_i = - \frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B h_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B h_i^2} - g B h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_i}{h_i} & i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Conditions aux limites h_{amont} et h_{aval}

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n points de collocation donnent $n-2$ états x_1, \dots, x_{n-2} , avec les valeurs aux extrémités h_1 et h_n prises comme commandes u_1 et u_2 . Pour les débits les n valeurs restantes donnent n états x_{n-1}, \dots, x_{2n-2} .

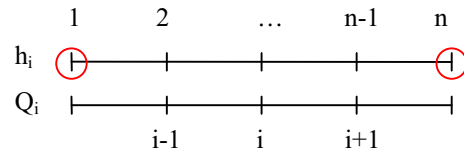


Figure 2.11. Conditions aux limites $h_{\text{am}} - h_{\text{av}}$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i-1} = \dot{h}_i = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) & i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i+n-1} = \dot{Q}_i = - \frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B h_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B h_i^2} - g B h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_i}{h_i} & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.58)$$

Conditions aux limites h_{amont} et Q_{amont}

Ce dernier cas correspond à une condition particulière de canaux avec un écoulement torrentiel, c'est à dire un nombre de Froude > 1 , ce qui est le cas en général pour un canal avec une pente forte ou une rivière qui ne possède pas d'ouvrage à l'aval.

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n points de collocation donnent $n-1$ états x_1, \dots, x_{n-1} , avec la valeur à l'extrémité amont h_1 prise comme commande u_1 . Pour les débits la valeur à l'extrémité amont Q_1 est prise comme commande u_2 , et les $n-1$ valeurs restantes donnent $n-1$ états x_n, \dots, x_{2n-2} .

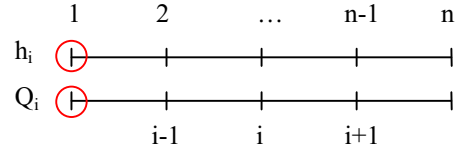


Figure 2.12. Conditions aux limites $Q_{am} - h_{am}$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dot{h}_i = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i+n-1} = \dot{Q}_i = -\frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B h_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B h_i^2} - g B h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_i}{h_i} & i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.59)$$

L'introduction des conditions limite internes se fait pour ce système comme il est décrit au point 1.3.6., c'est-à-dire qu'il faut séparer le système en deux au point de la prise latérale, et le transformer en deux systèmes, en ajoutant les équations de liaison.

2.3.4.3.4. Utilisation d'un nombre de points n différent pour h et Q

Il existe certaines conditions particulières de la méthode pour les quelles il est possible (et dans certains cas souhaitable) d'utiliser un nombre différent de points de collocation pour h et pour Q .

Deux cas sont donc ici possibles :

Premier cas :

Utiliser un nombre de points différent mais avec les points intérieurs sur les mêmes coordonnées. Plus précisément, il est possible de n'utiliser les points aux extrémités que pour la variable sur la condition limite utilisée, et donc ne pas prendre en compte l'équation pour l'autre variable. Par exemple pour :

Conditions aux limites Q_{amont} et Q_{aval}

Ici $n_2 = n_1 + 2$, avec les points intérieurs complets.

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n_1 points de collocation donnent n_1 états x_1, \dots, x_{n_1} .

Pour les débits, les valeurs aux extrémités Q_1 et Q_{n_2} sont prise comme commande u_1 et u_2 , et

les valeurs approchés aux $n_2 - 2$ points de collocation restants donnent $n_2 - 2$ états

$$x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2-2} \dots$$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dot{h}_{i1} = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=2}^{n_2} Q_{j2} N_2'_{ji} \right) & i1 = 1, \dots, n_1 \\ \dot{x}_{i+n1} = \dot{Q}_{i2} = - \frac{2Q_{i2} \left(\sum_{j=2}^{n_2} Q_{j2} N_2'_{ji} \right)}{B h_{i2}} + \frac{Q_{i2}^2 \left(\sum_{j=1}^{n_1} h_{j1} N_1'_{ji} \right)}{B h_{i2}^2} - g B h_{i2} \left(\sum_{j=1}^{n_1} h_{j1} N_1'_{ji} - I + J_{i2} \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_{i2}}{h_{i2}} & i2 = 2, \dots, n_2 - 1 \end{cases} \quad (2.60)$$

Avec : $h_{i2} = h_{i1-1}$

Conditions aux limites h_{amont} et h_{aval}

Ici $n_1 = n_2 + 2$, avec les points intérieurs complets.

Pour les niveaux, les valeurs aux extrémités h_1 et h_{n_1} sont prises comme commande u_1 et u_2 , et

les valeurs approchées aux $n_1 - 2$ points de collocation restant donnent $n_1 - 2$ états

x_1, \dots, x_{n_1-2} . Pour les débits, et les valeurs

approchées aux n_2 points de collocation donnent

$$n_2 \text{ états } x_{n_1-1}, \dots, x_{n_1+n_2-2}.$$

Le nouveau système est :

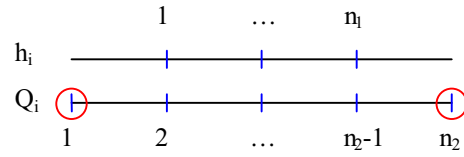


Figure 2.13. Conditions aux limites $Q_{\text{am}} - Q_{\text{av}}$, n différents pour h et Q

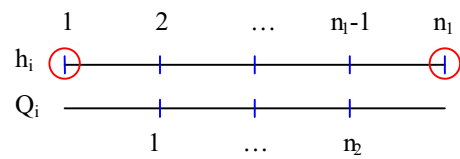


Figure 2.14. Conditions aux limites $h_{\text{am}} - h_{\text{av}}$, n différents pour h et Q

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = \dot{h}_{i1} = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j2=1}^{n2} Q_{j2} N_{2'ji} \right) \quad i1 = 2, \dots, n1 - 1 \\ \dot{x}_{i+n1} = \dot{Q}_{i2} = - \frac{2Q_{i2} \left(\sum_{j2=1}^{n2} Q_{j2} N_{2'ji} \right)}{B h_{i2}} + \frac{Q_{i2}^2 \left(\sum_{j1=1}^{n1} h_{j1} N_{1'ji} \right)}{B h_{i2}^2} - g B h_{i2} \left(\sum_{j1=1}^{n1} h_{j1} N_{1'ji} - I + J_{i2} \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_{i2}}{h_{i2}} \quad i2 = 1, \dots, n2 \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Avec : $h_{i2} = h_{i1-1}$

Deuxième cas :

Utiliser un nombre de points différent avec les points sur des coordonnées différentes. Ceci est le cas plus général, mais il introduit des calculs supplémentaires car il faudra calculer les valeurs approchées des variables aux points correspondant pour chaque équation. Par exemple pour :

Conditions aux limites Q_{amont} et Q_{aval}

Et si on choisie arbitrairement que $n_2 = n_1 + 1$.

Pour les niveaux, les valeurs approchées aux n_1 points de collocation donnent n_1 états x_1, \dots, x_{n1} .

Pour les débits, les valeur aux extrémités Q_1 et Q_{n2} sont prise comme commande u_1 et u_2 ,

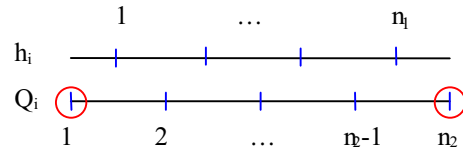


Figure 2.15. Conditions aux limites $Q_{\text{am}} - Q_{\text{av}}$, n différents pour h et Q

et les valeurs approchés aux $n_2 - 2$ points de collocation restants donnent $n_2 - 2$ états $x_{n1+1}, \dots, x_{n1+n2-2}$.

Le nouveau système est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = \dot{h}_{i1} = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j2=1}^{n2} Q_{j2} N_{2'ji} \right) \quad i1 = 1, \dots, n1 \\ \dot{x}_{i+n1} = \dot{Q}_{i2} = - \frac{2Q_{i2} \left(\sum_{j2=1}^{n2} Q_{j2} N_{2'ji} \right)}{B h_{i2}} + \frac{Q_{i2}^2 \left(\sum_{j1=1}^{n1} h_{j1} N_{1'ji} \right)}{B h_{i2}^2} - g B h_{i2} \left(\sum_{j1=1}^{n1} h_{j1} N_{1'ji} - I + J_{i2} \right) + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_{i2}}{h_{i2}} \quad i2 = 2, \dots, n2 - 1 \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Ou il est nécessaire de calculer les valeurs des niveaux correspondants aux points de collocation pour le débit avec la relation :

$$h_{i2} = \sum_{j=1}^{n_1} h_{j1} N_j(x_{i2}) \quad (2.63)$$

Cet exemple est la représentation générale du modèle utilisé par la suite pour la commande.

Il existe dans ce deuxième cas d'autres configurations possibles tant en nombre de points qu'en conditions limites que nous ne détailleront pas.

2.3.5. Modèle de commande

La commande est basée sur un modèle de dimension finie obtenu par la résolution des équations de Saint-Venant en utilisant la méthode de collocation à trois points équidistants pour le débit ($n_2 = 3$) et deux points aux extrémités du bief pour le niveau ($n_1 = 2$). Les conditions aux limites utilisées (variables de commande) sont les débits amont et aval.

Le choix de ce modèle est dû au fait que pour la commande il est nécessaire de se baser sur un modèle suffisamment précis, mais aussi assez simple pour ne pas être obligé de faire une multitude de mesures, et pour avoir des algorithmes de commande plus simples et donc qui requièrent moins de temps de calcul.

Le choix des variables de commande est dû à des raisons physiques, car la commande d'un canal réel porte sur l'ouverture des vannes, donc sur les débits.

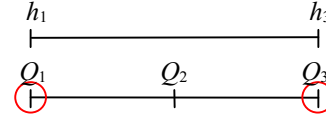
Dans le cas particulier de notre modèle, avec comme commande u , le débit d'eau aux deux extrémités du bief de canal, i.e. $u_1 = Q_1$, $u_2 = Q_3$ (voir Figure 2.16), en tenant compte des infiltrations du canal, en introduisant le terme de friction, et les commandes, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{B} [q - (u_1 N'_{11} + Q_2 N'_{21} + u_2 N'_{31})] \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{B} [q - (u_1 N'_{13} + Q_2 N'_{23} + u_2 N'_{33})] \\ \dot{Q}_2 = - \frac{2Q_2(u_1 N'_{12} + Q_2 N'_{22} + u_2 N'_{32})}{Bh_2} + \frac{Q_2^2(h_1 N'_{12} + h_3 N'_{32})}{Bh_2^2} \\ \quad - gBh_2 \left[(h_1 N'_{12} + h_3 N'_{32}) - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \end{cases} \quad (2.64)$$

Avec :

$$N1'_{ij} = \begin{bmatrix} N1'_{11} & N1'_{13} \\ N1'_{31} & N1'_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N2'_{ij} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Figure 2.16. Conditions limites $Q_{am} - Q_{av}$

Le niveau au milieu du bief, qui est nécessaire pour l'équation sur le débit est obtenue par la relation :

$$h_2 = h_1 N1_1(x = \frac{L}{2}) + h_3 N1_3(x = \frac{L}{2}) = \frac{1}{2}(h_1 + h_3) \quad (2.66)$$

En effet :

$$N1_1(x) = \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}; \quad N1_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1}; \quad x_1 = 0; \quad x_3 = L \quad (2.67)$$

De même pour les dérivés de fonctions de forme nécessaires sur l'équation du débit :

$$N1'_1(x) = \frac{1}{x_1 - x_3} = -\frac{1}{L}; \quad N1'_3(x) = \frac{1}{x_3 - x_1} = \frac{1}{L} \quad (2.68)$$

Donc le modèle de base pour la commande peut s'écrire comme :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{BL} [qL - 4Q_2 + 3u_1 + u_2] \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{BL} [qL + 4Q_2 - u_1 - 3u_2] \\ \dot{Q}_2 = -\frac{2Q_2(-u_1 + u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} + \frac{k_q q Q_2}{B h_2} \\ \quad - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] \end{cases} \quad (2.69)$$

2.4. VALIDATION DU MODELE

2.4.1. Points d'équilibre du modèle de collocation

Les points d'équilibre du modèle obtenu par collocation s'obtiennent pour :

$$\begin{cases} \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right) = 0 \\ - \frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B h_i} + \frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B h_i^2} - g B h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I + J_i \right) + \frac{k_q q Q_i}{B h_i} = 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

Cela revient à :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_{je} N'_{ji} &= q \\ - \frac{Q_{ie}^2 \left(\sum_{j=1}^n h_{je} N'_{ji} \right)}{B h_{ie}^2} + g B h_{ie} \left(\sum_{j=1}^n h_{je} N'_{ji} - I + J_{ie} \right) &= (k_q - 2) q \frac{Q_{ie}}{B h_{ie}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ces deux conditions d'équilibre correspondent à celles obtenues pour les équations de Saint-Venant (équation 1.27 au paragraphe 1.3.6).

Avec les approximations des dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_e(x)}{\partial x} &\approx \sum_{j=1}^n h_{je} N'_{ji} \\ \frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} &\approx \sum_{j=1}^n Q_{je} N'_{ji} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Sachant que les N'_{ji} sont fonction de $1/L$.

De la même façon pour une infiltration nulle

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_{je} N'_{ji} &= 0 \\ - \frac{Q_{ie}^2 \left(\sum_{j=1}^n h_{je} N'_{ji} \right)}{B h_{ie}^2} + g B h_{ie} \left(\sum_{j=1}^n h_{je} N'_{ji} - I + J_{ie} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ce sont des conditions d'équilibre qui correspondent à celles obtenues pour les équations de Saint-Venant (équation 1.28) :

Et pour un régime uniforme correspondant à :

$$\frac{\partial h_e(x)}{\partial x} = 0 \quad (2.74)$$

Ce qui est aussi vérifié dans le modèle par collocation car dans ce cas :

$$\sum_{j=1}^n h_{je} N'_{ji} = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h_{je} = 0 \quad \forall j \\ \text{ou} \\ h_{je} = h_e \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h_{je} = h_e \text{ car } \sum_{j=1}^n N'_{ji} = 0 \quad (2.75)$$

Dans ce cas, le débit d'équilibre constant Q_e est donné, comme pour les équations de Saint-Venant (équation 1.30) par :

$$J_{ie}(Q_e, h_e) = I \quad (2.76)$$

Il n'est pas possible de trouver un régime d'équilibre uniforme pour une infiltration non nulle, cela de façon identique aux équations de Saint-Venant, car dans ce cas les équations deviennent:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n Q_{je} N'_{ji} &= q \\ gBh_e(J_{ie} - I) &= (k_q - 2)q \frac{Q_{ie}}{Bh_e} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Et dans ce cas la seconde équation ne se vérifie que quand le débit est constant sur tous les points situés le long du canal $Q_{ie} = Q_e$, et il n'est pas possible d'avoir $Q_e \sum_{j=1}^n N'_{ji} = q$ car $\sum_{j=1}^n N'_{ji} = 0$.

Cela garantit donc la consistance du modèle obtenu par la méthode de collocation.

Cependant le choix du nombre de points de collocation ainsi que les conditions limites peuvent perturber cette consistance. Ainsi, si on prend l'exemple du modèle de commande, équation (2.69), les conditions d'équilibre s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} qL - 4Q_2 + 3u_1 + u_2 &= 0 \\ qL + 4Q_2 - u_1 - 3u_2 &= 0 \\ -\frac{2Q_2(-u_1 + u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} + \frac{k_q q Q_2}{B h_2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Des deux premières équations on obtient :

$$\frac{u_2 - u_1}{L} = q; \quad 2 \frac{Q_2 - u_1}{L} = q \quad (2.79)$$

Ce qui est cohérent avec

$$\frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} = q \quad (2.80)$$

De la quatrième équation on obtient :

$$-\frac{Q_2^2}{Bh_2^2} \frac{(-h_1 + h_3)}{L} + gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + J_2 \right] = (k_q - 2)q \frac{Q_2}{Bh_2} \quad (2.81)$$

Ce qui correspond bien à l'équilibre obtenu avec l'équation de Saint-Venant (équation 1.27) avec l'approximation :

$$\frac{\partial h_e(x)}{\partial x} \approx \frac{h_3 - h_1}{L} \quad (2.82)$$

Les équations d'équilibre sont dans le cas d'une infiltration nulle :

$$\begin{aligned} \frac{u_2 - u_1}{L} &= 0; \quad 2 \frac{Q_2 - u_1}{L} = 0 \\ \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + J_2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ici le régime d'équilibre correspond aussi à celui de l'équation de Saint-Venant.

Pour un régime d'écoulement uniforme on obtient :

$$J_2 = I \quad (2.84)$$

Ce modèle semble aussi, à première vue, consistant.

Mais dans ce cas il est bien possible d'avoir un régime uniforme ($h_1 = h_2 = h_3$) avec une infiltration non nulle, en effet dans ce cas les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{u_2 - u_1}{L} &= q; \quad 2 \frac{Q_2 - u_1}{L} = q \\ gBh_2 [-I + J_2] &= (k_q - 2)q \frac{Q_2}{Bh_2} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Et il existe bien des débits d'équilibre qui vérifient ces équations pour tout niveau d'équilibre $h_e = h_1 = h_2 = h_3$ choisi arbitrairement.

Remarque : Dans ce cas l'inconvénient provient de l'approximation de la variation du niveau dans l'espace (2.66) qui est très imprécise car obtenue par une différence finie du premier ordre construite à partir des points extrémaux du bief. Donc la ligne qui représente la surface de l'eau sera une droite de pente constante. Dans ce cas les différences de niveau d'un point à un autre du canal dues à une courbure de la ligne qui représente en réalité la surface de l'eau ne peuvent pas être représentées.

A cause de cette imprécision, l'équation à l'équilibre garantit seulement que les points d'équilibre des niveaux aux extrémités correspondent à ceux de l'équation de Saint-Venant. Les points d'équilibre des niveaux à l'intérieur du bief peuvent être différents des points d'équilibre physiques représentés par les équations de Saint-Venant, et seront placés sur la ligne droite tracée entre les niveaux amont et aval.

Pour ce modèle les points d'équilibre seront bien représentés seulement dans le cas d'une infiltration nulle avec un régime uniforme.

Cette remarque nous indique que le modèle de commande est insuffisant pour une simulation précise d'un bief de canal, par contre son utilisation pour la commande n'est pas exclue pour autant. Et il sera montré au chapitre 3 qu'avec un choix des sorties qui tient compte de cette imprécision il est possible de développer des commandes satisfaisantes.

2.4.2. Validation des algorithmes de simulation

Les solutions présentées dans la section précédente ont été mises en œuvre, en utilisant pour cela Matlab et Simulink.

Trois algorithmes ont été mis en place pour la simulation de canaux ouverts, en utilisant comme base les équations de Saint-Venant résolues par trois méthodes numériques : Différences finies avec le schéma de Preissmann, différences finies avec le schéma de discrétisation explicite et méthode de collocation orthogonale.

Les trois méthodes fonctionnent sur la base d'un schéma Simulink similaire, représenté de façon simplifiée par la Figure 2.17.

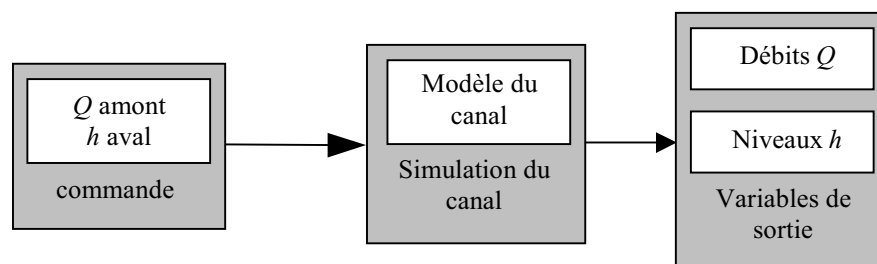


Figure 2.17. Schéma de simulation

Le schéma Simulink de base permet d'introduire toutes les variables et signaux d'entrée pour la simulation, de faire appel aux algorithmes de calcul de la solution et de présenter les résultats de simulation.

Les algorithmes sont faits pour des biefs de canaux en régime fluvial (sous-critique) et avec la possibilité d'utiliser les quatre options de conditions limites existant pour un tel régime. Cela permet d'utiliser par la suite l'une de ces possibilités de conditions limite au choix suivant la commande introduite.

L'idée ici est de comparer les résultats obtenus par la méthode de collocation à ceux obtenus avec des méthodes plus "reconnues" de façon à "valider" un modèle par collocation. Pour cette validation deux méthodes sont utilisées, la première est la comparaison entre les résultats de simulation obtenus par la

méthode de collocation et les résultats obtenus par la méthode de différences finies qui utilise la discrétisation de Preissmann. Cette dernière est utilisée ici comme "méthode de référence", car elle est très répandue pour la résolution des équations de Saint-Venant, et a déjà été validée par de multiples auteurs. La deuxième méthode de validation est la comparaison des valeurs propres du système obtenu par la méthode de Preissmann avec celles du modèle linéarisé et discrétisé obtenu par collocation.

De plus un test de performance est réalisé par la comparaison des résultats obtenus par la méthode de collocation avec ceux donnés par la méthode de discrétisation explicite, elle aussi largement répandue dans la littérature.

Pour cette validation les conditions aux limites de débit à l'amont Q_1 et niveau à l'aval h_n ont été choisies, car elles permettent une visualisation plus simple des variations de ces conditions et que ce sont les conditions limites les plus souvent utilisées pour la commande dans la littérature étudiée.

2.4.2.1. Comparaisons des simulations obtenues par Collocation avec celles du modèle de Preissmann

Pour cette première "validation" du modèle, on choisit de le soumettre à une variation des conditions aux limites dans le temps, et observer la réponse transitoire et stationnaire du système. Pour cela il faut faire des simulations sur un temps suffisamment long et choisir des entrées (conditions aux limites) convenables.

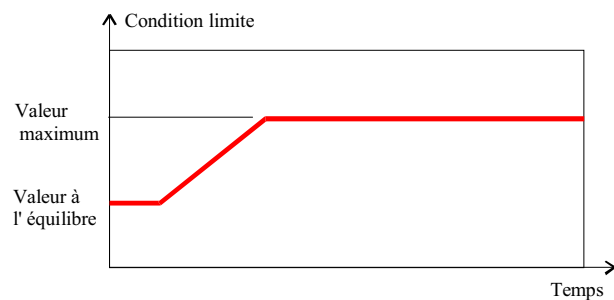


Figure 2.18. Evolution de la condition limite amont dans le temps

Le choix de la condition à la limite amont Q_1 ou entrée du système est une variation temporelle constante dans le temps (rampe) entre deux valeurs : une valeur d'équilibre pour que le système démarre convenablement et une valeur maximum qui peut être assimilée à une saturation de vanne par exemple (Figure 2.18). L'objectif d'un tel choix est de pouvoir interpréter facilement les résultats obtenus car c'est une entrée proche d'un échelon mais moins brusque. Il faut noter de plus que dans la réalité l'ouverture des vannes dans un canal est très proche de ce type d'entrée. La condition à la limite aval h_n a été laissée constante, et égale à une condition d'équilibre. De cette façon l'observation des effets se simplifie car ils sont dus à la variation d'une seule des conditions aux limites.

Il est important de noter que des tests ont été faits pour les quatre types de conditions aux limites et d'autres variations sur les valeurs de ces conditions aux limites. Les résultats obtenus sur ces tests sont similaires à ceux présentés par la suite, qui se limitent aux cas énoncés au paragraphe précédent.

La validation a été faite avec des biefs de canal rectangulaires, pour diverses longueurs, afin observer le nombre de points nécessaire pour modéliser les diverses longueurs de canal possibles.

Il est à noter que le nombre de sections prises, pour la simulation avec la méthode de Preissmann, est toujours supérieure au nombre minimal garantissant une simulation convenable pour être prise comme méthode de base. Par contre l'objectif de la méthode de collocation est de pouvoir obtenir un modèle simple et donc facile à manipuler, ce qui implique d'utiliser le moins de points possible, et pour cela seuls sont présentés les résultats satisfaisants avec ce nombre minimum de points.

Dans la validation du modèle il est important de prendre en compte le meilleur choix possible pour la localisation des points de collocation, et pour cela la première comparaison est faite sur la simulation avec les trois types de localisation de points de collocation retenues au paragraphe 2.3.4.3.2, pour un même nombre de points de collocation, une géométrie de canal identique, et sans infiltration.

La Figure 2.19 montre la simulation sur les extrémités et milieux du bief pour un bief de 1000 m, en utilisant les trois types de localisation pour les points de collocation. Le Tableau 2.2, montre la valeur de la moyenne de l'erreur, la moyenne de l'erreur normalisée, et la valeur maximale de l'erreur normalisée, pour cette même simulation, valeurs établies à partir de données de simulation sur 20 sections du bief.

Tableau 2.2. Comparaison des erreurs pour différents types de localisation des points de collocation.

Type de point	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
Equidistant	0.00174	0.1828	1.85	0.0056	0.28	3.01
Legendre	0.00171	0.1766	1.10	0.0075	0.37	1.41
Tchebycheff	0.00338	0.3435	2.27	0.0139	0.68	2.63

Les résultats montrent que le meilleur choix pour la localisation des points de collocation sont les racines des polynômes de Legendre (cas particulier des polynômes de Jacobi), même si dans les trois cas l'erreur reste petite et peut être considérée comme tolérable. D'autres tests ont été faits avec des longueurs et nombre de points de collocations différents, conduisant aux mêmes conclusions.

Une fois établie le choix de la localisation des points de collocation il est possible de valider les résultats obtenus par cette méthode pour diverses longueurs de biefs. La validation a été faite pour des biefs de section rectangulaire avec des longueurs allant de 200 m à 20 Km, et un tirant d'eau de 1.5 m. et une largeur du bief de 1 m. Pour toutes les simulations la pente est de 0.1% et le coefficient de Strickler de 25.

Du Tableau 2.3 au Tableau 2.7, et de la Figure 2.20 à la Figure 2.24 sont présentés les résultats pour les simulations de biefs d'une longueur de 200 m, 500 m, 1000 m, 10000 m, et 20000 m, avec des conditions limites en débit à l'amont et en niveau à l'aval. Pour chaque longueur sont présentés les résultats pour trois nombres de points de collocation. Ces résultats montrent que la méthode donne de très bons résultats si le nombre de points de collocation est suffisant (la plupart des erreurs moyennes des simulations montrées sont inférieures à 1 % de la valeur de la variable). Le choix de ce nombre de points varie selon la longueur du bief, et dépend de la valeur tolérée pour l'erreur : par exemple si la tolérance sur l'erreur maximum est 1 %, il faudra choisir 3 points pour 200 m, 4 pour 500, 6 pour 1000 m, etc. La variation imposée sur les conditions aux limites est celle indiquée au paragraphe précédent.

L'utilisation des autres possibilités pour les conditions aux limites, débit amont et aval, niveau amont et débit aval, et niveau aval et amont, donnent des résultats de simulation similaires, c'est-à-dire que la méthode peut être considérée comme valide pour toutes les possibilités de conditions aux limites indiquées au chapitre précédent. Ces simulations ne sont pas montrées ici pour ne pas tomber dans des répétitions jugées non nécessaires.

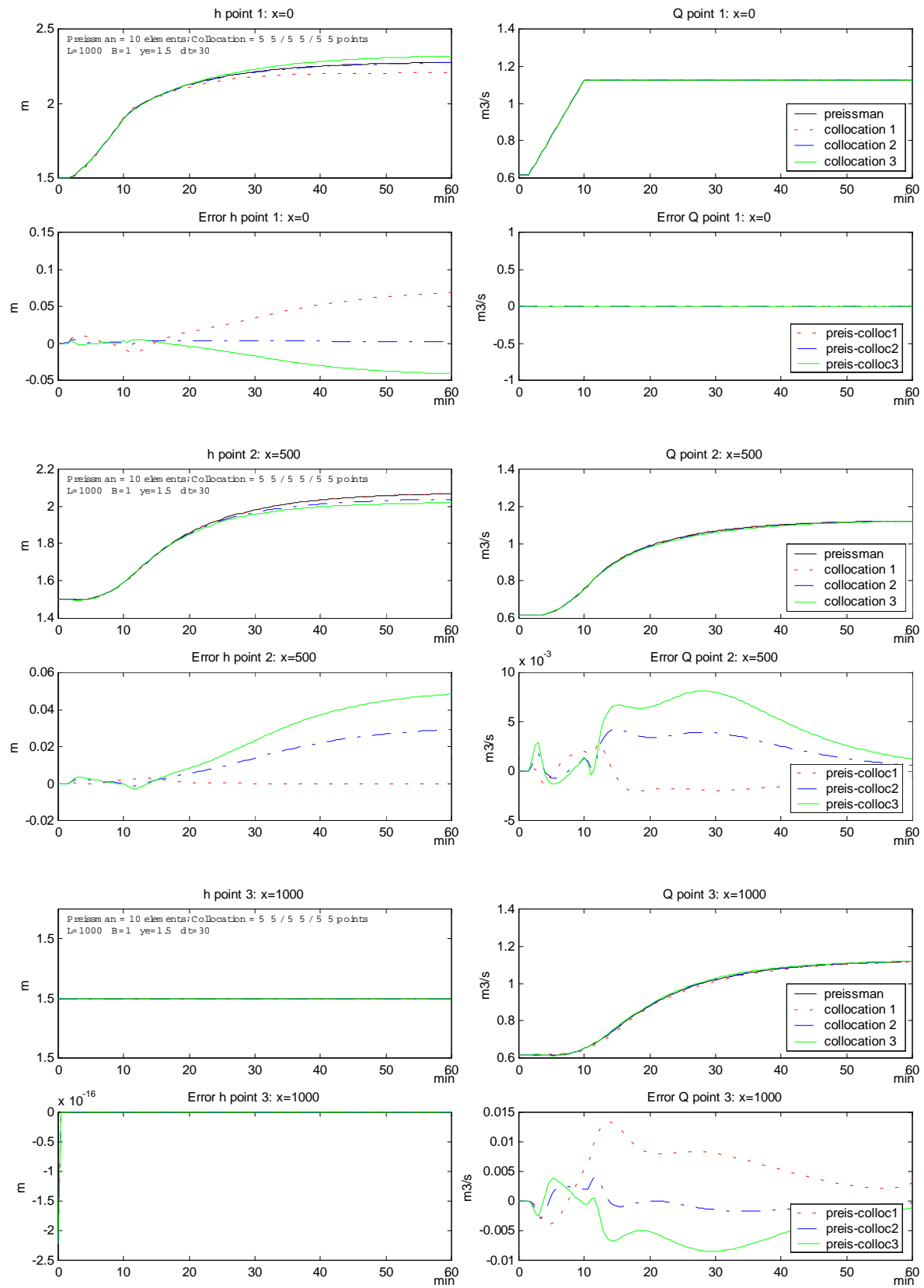


Figure 2.19. Comparaison d'utilisation de types de point équidistants, racines de Legendre et racines de Tchebycheff

Tableau 2.3. Comparaison des erreurs pour différents nombres de points de collocation.**L = 200 mts**

Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
2	0.01461	1.44	9.26	0.03438	1.98	8.63
3	0.00052	0.05	0.84	0.00344	0.20	1.00
4	0.00017	0.02	0.40	0.00086	0.05	0.14

Tableau 2.4. Comparaison des erreurs pour différents nombres de points de collocation.**L = 500 mts**

Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
3	0.00564	0.55	4.28	0.01202	0.64	5.28
4	0.00302	0.30	0.96	0.00536	0.29	1.32
5	0.00074	0.09	0.60	0.00194	0.11	0.43

Tableau 2.5. Comparaison des erreurs pour différents nombres de points de collocation.**L = 1000 mts**

Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
4	0.01168	1.14	3.34	0.02122	1.05	5.00
5	0.00171	0.18	1.10	0.00751	0.37	1.41
6	0.00065	0.07	0.77	0.00288	0.15	0.59

Tableau 2.6. Comparaison des erreurs pour différents nombres de points de collocation.**L = 10000 mts**

Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
16	0.00131	0.123	2.34	0.01073	0.44	2.71
17	0.00019	0.022	2.45	0.00679	0.29	1.59
18	0.00018	0.021	2.50	0.00536	0.23	1.63

Tableau 2.7. Comparaison des erreurs pour différents nombres de points de collocation.**L = 20000 mts**

Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
22	0.000248	0.027	3.24	0.01081	0.43	1.35
23	0.000217	0.024	3.33	0.00872	0.35	1.32
24	0.000199	0.022	3.39	0.00718	0.29	1.33

Les simulations antérieures ont été réalisées avec un bief sans infiltration. L'ajout d'une infiltration n'introduit pas de problème particulier au modèle à valider.

La Figure 2.25 montre les simulations pour un bief de 1000 m avec et sans infiltration. Sur la figure, les courbes notées avec l'indice 2 montrent l'évolution des variables pour une simulation sans infiltration (courbe du milieu dans tous les cas), les courbes notées avec l'indice 1 montrent l'évolution des variables pour une simulation avec apports par infiltration et les courbes dénotées avec l'indice 3 montrent l'évolution des variables pour une simulation avec pertes par infiltration. Les valeurs des erreurs globales sont données sur le Tableau 2.8, et on observe que les résultats sont presque aussi bons dans les trois cas, c'est-à-dire que l'erreur globale est un peu plus grande quand l'infiltration est présente, mais reste du même ordre.

Tableau 2.8. Comparaison des erreurs pour biefs avec et sans infiltration. 6 points de collocation. L = 1000 mts

infiltration	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
apport	0.00132	0.12	0.75	0.01043	0.48	1.70
sans	0.00054	0.06	0.76	0.00280	0.14	0.59
perte	0.00039	0.05	0.87	0.00060	0.04	0.25

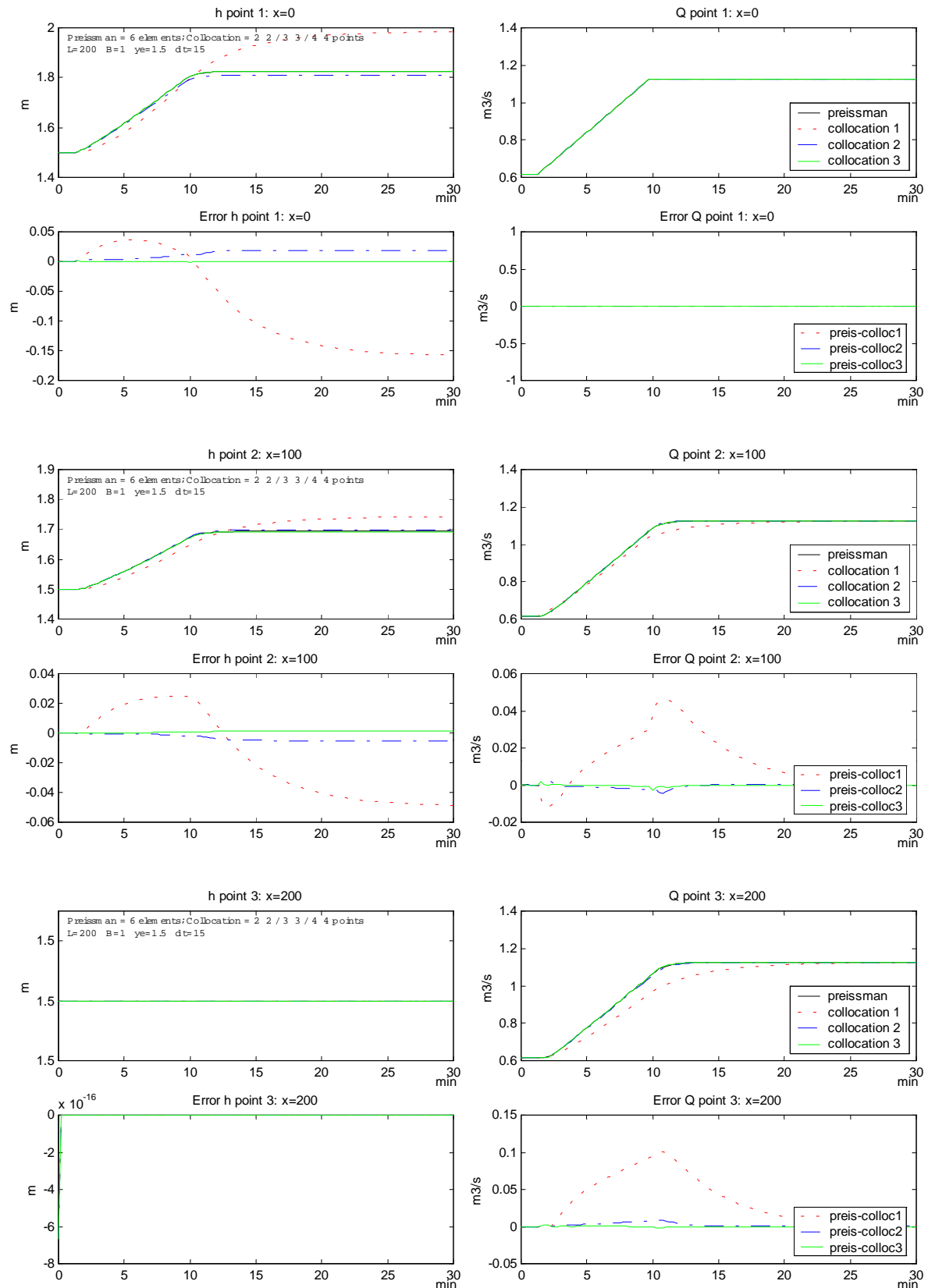


Figure 2.20. Simulation d'évolution du niveau et débit aux deux extrémités et au milieu pour un bief de 200 m de long

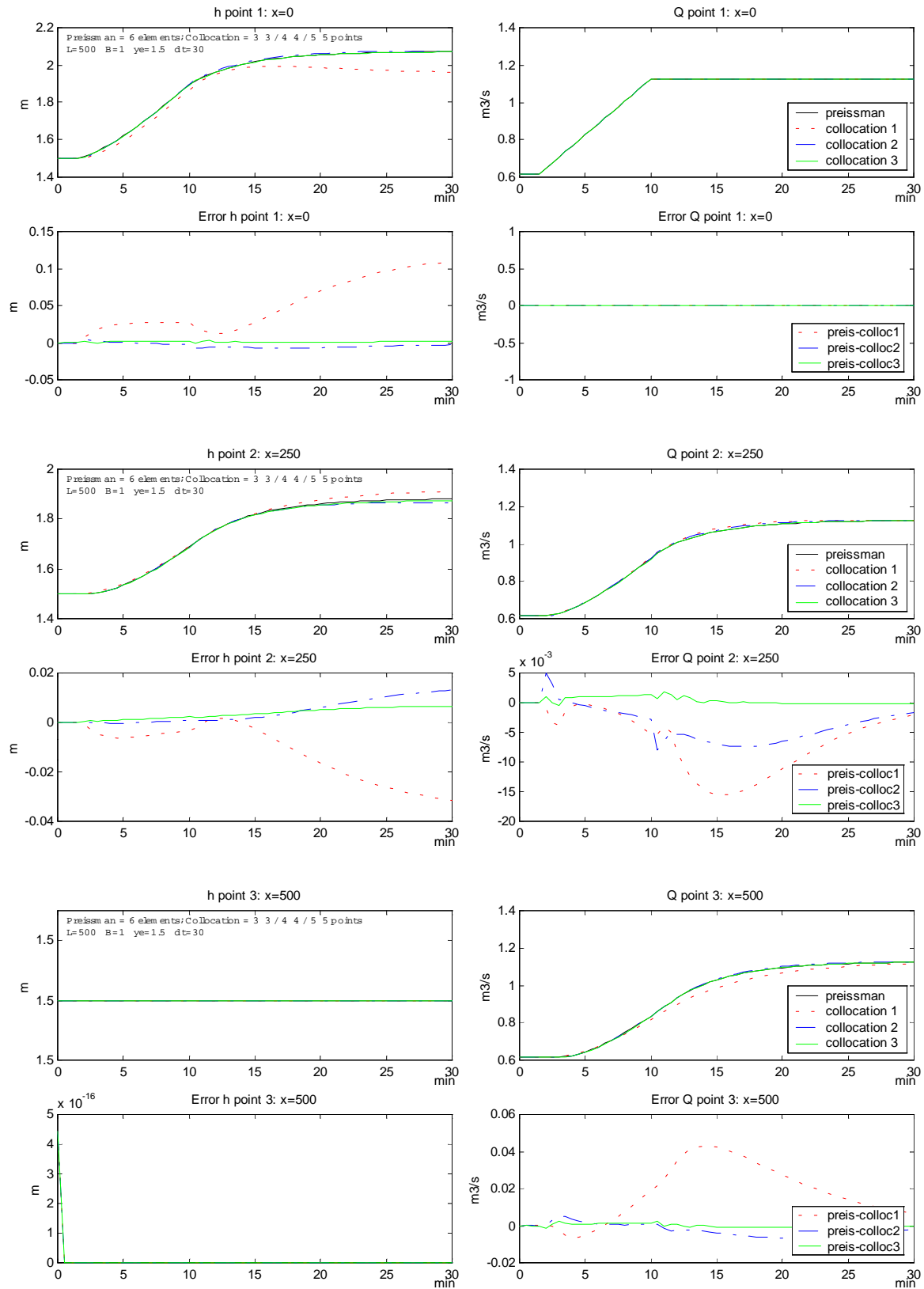


Figure 2.21. Simulation d'évolution du niveau et débit aux deux extrémités et au milieu pour un bief de 500 m de long

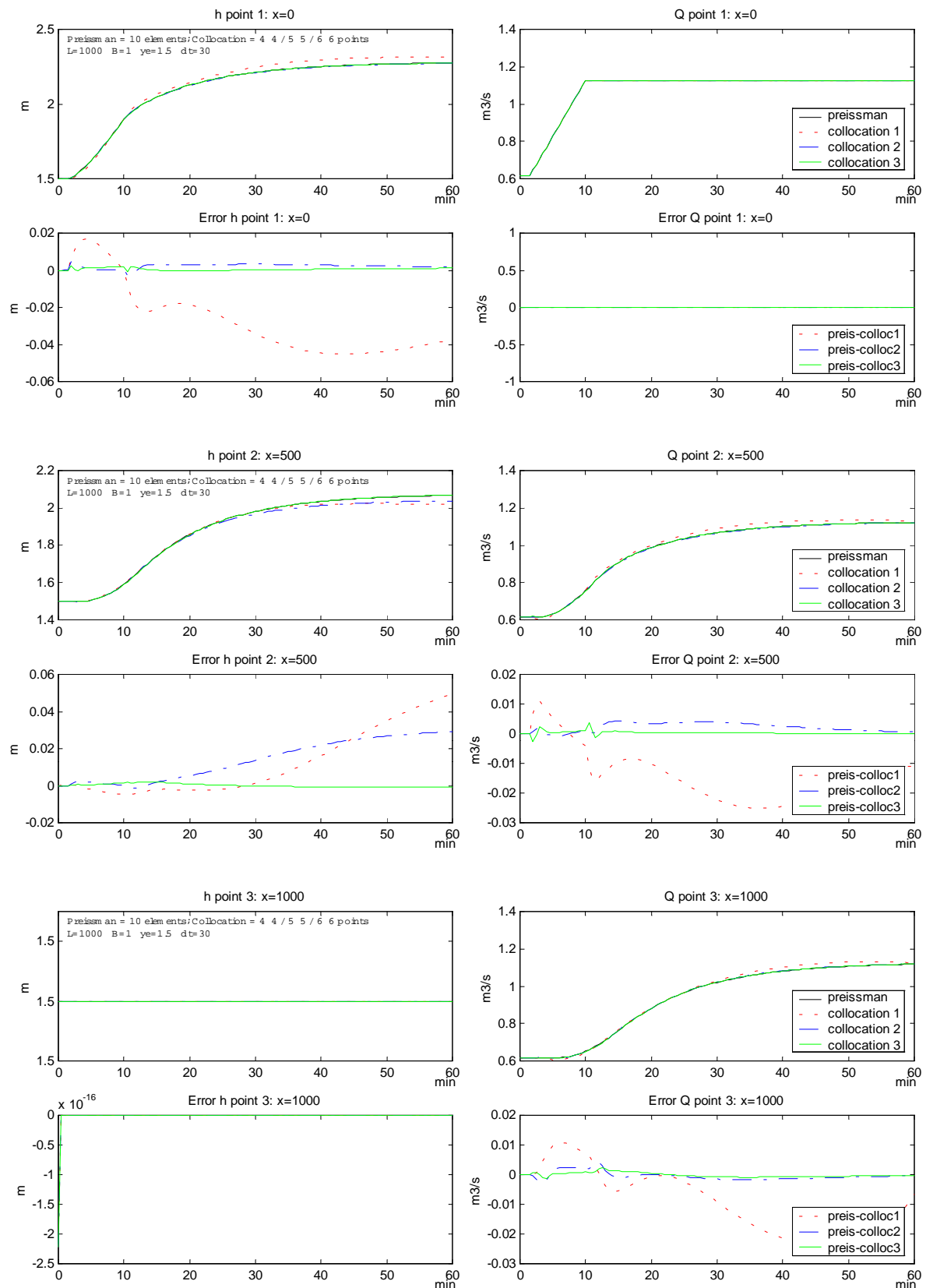


Figure 2.22. Simulation d'évolution du niveau et débit aux deux extrémités et au milieu pour un bief de 1000 m de long

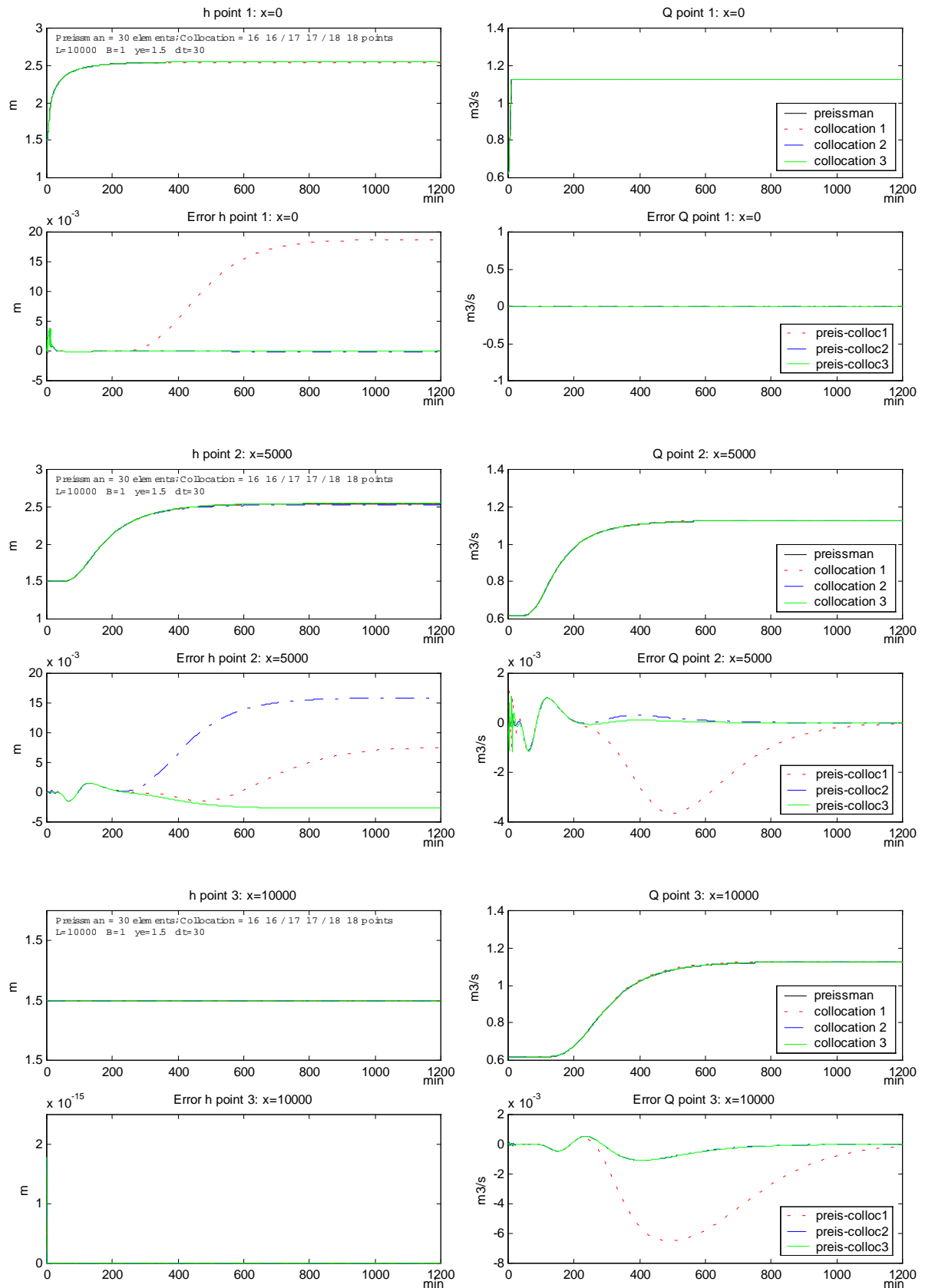


Figure 2.23. Simulation d'évolution du niveau et débit aux deux extrémités et au milieu pour un bief de 10000 m de long

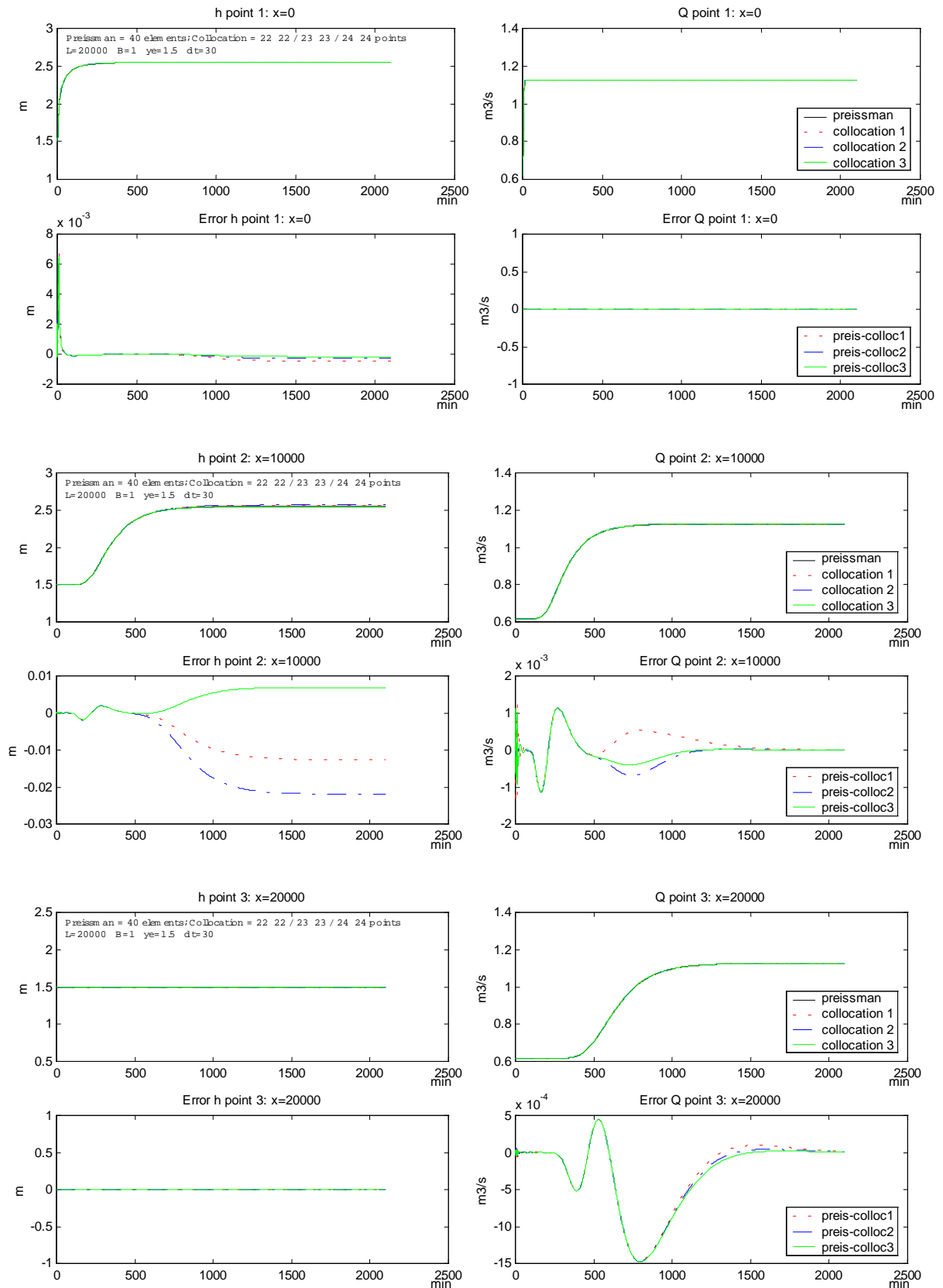


Figure 2.24. Simulation d'évolution du niveau et débit aux début (3 points) et à la fin pour un bief de 20000 m de long

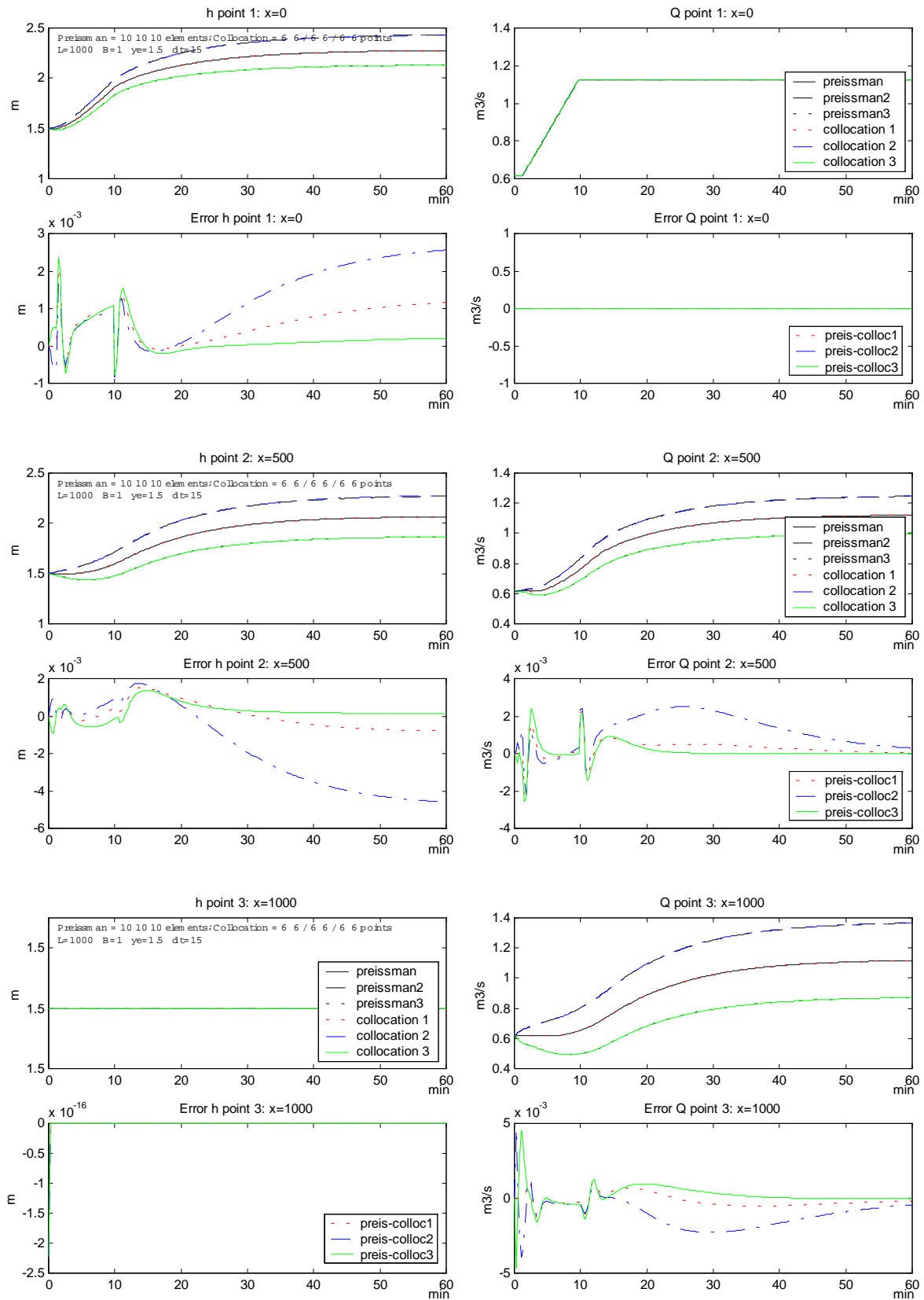


Figure 2.25. Simulation d'évolution du niveau et du débit avec et sans infiltration pour un bief de 1000 m de long

Un point additionnel important pour ce travail est la possibilité d'utiliser un nombre de points différent pour le débit et le niveau. Sur la Figure 2.26 une simulation pour un bief de 1000 m de long est présentée, avec les conditions limites sur le niveau amont et aval, et un nombre de points différent sur h et Q . Les valeurs des erreurs sont données dans le Tableau 2.9.

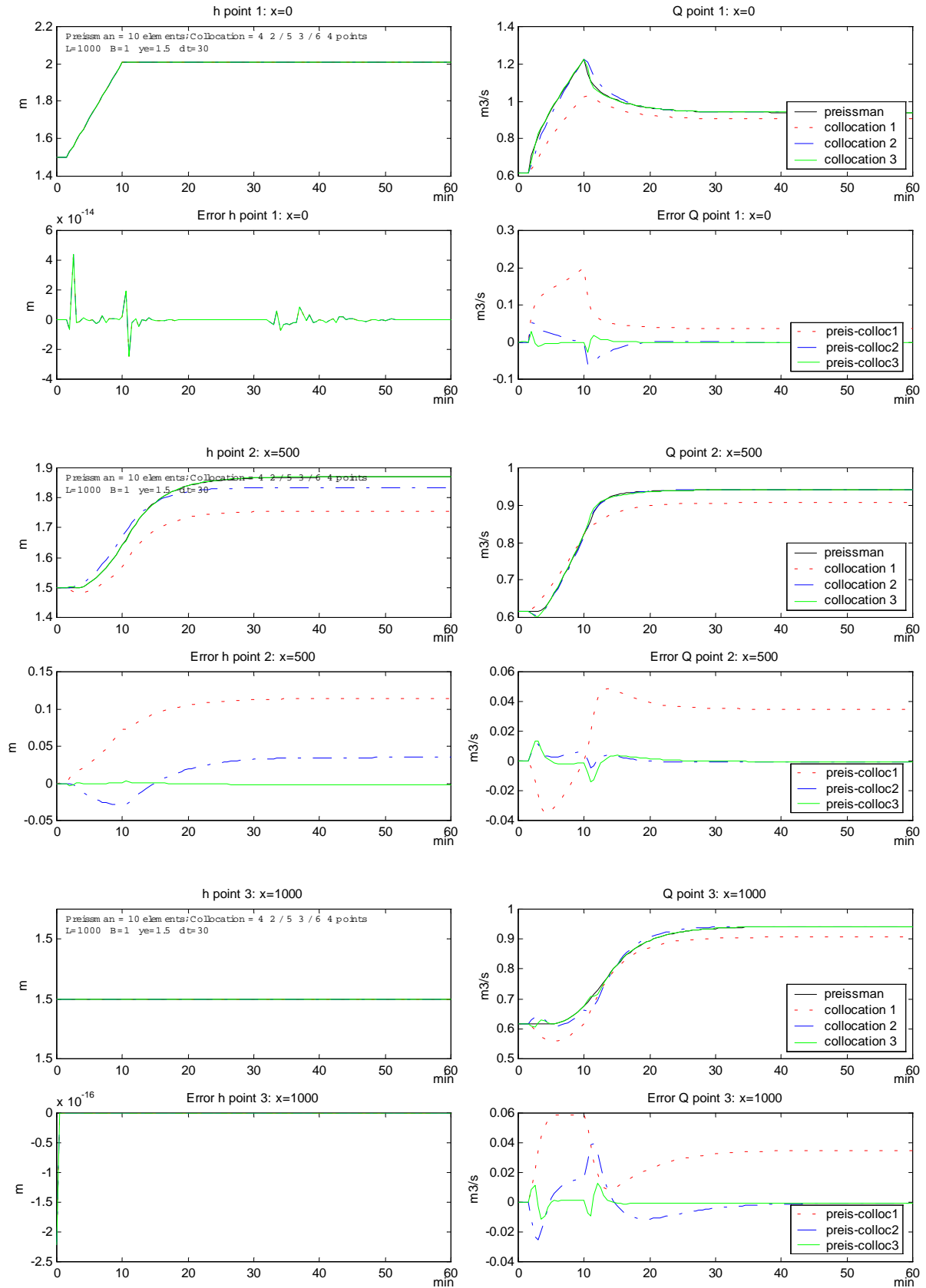
Tableau 2.9. Comparaison des erreurs pour différents nombres de points de collocation.

L=1000m

Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
2-4	0.03489	3.78	16.19	0.08589	4.62	11.63
3-5	0.00425	0.52	7.43	0.01688	0.93	3.31
4-6	0.00111	0.14	3.97	0.00370	0.21	0.87

L'intérêt de cette démarche est la possibilité de pouvoir simuler le système convenablement avec par exemple 4 points sur le niveau et 2 sur le débit, car sous ces conditions le système présente des caractéristiques particulières qui pourraient être utilisées pour certaines méthodes de commande. Les résultats montrent qu'avec une tolérance importante sur l'erreur cela est possible car la valeur moyenne de l'erreur est inférieure à 5 % dans ces conditions.

Tous les résultats obtenus dans cette partie nous montrent que la méthode de collocation peut être utilisée pour la simulation de bief de canaux ouverts, avec des résultats très proches de ceux obtenus par la méthode de Preissmann. De plus le nombre de points nécessaire pour la simulation est inférieur (environ 30%) au nombre de sections utilisées pour la simulation avec la méthode de Preissmann.

Figure 2.26. Simulation pour un nombre de points différent sur h et Q . $L=1000m$

2.4.2.2. Comparaison des valeurs propres du modèle linéarisé et discrétisé obtenues par collocation et par Preissmann

Dans cette partie le modèle de collocation avec conditions aux limites en débit à l'amont et hauteur à l'aval, sera linéarisé et discrétisé, pour être comparé au modèle linéarisé de Preissmann de mêmes conditions aux limites utilisé par [Malaterre, 1994], qui est un modèle discret.

2.4.2.2.1. Linéarisation des équations de Saint-Venant modifiées par collocation

Pour linéariser le système on fait une approximation par une série de Taylor du premier ordre autour d'un point de fonctionnement correspondant à un régime d'équilibre du modèle obtenu par collocation (équation (2.77) du paragraphe 2.4.1), c'est à dire :

$$f(x) \cong f(e) + f'(e)(x - e) \quad (2.86)$$

Avec :

$$f'(e) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_e \quad (2.87)$$

L'indice e indique un point de fonctionnement.

De plus on fait la transformation de variable suivante :

$$\begin{aligned} h_i &= h_{ie} + \delta h_i \\ Q_i &= Q_{ie} + \delta Q_i \end{aligned} \quad (2.88)$$

Linéarisation de l'équation de Continuité :

L'équation est déjà linéaire donc il suffit de faire le changement de variable indiqué :

$$\dot{h}_{ie} + \delta \dot{h}_i = \frac{1}{B} \left(q - \sum_{j=1}^n (Q_e + \delta Q)_j N'_{ji} \right) = \frac{1}{B} q - \frac{1}{B} \sum_{j=1}^n Q_{je} N'_{ji} - \frac{1}{B} \sum_{j=1}^n \delta Q_j N'_{ji} \quad (2.89)$$

$$\delta \dot{h}_i = - \underbrace{\frac{1}{B} (N'_{ji})^T}_{A2} \delta Q_j + \underbrace{\frac{1}{B} q - \frac{1}{B} \sum_{j=1}^n Q_{je} N'_{ji}}_{\text{Constant}} \quad (2.90)$$

Linéarisation de l'équation dynamique :

$$\dot{Q}_i = - \underbrace{\frac{2Q_i \left(\sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji} \right)}{B h_i}}_{D1} + \underbrace{\frac{Q_i^2 \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} \right)}{B h_i^2}}_{D2} - \underbrace{g B h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j N'_{ji} - I \right)}_{D3} - \underbrace{g B h_i J}_{D4} + \underbrace{\frac{k_q q Q_i}{B h_i}}_{D5} \quad (2.91)$$

Les termes linéarisés obtenus après le changement de variable sont :

$$(D1_{lin})_i = -\frac{2Q_{ie}\left(\sum_{j=1}^n Q_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}} - \frac{2\left(\sum_{j=1}^n Q_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}}(\delta Q_i) - \frac{2Q_{ie}\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}}(\delta Q_j) + \frac{2(Q_{ie})^2\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2}(\delta h_i) \quad (2.92)$$

$$(D2_{lin})_i = \frac{Q_{ie}^2\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2} + \frac{2Q_{ie}\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2}(\delta Q_i) - \frac{Q_{ie}^2\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^4}(\delta h_i) + \frac{Q_{ie}^2\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2}(\delta h_j) \quad (2.93)$$

$$(D3_{lin})_i = -gBh_{ie}\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji} - I\right) - gB\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji} - I\right)(\delta h_i) - gBh_{ie}\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)(\delta h_j) \quad (2.94)$$

$$(D4_{lin})_i = -\frac{gQ_{ie}^2}{K^2 Bh_{ie}\left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}}\right)^{4/3}} - \frac{2gQ_{ie}}{k^2 Bh_{ie}\left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}}\right)^{4/3}}(\delta Q_i) - \frac{gQ_{ie}^2}{K^2 B}\left[\frac{8\left(\frac{h_{ie}}{B+2h_{ie}}\right) - 10}{3} - \frac{10}{3}\right] \frac{1}{h_{ie}^3\left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}}\right)^{4/3}}(\delta h_i) \quad (2.95)$$

$$(D5_{lin})_i = \frac{k_q q}{B} \frac{Q_{ie}}{h_{ie}} + \frac{k_q q}{Bh_{ie}}(\delta Q_i) - \frac{k_q q Q_{ie}}{Bh_{ie}^2}(\delta h_i) \quad (2.96)$$

Finalement :

$$\delta \dot{Q}_i = (D1_{lin})_i + (D2_{lin})_i + (D3_{lin})_i + (D4_{lin})_i + (D5_{lin})_i \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{Q}_i = & \left[-\frac{2Q_{ie}\left(\sum_{j=1}^n Q_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}} + \frac{Q_{ie}^2\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2} - gBh_{ie}\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji} - I\right) - \frac{gQ_{ie}^2}{k^2 Bh_{ie}\left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}}\right)^{4/3}} + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_{ie}}{h_{ie}} \right] \\ & + \left[-\frac{2\left(\sum_{j=1}^n Q_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}} + \frac{2Q_{ie}\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2} - \frac{2gQ_{ie}}{k^2 Bh_{ie}\left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}}\right)^{4/3}} + \frac{k_q q}{Bh_{ie}} \right] (\delta Q_i) \\ & + \left[\frac{2(Q_{ie})^2\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2} - \frac{Q_{ie}^2\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^4} - gB\left(\sum_{j=1}^n h_{ie}N'_{ji} - I\right) - \frac{gQ_{ie}^2}{k^2 B}\left[\frac{8\left(\frac{h_{ie}}{B+2h_{ie}}\right) - 10}{3} - \frac{10}{3}\right] \frac{1}{h_{ie}^3\left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}}\right)^{4/3}} - \frac{k_q q Q_{ie}}{Bh_{ie}^2} \right] (\delta h_i) \\ & + \left[-\frac{2Q_{ie}\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}} \right] (\delta Q_j) + \left[\frac{Q_{ie}^2\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right)}{Bh_{ie}^2} - gBh_{ie}\left(\sum_{j=1}^n N'_{ji}\right) \right] (\delta h_j) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Le système linéarisé peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{Q}_i \\ \delta \dot{h}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11_{ij} & A12_{ij} \\ A2_{ij} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q_i \\ \delta h_i \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + C = A \begin{bmatrix} \delta Q_i \\ \delta h_i \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + C \quad (2.99)$$

Pour l'analyse des valeurs propres la partie importante est donc la matrice A , donnée par :

Pour $i = j$:

$$A11_{ij} = -\frac{2Q_{ie}N'_i}{Bh_{ie}} + \frac{2Q_{ie}N'_i}{Bh_{ie}} - \frac{2gQ_{ie}}{k^2 Bh_{ie} \left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}} \right)^{4/3}} + \frac{k_q q}{Bh_{ie}} - \frac{2Q_{ie}(N'_{ij})^r}{Bh_{ie}} \quad (2.100)$$

$$A12_{ij} = \frac{2Q_{ie}^2 N'_i}{Bh_{ie}^2} - \frac{Q_{ie}^2 N'_i}{Bh_{ie}^3} - gB(h_{ie}N'_i - I) - \frac{gQ_{ie}^2}{k^2 B} \left[\frac{8 \left(\frac{h_{ie}}{B+2h_{ie}} \right) - \frac{10}{3}}{h_{ie}^3 \left(\frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}} \right)^{4/3}} \right] - \frac{k_q q Q_{ie}}{Bh_{ie}^2} \quad (2.101)$$

$$+ \frac{Q_{ie}^2 (N'_{ij})^r}{Bh_{ie}^2} - gBh_{ie} (N'_{ij})^r$$

Pour $i \neq j$:

$$A11_{ij} = \frac{2Q_{ie}(N'_{ij})^r}{Bh_{ie}} \quad (2.102)$$

$$A12_{ij} = \frac{Q_{ie}^2 (N'_{ij})^r}{Bh_{ie}^2} - gBh_{ie} (N'_{ij})^r \quad (2.103)$$

avec :

$$N'_i = \sum_{j=1}^n N'_{ji} \quad (2.104)$$

et si on pose :

$$a_1 = \frac{Q_{ie}}{Bh_{ie}}; \quad a_2 = \frac{Bh_{ie}}{B+2h_{ie}} \quad (2.105)$$

Alors :

Pour $i = j$:

$$A11_{ij} = -\frac{2ga_1}{k^2 a_2^{4/3}} + \frac{k_q q}{Bh_{ie}} - 2a_1 (N'_{ij})^r \quad (2.106)$$

$$A12_{ij} = \left(2B - \frac{B}{h_{ie}} \right) a_1^2 N'_i - gB(h_{ie} N'_i - I) - \frac{gQ_{ie}^2}{k^2 B} \left[\frac{8a_2}{h_{ie}^3 a_2^{4/3}} - \frac{10}{3} \right] - k_q q B a_1^2 + (B a_1^2 - gB h_{ie}) (N'_{ij})^T \quad (2.107)$$

Pour $i \neq j$:

$$A11_{ij} = -2a_1 (N'_{ij})^T \quad (2.108)$$

$$A12_{ij} = (B a_1^2 - gB h_{ie}) (N'_{ij})^T \quad (2.109)$$

Pour tout i :

$$A2_{ij} = -\frac{1}{B} (N'_{ij})^T \quad (2.110)$$

2.4.2.2.2. Modèle de Preissmann Linéarisé

La comparaison des valeurs propres est faite ici avec celles du modèle linéarisé de Preissmann [Malaterre,1994], donnée par :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q_i^+ \\ \delta z_i^+ \\ \delta Q_j^+ \\ \delta z_j^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q_i \\ \delta z_i \\ \delta Q_j \\ \delta z_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\theta \alpha_1; & A_{12} &= \alpha_2(i); & A_{13} &= \theta \alpha_1; & A_{14} &= \alpha_2(j) \\ A_{21} &= \alpha_3 - \theta(\alpha_4(i) - \alpha_8(i) + \alpha_{11}(i)) \\ A_{22} &= \theta(\alpha_4(i) \alpha_5(i) + \alpha_6 - \alpha_8(i) \alpha_9(i) \alpha_{10}(i) + 2\alpha_{11}(i) \alpha_5(i)) \\ A_{23} &= \alpha_3 + \theta(\alpha_4(j) + \alpha_8(j) - \alpha_{11}(j)) \\ A_{24} &= -\theta(\alpha_4(j) \alpha_5(j) - \alpha_7 + \alpha_8(j) \alpha_9(j) \alpha_{10}(j) - 2\alpha_{11}(j) \alpha_5(j)) \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= (1-\theta) \alpha_1; & B_{12} &= \alpha_2(i); & B_{13} &= -(1-\theta) \alpha_1; & B_{14} &= \alpha_2(j) \\ B_{21} &= \alpha_3 + (1-\theta)(\alpha_4(i) - \alpha_8(i) + \alpha_{11}(i)) \\ B_{22} &= -(1-\theta)(\alpha_4(i) \alpha_5(i) + \alpha_6 - \alpha_8(i) \alpha_9(i) \alpha_{10}(i) + 2\alpha_{11}(i) \alpha_5(i)) \\ B_{23} &= \alpha_3 - (1-\theta)(\alpha_4(j) + \alpha_8(j) - \alpha_{11}(j)) \\ B_{24} &= (1-\theta)(\alpha_4(j) \alpha_5(j) - \alpha_7 + \alpha_8(j) \alpha_9(j) \alpha_{10}(j) - 2\alpha_{11}(j) \alpha_5(j)) \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$C_1 = \frac{q_{ie} + q_{je}}{2} - \frac{Q_{je} - Q_{ie}}{\Delta x}$$

$$C_2 = \frac{k_q}{2} \left(q_{ie} \frac{Q_{ie}}{S_{ie}} + q_{je} \frac{Q_{je}}{S_{je}} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{Q_{je}^2}{S_{je}} - \frac{Q_{ie}^2}{S_{ie}} \right) - \frac{g}{2\Delta x} (S_{ie} + S_{je}) (z_{je} - z_{ie}) - \frac{g}{2} (S_{ie} J_{ie} + S_{je} J_{je}) \quad (2.114)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta x}; \quad \alpha_2(i) = \frac{L_{ie}}{2\Delta t}; \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta t}; \quad \alpha_4(i) = \frac{2Q_{ie}}{S_{ie}\Delta x}; \quad \alpha_5(i) = \frac{V_{ie}L_{ie}}{2}$$

$$\alpha_6 = \frac{g}{2\Delta x} (L_{ie} (z_{je} - z_{ie}) - (S_{ie} + S_{je})) \quad \alpha_7 = \frac{g}{2\Delta x} (L_{je} (z_{je} - z_{ie}) - (S_{ie} + S_{je})) \quad (2.115)$$

$$\alpha_8(i) = \frac{gQ_{ie}}{k^2 S_{ie} R_{ie}^{4/3}}; \quad \alpha_9(i) = \frac{V_{ie}}{2}; \quad \alpha_{10}(i) = \left(\frac{7}{3} L_{ie} - \frac{4}{3} R_{ie} \left(\frac{\partial P_i}{\partial z_i} \right)_e \right); \quad \alpha_{11}(i) = \frac{k_q q_{ie}}{2S_{ie}}$$

On remarquera que C_1 et C_2 correspondent à la discrétisation des équations aux dérivés partielles à l'équilibre, et que comme $Q_e(x)$ et $h_e(x)$ correspondent à un régime d'équilibre alors $C_1 = C_2 = 0$.

Il est à noter que l'étude des valeurs propres de ce schéma par [Malaterre, 1994] a montré que :

- Pour $0.5 < \theta \leq 1$, un amortissement artificiel est introduit au cours du temps. Par contre pour $\theta = 0.5$ aucun amortissement ni amplification n'est introduit et pour des valeurs inférieures une amplification est introduite.
- Si le nombre de courant $Cr = 1$, alors la célérité des ondes est parfaitement reproduite quelle que soit la longueur d'onde. Mais cette valeur pour le nombre de courant est contraignante, donc difficile à utiliser, et pour des nombres de courants différents de 1 la solution numérique de la célérité d'onde n'est plus constante et subit un phénomène de dispersion. La modification des vitesses de propagation de certains harmoniques fait alors apparaître des oscillations numériques. Le fait de prendre $0.5 < \theta \leq 1$ amortit ensuite ces oscillations.

2.4.2.2.3. Comparaison des valeurs propres

La comparaison des valeurs propres des deux modèles est faite en deux étapes. Dans une première étape seront comparées les valeurs propres pour un bief de canal sans pente, où les phénomènes de transport sont négligeables, et dans une seconde étape seront comparées les valeurs propres d'un bief avec pente, où ces phénomènes de transport sont importants, pour obtenir une comparaison avec un bief de canal plus réaliste.

Pour la partie correspondant à un canal sans pente sera utilisé le même exemple que celui utilisé par [Malaterre, 1994], dans un souci de comparaison, c'est-à-dire un bief de 2700 m de long (L), 10 m de large (B), une cote de 0.11 m (h), sans pente ($I = 0$) et avec une infiltration nulle ($q = 0$) donc un débit nul ($Q = 0$), cela simulé avec des modèles à 16 sections (N_s).

La Figure 2.27 montre les valeurs propres pour les deux modèles linéarisés, avec pour le modèle de Preissmann $\theta = 0.5$ et deux valeurs de nombre de courant, l'un proche de 1 et l'autre inférieur. Pour la figure de gauche ($Cr \approx 1$) les études présentées par [Malaterre,1994] indiquent que les valeurs propres du modèle de Preissmann coïncident avec les valeurs propres théoriques du modèle de Saint-Venant, par contre pour la figure de gauche il se produit un phénomène de dispersion. On voit sur cette figure que les harmoniques de longueur d'onde courte ne sont pas reproduites. Les valeurs propres du modèle par collocation linéarisé souffrent d'un phénomène similaire mais plus important, en effet on retrouve le phénomène de dispersion même lorsque le nombre de courant est égal à 1.

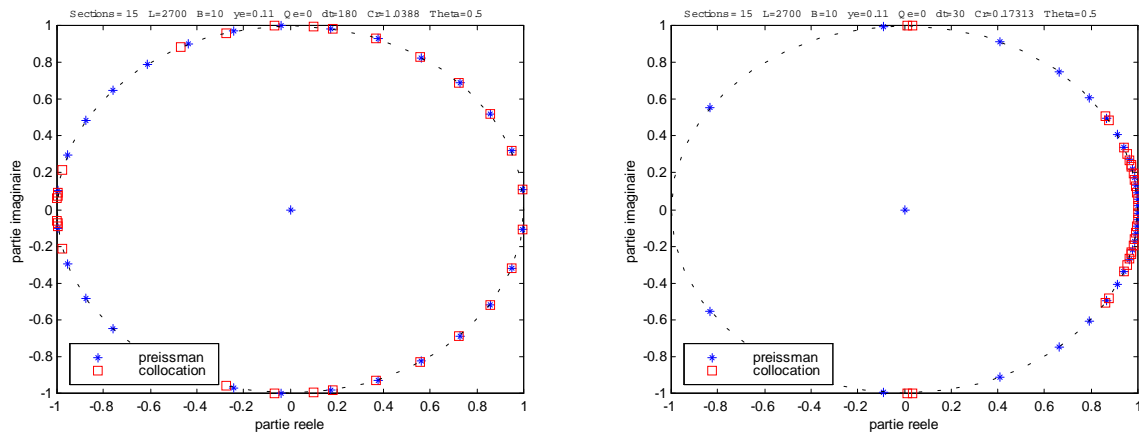


Figure 2.27. Valeurs propres des matrices A pour schémas linéarisés. Pour un bief de canal sans pente, $\theta = 0.5$, $Cr \approx 1$ et $Cr < 1$.

La Figure 2.28 montre quant à elle l'effet de la valeur de θ dans le modèle de Preissmann, on voit bien que pour une valeur inférieure à 0.5 (figure de gauche) une amplification des modes se produit tandis que pour une valeur supérieure à 0.5 un amortissement apparaît. Sur le modèle de collocation il n'existe pas de variable qui permette de produire cet effet.

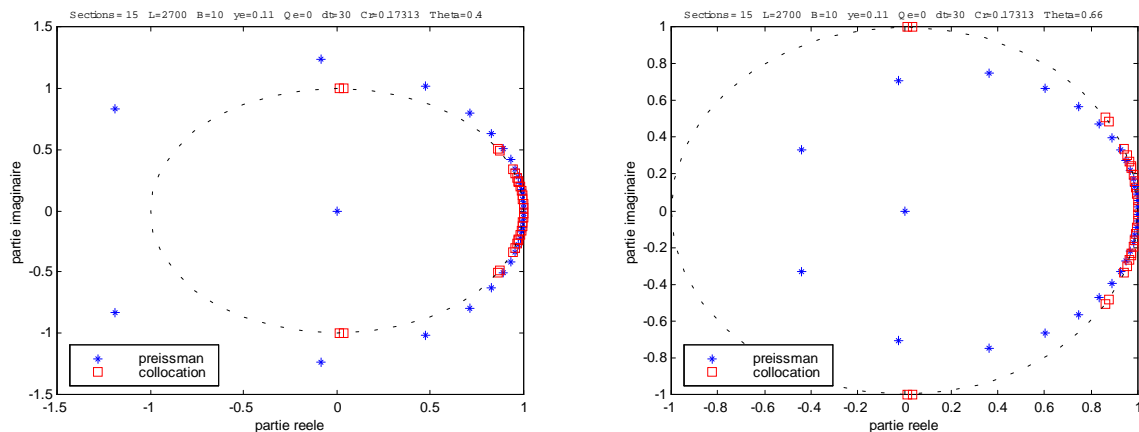


Figure 2.28. Valeurs propres des matrices A pour schémas linéarisés. Pour un bief de canal sans pente, $\theta < 0.5$ et $\theta > 0.5$, $Cr < 1$.

La Figure 2.29 montre pour sa part la position des pôles pour des valeurs de nombre de courant très petites, avec pour le modèle de Preissmann $\theta = 0.66$, qui est la valeur utilisée pour les simulations.

Dans ce cas les pôles ont tendance à se regrouper tous au voisinage du point (1,0) et cela pour les deux modèles, avec une tendance bien plus marquée pour le modèle de collocation. A noter que dans la dernière figure le pas de temps dt correspond au pas de temps utilisé pour les simulations. Cela indique que pour les deux modèles, à mesure que le nombre de courant devient petit seules les grandes longueurs d'onde sont reproduites correctement.

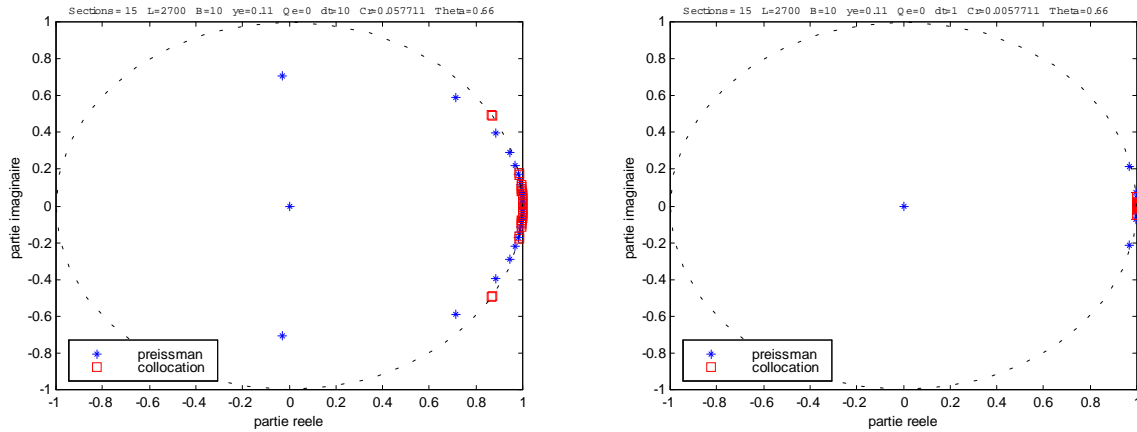


Figure 2.29. Valeurs propres des matrices A pour schémas linéarisés. Pour un bief de canal sans pente, $\theta = 0.66$ et $Cr \ll 1$.

La Figure 2.30 montre les valeurs propres obtenues par les deux modèles pour un bief de 500 m de long (L), 1 m de large (B) et 0.5 m de tirant d'eau (h_e) avec une pente de 0.1% (I), un débit correspondant à un régime uniforme suivant la relation $J(Q_e, h_e) = I$, et cela pour 4 valeurs décroissantes du nombre de courant et $\theta = 0.66$. Ceci correspond à un des biefs utilisés dans les simulations. On observe ici des conclusions similaires au cas sans pente, c'est-à-dire que pour le modèle de collocation il existe plus de dispersion de modes que dans le modèle de Preissmann. Avec la particularité que l'existence de la pente renvoie les pôles à l'intérieur du cercle, donc le modèle sera plus stable.

Finalement il est possible de conclure qu'il existe certaines différences entre le modèle de collocation linéarisé et le modèle de Preissmann linéarisé. En général le modèle de collocation sera moins bon, premièrement parce que le phénomène de dispersion est plus important, et deuxièmement parce que le fait d'être un modèle explicite (avec une stabilité liée au nombre de courant), oblige à utiliser des valeurs petites pour le nombre de Courant, pour lesquelles le phénomène de dispersion est plus important. Cependant on verra que le modèle donne de très bons résultats pour la commande, de plus on doit se rappeler que l'intérêt de cette thèse est l'utilisation pour la commande du modèle par collocation *non linéaire*, et non le modèle *linéarisé* utilisé pour cette comparaison.

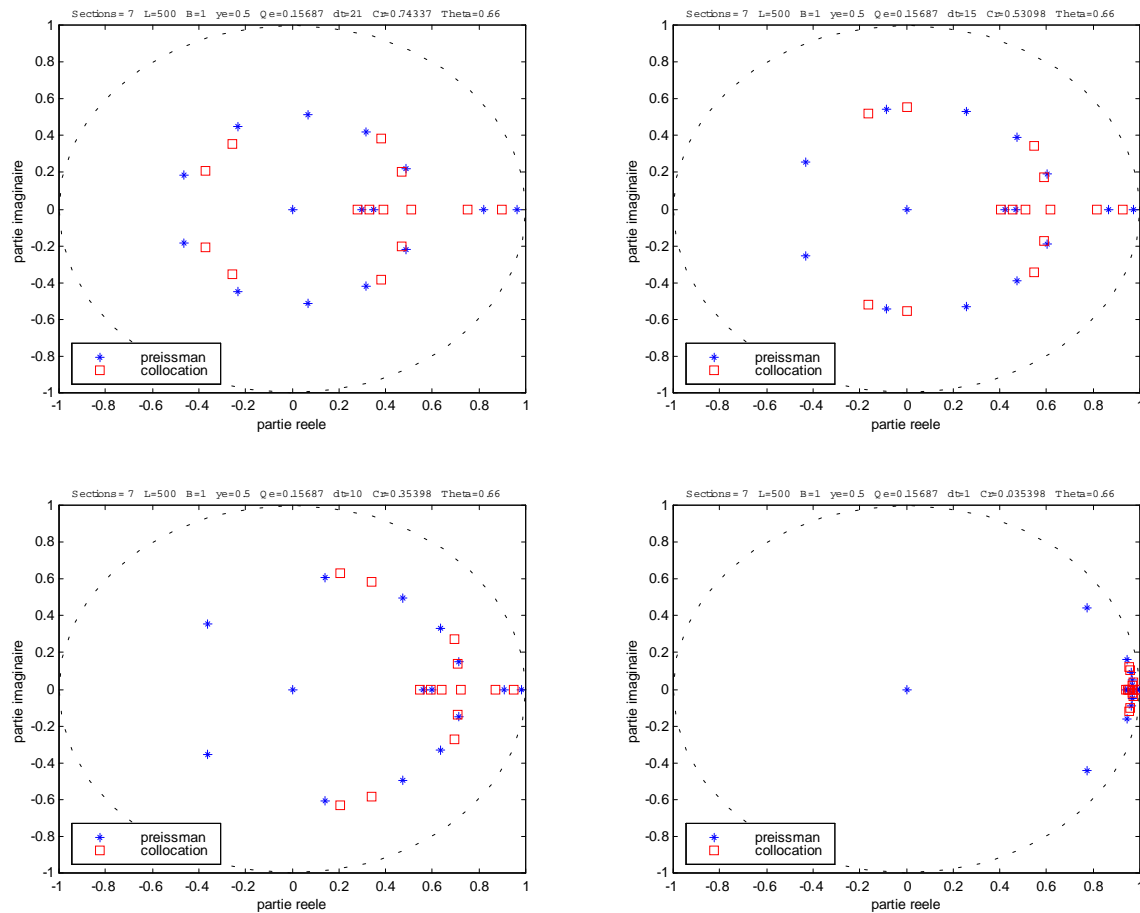


Figure 2.30. Valeurs propres des matrices A pour schémas linéarisés. Pour un bief de canal avec pente, $\theta = 0.66$ et quatre valeurs de $Cr < 1$.

2.4.2.3. Comparaison de la Méthode de Collocation avec la Méthode de Différences Finies par Discrétisation Explicite

Des trois méthodes de calcul de la solution des équations de Saint-Venant mentionnées ci-dessus, la méthode des différences finies par discrétisation explicite est une des plus simples et des plus connues dans le domaine de l'hydraulique. Les principaux défauts de cette méthode sont d'une part, la condition de Courant qui conditionne la stabilité de la solution et, d'autre part la nécessité d'utiliser un grand nombre d'éléments de discrétisation pour obtenir une solution suffisamment précise.

Notre intérêt dans cette comparaison est de voir laquelle des deux méthodes (collocation et différences finies explicite) présente de meilleures performances vis-à-vis du nombre de points de discrétisation nécessaires pour obtenir une précision similaire. Ces comparaisons seront réalisées avec des conditions de simulation identiques à celles exprimés au paragraphe 2.4.2.1 pour la comparaison entre la méthode de collocation et de Preissmann.

La Figure 2.31 montre la simulation pour un bief de 1 Km de long pour plusieurs nombres de sections et une quantité de points de collocation "optimale", tout cela comparé à la simulation par la méthode de Preissmann, tandis que la Figure 2.32 montre la même chose pour un bief de 10 Km de long. Le Tableau 2.10 et le Tableau 2.11 montrent quant à eux les valeurs moyennes et maximales de l'erreur.

Tableau 2.10. Comparaison des erreurs entre méthode de collocation et méthode de différences finies explicite pour divers nombre de points. $L = 1000$ m

Méthode Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
Colloc. 6	0.00054	0.06	0.76	0.00280	0.14	0.59
Explicite 5	0.01678	1.69	8.81	0.03221	1.67	6.45
Explicite 10	0.00823	0.84	4.77	0.01630	0.86	2.39
Explicite 20	0.00414	0.43	2.52	0.00828	0.44	1.31

Tableau 2.11. Comparaison des erreurs entre méthode de collocation et méthode de différences finies explicite pour divers nombre de points. $L = 10000$ m

Méthode Nombre de points	Moyenne erreur Q	Moyenne % erreur Q	maximum % erreur Q	Moyenne erreur h	Moyenne % erreur h	maximum % erreur h
Colloc. 18	0.00018	0.02	2.5	0.00536	0.23	1.63
Explicite 17	0.00561	0.64	10.26	0.06798	3.08	34.66
Explicite 34	0.00254	0.30	5.04	0.02386	1.12	10.71
Explicite 68	0.00129	0.15	3.68	0.009829	0.47	6.46

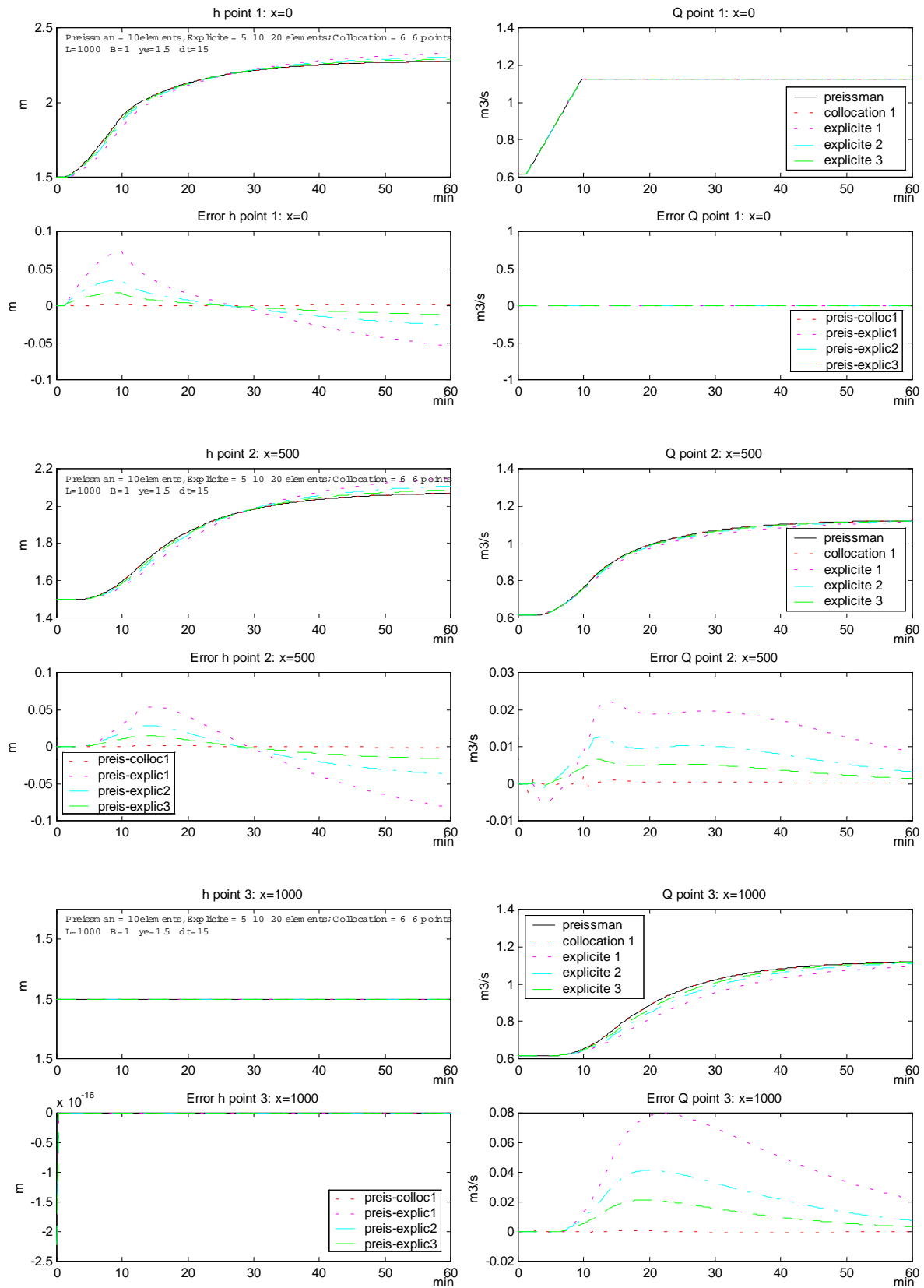


Figure 2.31. Simulation avec les trois méthodes et plusieurs nombres de sections pour la méthode de discrétisation explicite. $L=1000$ m

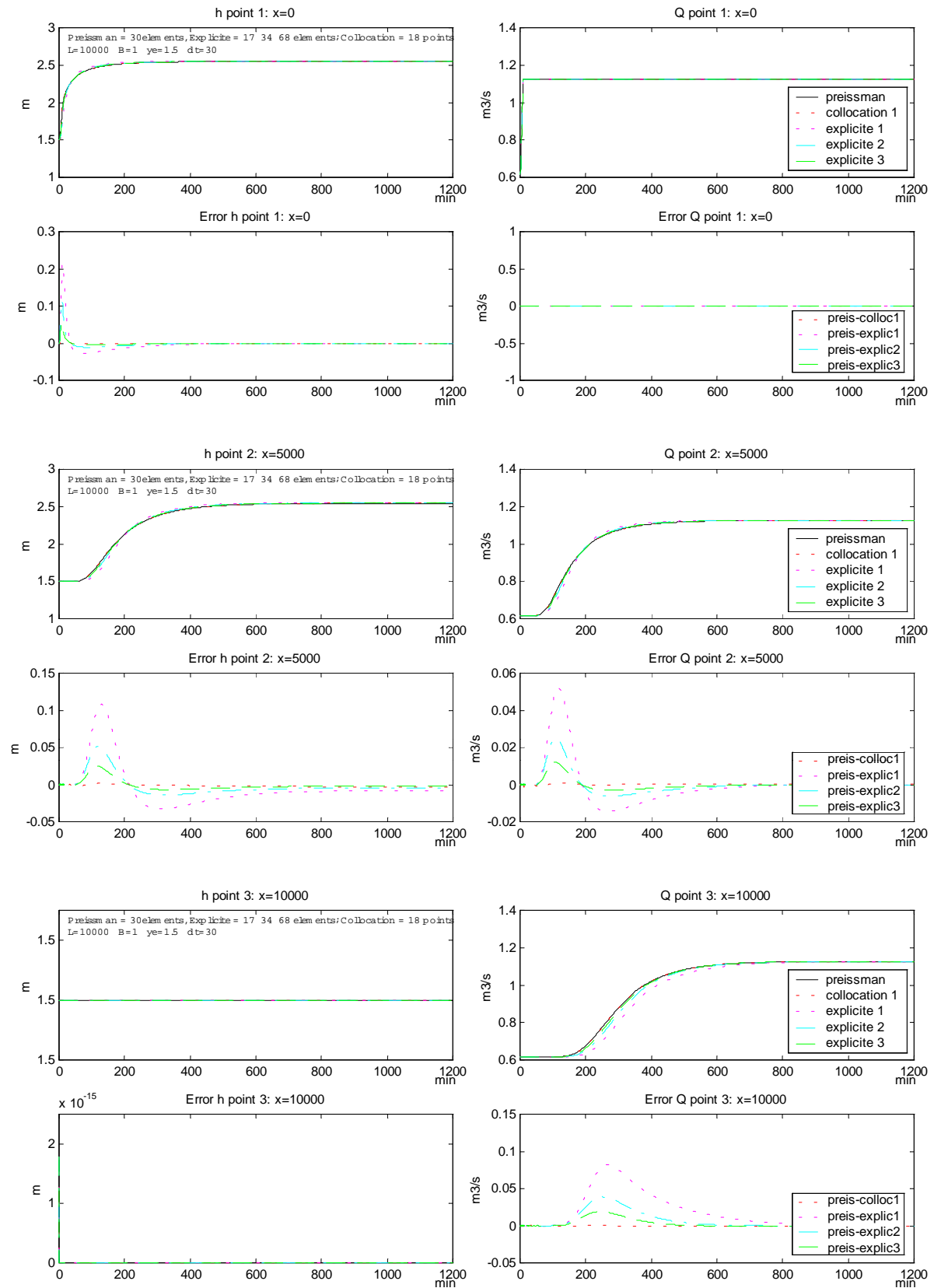


Figure 2.32. Simulation avec les trois méthodes et plusieurs nombres de sections pour la méthode de discrétisation explicite. $L=10000$ m

Les résultats obtenus montrent que pour obtenir une solution d'une précision similaire il faut utiliser, pour la méthode des différences finies par discrétisation explicite, un nombre de points au moins quatre fois supérieur au nombre de points utilisé pour la méthode de collocation. Cela indique que la méthode de collocation est plus "performante" que la méthode de différences finies par discrétisation explicite. Cela présente deux effets favorables pour la simulation : Un premier effet favorable est la possibilité que les simulations soit plus rapides car l'utilisation de moins de points implique moins de temps de calcul. Et le second, qui est une conséquence du premier, est la possibilité d'utiliser des pas de temps plus grands pour la simulation pour un même nombre de courant, car les sections sont plus larges.

Il faut tout de même relativiser ce dernier point, car pour la méthode de collocation la taille des sections varie selon la méthode utilisée pour calculer les points. Ainsi, si les points sont placés suivant les polynômes de Legendre, les sections seront bien plus petites sur les bords qu'au centre du bief, et le nombre de Courant doit être calculé en fonction de la longueur de la plus petite section.

2.5. CONCLUSIONS

Finalement il est possible de conclure à une certaine validation du modèle de collocation, bien que celui ci soit moins précis que le modèle de Preissmann.

Ce modèle présente les principaux avantages suivants :

- ❑ Il nécessite moins de sections, donc moins de temps de calcul, d'autant plus qu'il est explicite en temps.
- ❑ On obtient un modèle non linéaire d'ordre réduit, donc à priori adéquat pour l'utilisation pour la commande.
- ❑ Ses performances sont supérieures au modèle de différences finies explicite.

Les principaux inconvénients de ce modèle sont :

- ❑ Une précision inférieure au modèle de Preissmann, surtout en raison du phénomène de dispersion plus important (sur le modèle linéarisé).

COMMANDE

3.1. INTRODUCTION

Dans cette partie on présente le développement de la commande des canaux d'irrigation basée sur un modèle par collocation. L'objectif de la commande étant la régulation du niveau le long du canal autour d'un régime d'équilibre défini comme le plus uniforme possible (voir paragraphe 2.4.1). Un régime de ce type permet d'obtenir un débit maximal pour un canal de géométrie donnée tout en garantissant des conditions de fonctionnement satisfaisantes, telles qu'éviter les débordements ou l'assèchement du bief.

Dans une première partie on rappelle en détails le modèle de base à utiliser par la suite.

Une seconde partie traite du développement de lois de commande basées sur ce modèle. Deux méthodes sont utilisées à ce sujet : Une méthode de linéarisation entrée-sortie [Isidori,1995], avec une variante dynamique, et une méthode de *Backstepping* [Krstic et al,1995]. Ces méthodes seront validées et comparées brièvement, en les utilisant sur divers simulateurs. Le premier simulateur sera le modèle exact utilisé pour le développement de la commande, ensuite seront utilisés des simulateurs par collocation avec plus de points, et des simulateurs de type Preissmann. Finalement la validation se fera sur un modèle plus précis qui inclut les équations des vannes et ses conditions de fonctionnement.

Une troisième partie, aussi importante pour la commande, est le développement d'un observateur de débit et d'infiltration, avec pour but la réalisation de la commande avec les seules mesures de niveau. Celui-ci sera réalisé en deux parties, une partie pour le débit en utilisant des techniques d'observateurs non linéaires à grand gain [Gauthier et al,1992], et une deuxième partie pour l'infiltration en utilisant des techniques d'observateurs linéaires. Cet observateur sera à son tour validé sur simulateur ainsi que l'utilisation des variables observées pour la commande.

Finalement quelques mots seront dits sur les perspectives de mise en place de commande pour divers biefs interconnectés. Cette partie est encore à l'étude et seuls quelques résultats préliminaires seront présentés.

3.2. MODELE DE BASE POUR LA COMMANDE

La commande est basée sur un modèle de dimension finie obtenu par la résolution des équations de Saint-Venant en utilisant la méthode de collocation à trois points équidistants pour le débit ($n_2 = 3$) et deux points aux extrémités du bief pour le niveau ($n_1 = 2$).

Les conditions aux limites utilisées (variables de commande) sont les débits amont et aval i.e. $u_1 = Q_1$,

$u_2 = Q_3$ (Figure 2.16).

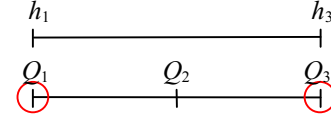


Figure 3.1. Conditions limites $Q_{am} - Q_{av}$

Ce modèle de commande s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{BL} [qL - 4Q_2 + 3u_1 + u_2] \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{BL} [qL + 4Q_2 - u_1 - 3u_2] \\ \dot{Q}_2 = -\frac{2Q_2(-u_1 + u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} + \frac{k_q q Q_2}{B h_2} \\ \quad - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec :

$$h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2} \quad (3.2)$$

3.3. COMMANDE PAR LINEARISATION ENTREE-SORTIE

Nous traduisons notre objectif de commande en cherchant à réguler le canal autour d'un régime d'équilibre défini par :

$$h_{1e} = h_e = h_{3e}; \quad u_{2e} = u_{1e} + qL; \quad Q_{2e} = u_{1e} + \frac{1}{2}qL \quad (3.3)$$

A cette fin, étant donné que le modèle possède deux variables de commande, on choisit de contrôler deux sorties de façon à aller dans le sens de l'objectif considéré, à savoir : les écarts de niveau aux deux extrémités du canal par rapport à la valeur désirée, soit :

$$y = \tilde{h} = \begin{bmatrix} h_1 - h_e \\ h_3 - h_e \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Compte tenu du modèle (3.1) et des sorties considérées (3.4) le système peut être réécrit de façon à mettre en évidence le degré relatif de chaque sortie comme suit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} Q_2 + M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{q}{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{Q}_2 = f(Q_2, h, u, q) \\ y_1 = h_1 - h_e \\ y_2 = h_3 - h_e \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec :

$$M = \frac{1}{BL} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$f(Q_2, h, u, q) = \frac{2Q_2(u_1 - u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \quad (3.7)$$

Et on note h , u et y les vecteurs formés par les composantes respectives h_i , u_i et y_i .

Par la suite, et sauf mention contraire, on prend les hypothèses suivantes :

- Les états sont mesurés.
- L'infiltration q est connue et constante.

3.3.1. Commande par retour d'état linéarisant statique

D'après (3.5)-(3.6), il est facile d'observer que le degré relatif de chaque sortie est 1, et donc classiquement [Isidori,1995] il existe un retour d'état de la forme $u = \varphi(h, Q)$ linéarisant le système d'un point de vue entrée-sortie, mais seulement partiellement la représentation d'état (3.5).

En effet en choisissant u sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \left[-K_1 \begin{bmatrix} h_1 - h_e \\ h_3 - h_e \end{bmatrix} - \frac{Q_2}{BL} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{q}{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \quad (3.8)$$

Pour toute matrice K_1 symétrique définie positive, on obtient pour y l'équation d'un système linéaire asymptotiquement stable sous la forme :

$$\dot{y} + K_1 y = 0 \quad (3.9)$$

Cette loi de commande induit néanmoins une dynamique non observable de la forme:

$$\dot{Q}_2 = f(Q_2, h, u, q) \quad (3.10)$$

Où u est donnée par (3.8).

Il faut donc étudier cette dynamique pour prouver la stabilité interne du système. Notons pour l'instant que les résultats de simulation avec cette commande sont positifs, mais qu'ils peuvent être améliorés par un retour d'état toujours basé sur une linéarisation entrée sortie, mais construit de façon dynamique. Les détails de cette affirmation seront donnés au paragraphe 3.5.2, où il est montré que cette commande met en œuvre plus d'énergie que la version dynamique pour un résultat similaire, ce qui produit des oscillations importantes sous certains simulateurs. L'étude complète de la version dynamique de cette commande est présentée au paragraphe suivant. Notons au passage que les dynamiques (3.10) seront retrouvées dans la version dynamique.

3.3.2. Commande par retour d'état linéarisant dynamique

On ajoute ici un intégrateur $\dot{u} = v$ de sorte que le système (3.5) devient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} Q_2 + M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{q}{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \dot{Q}_2 = f(Q_2, h, u, q) \\ y_1 = h_1 - h_e \\ y_2 = h_3 - h_e \end{cases} \quad (3.11)$$

Avec :

$$M = \frac{1}{BL} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$f(Q_2, h, u, q) = \frac{2Q_2(u_1 - u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \quad (3.13)$$

A partir de ce système il est possible de faire l'énoncé suivant :

3.3.2.1. Théorème :

Pour toute conditions initiales $h_1(0), h_3(0) > 0$ tel que $h_3(0) - h_1(0) < \min\left(\frac{gL}{k^2 B}, LI\right)$ et $Q_2(0) \geq 0$,

et pour tout choix des matrices K_1, K_2 définies positives telles que la solution $y = (y_1 \ y_2)^T$ de :

$$\ddot{y} + K_1 \dot{y} + K_2 y = 0 \quad (3.14)$$

vérifie pour tout $t \geq 0$

$$\forall t \geq 0, \quad y_2(t) - y_1(t) < \frac{gL}{k^2 B} \quad \text{et} \quad y_2(t) - y_1(t) \leq LI \quad (3.15)$$

Le retour d'état défini par :

$$\dot{u} = G(h, Q_2)u + F(h, Q_2, q) \quad (3.16)$$

Avec :

$$G(h, Q_2) = \frac{2Q_2}{BLh_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - M^{-1}K_1M \quad (3.17)$$

$$F(Q_2, h, q) = -M^{-1} \left(\frac{4}{BL} \left((Q_2 K_1 + F1(Q_2, h, q)) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + K_1 \frac{q}{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} h_1 - h_e \\ h_3 - h_e \end{pmatrix} \right) \quad (3.18)$$

$$F1(Q_2, h, q) = \left(\frac{Q_2^2 (-h_1 + h_3)}{LBh_2^2} + \frac{k_q q Q_2}{B h_2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] \right) \quad (3.19)$$

Garantit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_3(t) = h_e \quad (3.20)$$

Et que $Q_2(t)$ reste borné et converge vers une valeur satisfaisant les conditions d'équilibre de (3.11).

A noter que les conditions initiales sur les niveaux peuvent être quelconques dans le domaine réaliste de fonctionnement du canal, tandis que celle du débit correspond simplement à un sens d'écoulement initial donné (on pourrait annoncer un résultat symétrique pour le sens contraire).

La condition (3.15) est une contrainte sur les dépassements admissibles dans les systèmes de second ordre qui peut être garantie par un choix approprié des gains K_1 et K_2 (choix du facteur d'amortissement ξ). Celle-ci garantit la stabilité interne du système bouclé, et consiste simplement à

maintenir la différence de niveaux entre les deux extrémités du canal en bon accord avec la pente du canal.

3.3.2.2. Preuve :

Avec le changement de coordonnées global suivant :

$$Y_1 := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \dot{Y}_1; \quad Y_3 = Q_2 \quad (3.21)$$

Le système (3.11) s'écrit sous forme normale :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_2 = \varphi(Y, u, q) + Mv \\ \dot{Y}_3 = f(Q_2, h, u, q) \end{cases} \quad (3.22)$$

Ou $Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3]^T$ et

$$\varphi(Y, u, q) = \frac{1}{BL} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} f(Q_2, h, u, q) \quad (3.23)$$

La commande (3.16) est alors simplement la loi qui linéarise le système :

$$v = -M^{-1} [\varphi(Y, u, q) + K_1 Y_2 + K_2 Y_1] \quad (3.24)$$

Et donc Y_1 est solution de (3.14) :

$$\ddot{Y}_1 + K_1 \dot{Y}_1 + K_2 Y_1 = 0 \quad (3.25)$$

Le choix de K_1 et K_2 définis positifs et la définition de Y_1 garantissent donc la convergence de h_1 et h_3 vers h_e .

Stabilité de la dynamique résiduelle Y_3

Reste alors à prouver la stabilité de la dynamique résiduelles Y_3 :

$$\dot{Y}_3 = \left[\frac{(h_3 - h_1)}{BLh_2^2} - \frac{g}{k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] Y_3^2 + \frac{1}{Bh_2} [(k_q - 2)q + B(\dot{h}_1 + \dot{h}_3)] Y_3 - gBh_2 \left[\frac{(h_3 - h_1)}{L} - I \right] \quad (3.26)$$

Celle-ci peut s'écrire dans les nouvelles coordonnées :

$$\dot{Y}_3 = g_2(Y_1)Y_3^2 + g_1(Y_2)Y_3 + g_0(Y_1) \quad (3.27)$$

Et comme les dynamiques Y_1 et Y_2 sont stabilisés par la commande alors la dynamique résiduelle peut s'écrire comme :

$$\dot{Y}_3 = g_2(t)Y_3^2 + g_1(t)Y_3 + g_0(t) \quad (3.28)$$

Avec g_0 , g_1 et g_2 bornées par rapport à t .

Notons ici que les expressions des g_i , qui proviennent des équations (3.26)-(3.27), avec les conditions de (3.15) impliquent que pour tout t :

$$g_2(t) < 0 \text{ et } g_0(t) \geq 0. \quad (3.29)$$

La première condition de (3.15) :

$$h_3 - h_1 < \frac{gL}{k^2 B} \quad (3.30)$$

Devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{Bh_2}{(B+2h_2)^4} \right)^{1/3} \leq 1 &\Rightarrow h_3 - h_1 < \frac{gLh_2}{k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{(B+2h_2)^4} \right)^{1/3}} \\ &\Rightarrow g_2 = \left[\frac{(h_3 - h_1)}{BLh_2^2} - \frac{g}{k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{(B+2h_2)^4} \right)^{4/3}} \right] < 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

D'un autre côté, avec l'autre condition :

$$h_3 - h_1 \leq IL \Rightarrow g_0 = gBh_2 \left[\frac{(h_1 - h_3)}{L} + I \right] \geq 0 \quad (3.32)$$

Pour tout t , le côté droit de (3.28) a deux racines réelles de signe opposé $Y_{3e}(t) \geq 0 \geq \bar{Y}_{3e}(t)$, qui dépendent de Y_1, Y_2 .

Alors comme $g_2 < 0$, il est clair que $Y_{3e}(t)$ est attractive, et $\bar{Y}_{3e}(t)$ est répulsive, et donc si $Y_3(0) \geq 0 \geq \bar{Y}_{3e}(0)$, $Y_3(t)$ tend vers $Y_{3e}(t)$ lequel tend à son tour vers une constante car Y_1, Y_2 convergent.

3.3.3. Mise en Œuvre

Pour la mise en œuvre du contrôleur, les équations développées ci-dessus ont été introduites dans une S-Function de Simulink, qui sera par la suite utilisée comme commande sur le schéma de simulation présenté au chapitre II.

Le calibrage des paramètres K_i de la commande du système obtenu, équation (3.14), est la partie plus délicate, et présente des particularités physiques importantes à préciser. Un premier point pour simplifier le calibrage et avoir une notion plus physique du système est d'écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad (3.33)$$

La première particularité provient des caractéristiques propres du système hydraulique, pour lequel la fréquence naturelle (ω_n) doit varier sensiblement en fonction de la longueur du bief. Plus le bief sera long et plus la fréquence doit être petite pour éviter des oscillations trop importantes. Le coefficient d'amortissement peut être réglé pour garantir les conditions (3.15). Car sur le système écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_e \\ h_3 - h_e \end{bmatrix} = 0 \quad (3.34)$$

Il est facile d'observer qu'il peut être transformé en l'écrivant en fonction de la somme et la différence des variables comme :

$$\begin{aligned} (\ddot{h}_3 - \ddot{h}_1) + K_1(\dot{h}_3 - \dot{h}_1) + K_2(h_3 - h_1) &= 0 \\ (\ddot{h}_3 + \ddot{h}_1) + K_1(\dot{h}_3 + \dot{h}_1) + K_2(h_3 + h_1 - 2h_e) &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pour ce nouveau système il est facile d'exprimer les contraintes graphiquement.

La contrainte (3.15) porte sur la différence, première équation du système (3.35), et peut s'exprimer graphiquement comme suit :

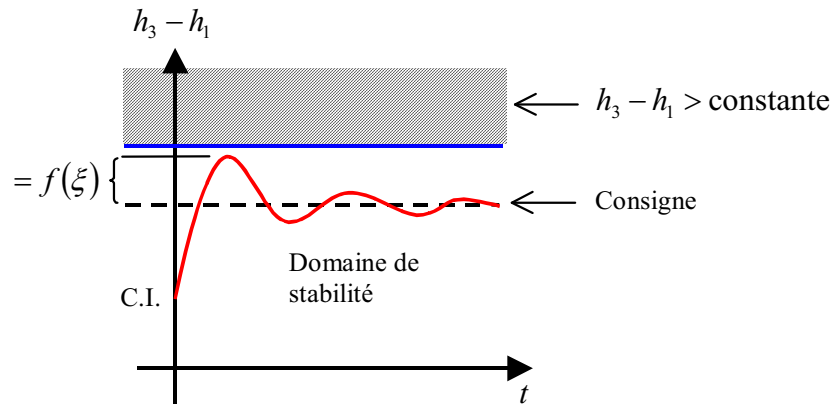


Figure 3.2. Représentation graphique de la contrainte (3.15)

Comme les gains sont égaux pour les deux variables cela indique qu'il suffit de régler le coefficient d'amortissement ξ pour garantir que la contrainte soit bien satisfaite, et bien sûr, que le système ne soit pas initialement hors du domaine de stabilité. De plus le coefficient d'amortissement peut être augmenté avec la longueur pour diminuer l'amplitude des oscillations.

Les coefficients à calibrer sont alors :

$$K_1 = 2\xi\omega_n I_d \text{ et } K_2 = \omega_n^2 I_d \quad (3.36)$$

Avec I_d matrice identité.

Le calibrage de ces paramètres en fonction de la longueur L a été fait de façon empirique par essais de simulation sur deux valeurs de longueur (1 Km et 10 Km), en garantissant pour le choix de ξ les conditions sur les dépassements tolérés (3.15). Par la suite une loi a été établie par une interpolation linéaire entre ces deux valeurs de longueur et un ajustage pour des longueurs intermédiaires. Les lois obtenues sont les suivantes :

$$\omega_n = \frac{50}{(200 + L)} \quad (3.37)$$

$$\xi = 1 + ((L - 1000)2 \times 10^{-4}) \quad (3.38)$$

3.3.4. Variante de la commande par retour d'état linéarisant dynamique avec estimateur de l'infiltration q

Si l'on suppose, par souci de réalisme, que l'hypothèse de connaissance de l'infiltration (q) est relaxée, il est possible de développer une loi de commande par retour d'état linéarisant dynamique en ajoutant un estimateur de cette infiltration. Pour cela le système est écrit sous la forme normale :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_2 = \varphi_1(Y, u) + \varphi_2(Y)q + Mv \\ \dot{Y}_3 = f(Q_2, h, u, q) \end{cases} \quad (3.39)$$

Avec :

$$M = \frac{1}{BL} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$f(Q_2, h, u, q) = \frac{2Q_2(u_1 - u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \quad (3.41)$$

$$\varphi_1(Y, u) = \frac{1}{BL} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \left[\frac{2Y_3(u_1 - u_2)}{BLY_4} + \frac{Y_3^2[-1 \ 1]Y_1}{BLY_4^2} - gBY_4 \left[\frac{[-1 \ 1]Y_1}{L} - I + \frac{Y_3^2}{k^2 B^2 Y_4^2 \left(\frac{BY_4}{B + 2Y_4} \right)^{4/3}} \right] \right] \quad (3.42)$$

$$\varphi_2(Y) = \frac{1}{BL} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \left(\frac{k_q q}{B} \frac{Y_3}{Y_4} \right) \quad (3.43)$$

Où l'infiltration (q) est supposée inconnue et avec $Y_4 = h_2$.

On utilise la commande :

$$v = -M^{-1} [\varphi_1(Y, u) + \varphi_2(Y)\hat{q} + K_1 Y_2 + K_2 Y_1] \quad (3.44)$$

Où \hat{q} est un estimé de q , d'où :

$$\dot{Y}_2 + K_1 Y_2 + K_2 Y_1 = \varphi_2(Y)\tilde{q} \Leftrightarrow \dot{X} = AX + B\varphi_2(Y)\tilde{q} \quad (3.45)$$

Avec $\tilde{q} = q - \hat{q}$, $K_1, K_2 > 0$ et

$$X = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_d \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Pour construire l'estimateur de l'infiltration on introduit la fonction de Lyapunov candidate :

$$V(Y_1, Y_2, \tilde{q}) = \frac{1}{2} X^T P X + \frac{1}{2} \gamma \tilde{q}^2, \quad V > 0, \gamma > 0 \quad (3.47)$$

Où $P = P^T > 0$ est telle qu'il existe $Q = Q^T > 0$, telle que $A^T P + PA = -Q$, (on utilise le fait que

$\dot{Y}_2 + K_1 Y_2 + K_2 Y_1 = 0$ est asymptotiquement stable pour tout $K_1, K_2 > 0$)

La dérivée de la fonction de Lyapunov candidate sera donc :

$$\dot{V}(Y_1, Y_2, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \dot{X}^T P X + \frac{1}{2} X^T P \dot{X} + \gamma \tilde{q} \dot{\tilde{q}} \quad (3.48)$$

$$\dot{V}(Y_1, Y_2, \tilde{q}) = \frac{1}{2} (AX + B\varphi_2(Y)\tilde{q})^T P X + \frac{1}{2} X^T P (AX + B\varphi_2(Y)\tilde{q}) + \gamma \tilde{q} \dot{\tilde{q}}$$

Or $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ car q est supposée constante, d'où :

$$\dot{V}(Y_1, Y_2, \tilde{q}) = -\frac{1}{2} X^T Q X + \tilde{q} (\varphi_2(Y)^T B^T P X - \gamma \dot{q}) \quad (3.49)$$

Il suffit que :

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \varphi_2(Y)^T B^T P X \quad (3.50)$$

Qui représente un estimateur de q pour que :

$$\dot{V}(Y_1, Y_2, \tilde{q}) = -\frac{1}{2} X^T Q X \leq 0 \quad (3.51)$$

Donc \tilde{q} est bornée, suivant le lemme de Barbalat [Khalil, 1996]. $\hat{q} \rightarrow q$ n'est vérifié que sous l'hypothèse de persistance de l'excitation $\varphi_2(Y) \neq 0$.

La loi de commande modifiée est :

$$\begin{cases} v = -M^{-1} [\varphi_1(Y, u) + \varphi_2(Y)\hat{q} + K_1 Y_2 + K_2 Y_1] \\ \dot{\hat{q}} = \frac{1}{\gamma} \varphi_2(Y)^T B^T P \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{q}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

L'analyse de la dynamique résiduelle reste la même que pour la commande sans estimateur.

Cette version de la commande ne sera pas utilisée pour les simulations, car par la suite un observateur d'infiltration sera proposé, ce qui permet satisfaire le même objectif avec en plus l'estimation du débit Q_2 .

3.4. COMMANDE PAR UNE METHODE BACKSTEPPING

Nous traduisons notre objectif de commande en cherchant à réguler le canal autour d'un régime d'équilibre du modèle de commande défini par :

$$h_{2e} = h_e; \quad Q_{2e} = u_{1e} + \frac{1}{2} qL; \quad u_{2e} = u_{1e} + qL \quad (3.53)$$

Avec $h_{2e} = \frac{1}{2}(h_{1e} + h_{3e})$, et il est faut choisir h_{2e} compatible avec Q_{2e} conformément aux conditions d'équilibre physiques.

Pour une commande par la méthode dite de "backstepping" [Krstic et al,1995], l'équation (3.1) est réécrite sous la forme compacte (3.54) :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{BL}[-4Q_2 + 3u_1 + u_2] + \frac{q}{B} \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{BL}[4Q_2 - u_1 - 3u_2] + \frac{q}{B} \\ \dot{Q}_2 = a(Q_2, h_2)(h_3 - h_1) + f(Q_2, h_2, u_1 - u_2, q) \end{cases} \quad (3.54)$$

Avec :

$$f(Q_2, h_2, u_1 - u_2, q) = -\frac{gQ_2^2}{k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} + \left(\frac{2(u_1 - u_2)}{BL} + \frac{k_q q}{B} \right) \frac{Q_2}{h_2} + gBh_2 I \quad (3.55)$$

$$a(Q_2, h_2) = \left(\frac{Q_2^2}{BLh_2^2} - \frac{gBh_2}{L} \right) \quad (3.56)$$

A partir de cette représentation on peut trouver une forme de type "feedback strict" qui permet une solution par Backstepping.

Pour cela on va définir les nouvelles variables comme suit :

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 - u_2; \quad U_2 = u_1 + u_2 \\ H &= h_3 - h_1; \quad h_2 = \frac{1}{2}(h_3 + h_1) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Le système peut alors se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{h}_2 = \frac{1}{BL}U_1 + \frac{q}{B} \\ \dot{H} = \frac{4}{BL}[2Q_2 - U_2] \\ \dot{Q}_2 = a(Q_2, h_2)H + f(Q_2, h_2, U_1, q) \end{cases} \quad (3.58)$$

Sous cette forme, on voit d'une part que h_2 peut être commandé par U_1 . D'autre part on peut remarquer d'après (3.56) que a est lié au nombre de Froude qui caractérise ce type d'écoulement (voir paragraphe 1.2.3.3) et que pour un écoulement fluvial $a < 0$.

$$Fr = \frac{Q}{Bh\sqrt{gh}} < 1 \Leftrightarrow a(Q_2, h_2) = \left(\frac{Q_2^2}{BLh_2^2} - \frac{gBh_2}{L} \right) < 0 \quad (3.59)$$

Donc pour ce type d'écoulement, étant donné la forme de (3.58), Q_2 et H peuvent être commandés par Backstepping par u_2 .

On obtient les résultats suivants:

3.4.1. Théorème

Pour le système d'équation (3.58) avec $a < 0$, étant données h_{2e} et Q_{2e} le choix des variables de commande :

$$U_1 = -BLK_1(h_2 - h_{2e}) - Lq \quad (3.60)$$

$$U_2 = \frac{BL}{4} K_{22} H_d + 2Q_2 + a(Q_2, h_2) \frac{BL}{4} Q_d + \frac{BL}{4} \frac{d}{dt}(H_e) \quad (3.61)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_2 - Q_{2e} \\ H_d &= H - H_e \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$H_e = \frac{-1}{a(Q_2, h_2)} [K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] \quad (3.63)$$

Et pour tout K_1 , K_{21} et K_{22} positifs, rend le système (3.58) stable avec :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = h_e \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} Q_2(t) = Q_{2e} \quad (3.64)$$

3.4.2. Preuve

3.4.2.1. Commande de h_2 avec U_1 par placement de pôles :

A partir de l'équation de \dot{h}_2 , et avec pour objectif $\dot{h}_2 = -K_1(h_2 - h_{2e})$ avec $K_1 > 0$, la commande sera alors :

$$U_1 = -BLK_1(h_2 - h_{2e}) - Lq \quad (3.65)$$

Ce qui garantit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = h_{2e} \quad (3.66)$$

De plus, si $h_{2(0)}$ et h_{2e} sont positifs, $h_{2(t)}$ reste positif ce qui évite les singularités du modèle.

3.4.2.2. Commande de Q_2 et H avec U_2 par Backstepping :

Dans ce cas la partie restante du système à commander est :

$$\begin{cases} \dot{Q}_2 = a(Q_2, h_2)H + f(Q_2, h_2, U_1, q) \\ \dot{H} = \frac{4}{BL}[2Q_2 - U_2] \end{cases} \quad (3.67)$$

Première étape : "commande de Q_2 avec H "

Pour cela à partir de l'équation de \dot{Q}_2 , et avec pour objectif $\dot{Q}_2 = -K_{21}(Q_2 - Q_{2e})$ avec $K_{21} > 0$ et Q_{2e} à choisir plus tard, l'évolution de H devrait être telle que :

$$H \rightarrow \frac{-1}{a(Q_2, h_2)}[K_{21}(Q_2 - Q_{2e}) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] := H_e \quad (3.68)$$

Ceci garantit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_2(t) = Q_{2e} \quad (3.69)$$

deuxième étape : "commande de H par U_2 "

Soit le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_2 - Q_{2e} \\ H_d &= H - H_e = H + \frac{1}{a(Q_2, h_2)}[K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} \dot{Q}_d = \dot{Q}_2 - \dot{Q}_{2e} = a(Q_2, h_2)H + f(Q_2, h_2, U_1, q) \\ \dot{H}_d = \dot{H} - \dot{H}_e = \frac{4}{BL}[2Q_2 - U_2] - \frac{d}{dt}(H_e) \end{cases} \quad (3.71)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H_e) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a(Q_2, h_2)} [K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] \right) \\ \frac{d}{dt}(H_e) &= [K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] \left(\frac{-\frac{d}{dt}a(Q_2, h_2)}{a(Q_2, h_2)^2} \right) + \frac{1}{a(Q_2, h_2)} \left[K_{21}(\dot{Q}_d) + \frac{d}{dt}f(Q_2, h_2, U_1, q) \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Et :

$$\frac{d}{dt}(a(Q_2, h_2)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q_2^2}{BLh_2^2} - \frac{gBh_2}{L} \right) = \frac{2Q_2\dot{Q}_2BLh_2^2 - 2Q_2^2BLh_2\dot{h}_2}{(BLh_2^2)^2} - \frac{gB\dot{h}_2}{L} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(Q_2, h_2, U_1, q) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{gQ_2^2}{k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{B+2h_2} \right)^{4/3}} + \left(\frac{2U_1}{BL} + \frac{k_q q}{B} \right) \frac{Q_2}{h_2} + gBh_2 I \right) \\ \frac{d}{dt} f(Q_2, h_2, U_1, q) &= \frac{-2gQ_2 \dot{Q}_2}{k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{B+2h_2} \right)^{4/3}} + \frac{gQ_2^2 k^2 B \left(\dot{h}_2 \left(\frac{Bh_2}{B+2h_2} \right)^{4/3} + \frac{4}{3} h_2 \left(\frac{Bh_2}{B+2h_2} \right)^{1/3} \left(\frac{B\dot{h}_2(B+2h_2) - 2Bh_2\dot{h}_2}{(B+2h_2)^2} \right) \right)}{\left(k^2 Bh_2 \left(\frac{Bh_2}{B+2h_2} \right)^{4/3} \right)^2} \\ &\quad + \left(\left(\frac{2\dot{U}_1}{BL} \right) \frac{Q_2}{h_2} + \left(\frac{2U_1}{BL} + \frac{k_q q}{B} \right) \frac{\dot{Q}_2 h_2 - Q_2 \dot{h}_2}{h_2^2} \right) + gB\dot{h}_2 I \end{aligned} \quad (3.74)$$

En ajoutant et retranchant $[K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)]$ de \dot{Q}_d :

$$\begin{cases} \dot{Q}_d = f(Q_2, h_2, U_1, q) + a(Q_2, h_2) \left[H + \frac{1}{a(Q_2, h_2)} [K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] \right] - [K_{21}(Q_d) + f(Q_2, h_2, U_1, q)] \\ \dot{H}_d = \frac{4}{BL} [2Q_2 - U_2] + \frac{d}{dt}(H_e) \end{cases} \quad (3.75)$$

Les expressions deviennent :

$$\begin{cases} \dot{Q}_d = a(Q_2, h_2) H_d - K_{21}(Q_d) \\ \dot{H}_d = \frac{4}{BL} [2Q_2 - U_2] + \frac{d}{dt}(H_e) \end{cases} \quad (3.76)$$

Pour déterminer la commande U_2 qui garantit la stabilité de H_d et donc du système une méthode de Lyapunov est utilisée. La fonction candidate choisie est :

$$V = \frac{1}{2} Q_d^2 + \frac{1}{2} H_d^2 \quad (3.77)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V} = Q_d \dot{Q}_d + H_d \dot{H}_d = Q_d (a(Q_2, h_2) H_d - K_{21}(Q_d)) + H_d \left(\frac{4}{BL} [2Q_2 - U_2] + \frac{d}{dt}(H_e) \right) \quad (3.78)$$

$$\dot{V} = -K_{21} Q_d^2 + H_d \left(\frac{4}{BL} [2Q_2 - U_2] + a(Q_2, h_2) Q_d + \frac{d}{dt}(H_e) \right) \quad (3.79)$$

Il est possible de choisir une valeur de U_2 telle que :

$$\frac{4}{BL} [2Q_2 - U_2] + a(Q_2, h_2) Q_d + \frac{d}{dt}(H_e) = -K_{22} H_d \quad \text{pour } K_{22} > 0 \quad (3.80)$$

$$\text{i.e. } U_2 = \frac{BL}{4} K_{22} H_d + 2Q_2 + a(Q_2, h_2) \frac{BL}{4} Q_d + \frac{BL}{4} \frac{d}{dt}(H_e) \quad (3.81)$$

Cela garantit que le système est stable, car :

$$\dot{V} = -K_{21}Q_d^2 - K_{22}H_d^2 \quad (3.82)$$

Donc $Q_2 \rightarrow Q_{2e}$ et $h_3 - h_1 \rightarrow H_e(Q_{2e}, h_{2e})$

Finalement le contrôleur développé fait tendre les variables Q_2, h_2 vers des consignes prédéfinies Q_{2e}, h_{2e} et garantit que les variables h_1, h_3 tendent vers leurs valeurs finales qui dépendent de Q_{2e}, h_{2e} .

Finalement les commandes sur le débit se calculent comme suit :

$$\begin{cases} U_1 = u_1 - u_2 \\ U_2 = u_1 + u_2 \end{cases} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{U_1 + U_2}{2} \\ u_2 &= \frac{U_2 - U_1}{2} \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{BL}{2} \left(-K_1(h_2 - h_{2e}) + \frac{K_{22}}{4} H_d + \frac{a(Q_2, h_2)}{4} Q_d + \frac{1}{4} \frac{d}{dt}(H_e) \right) - \frac{Lq}{2} + Q_2 \\ u_2 &= \frac{BL}{2} \left(K_1(h_2 - h_{2e}) + \frac{K_{22}}{4} H_d + \frac{a(Q_2, h_2)}{4} Q_d + \frac{1}{4} \frac{d}{dt}(H_e) \right) + \frac{Lq}{2} + Q_2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Remarque : il est également possible de relaxer l'hypothèse de connaissance de l'infiltration q en introduisant une technique d'estimation de q .

3.4.3. Mise en Œuvre

De même que pour le contrôleur par linéarisation entrée-sortie, pour la mise en œuvre du contrôleur ci-dessus, les équations développés auparavant ont été introduites dans une S-Function de Simulink, qui sera par la suite utilisée comme commande dans le schéma de simulation présenté au chapitre II.

Quant au calibrage des paramètres, il pose ici plus de problèmes car il n'existe pas de correspondance directe entre les paramètres à calibrer et les valeurs physiques du système. Le calibrage a donc été ici plus difficile et seuls les valeurs correspondant à un bief de 1 Km de long sont présentées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1. Calibrage du contrôleur Backstepping

Longueurs de bief	K_1	K_{21}	K_{22}
1 000	0.003	0.05	0.002

3.5. VALIDATION DES COMMANDES

La validation des commandes se fait en plusieurs étapes. La première étape correspond à la validation de la commande avec un simulateur basé sur le modèle utilisé pour le développement des commandes, c'est-à-dire un modèle par collocation à trois points. Ensuite, dans le but de tester la validité des commandes dans des conditions plus réalistes, et donc la robustesse des commandes par rapport au modèle, les commandes seront appliquées à des modèles plus complets. Cela permettra une comparaison de ces commandes.

La deuxième étape sera le test des commandes sur des modèles plus précis : un modèle par collocation avec plus de points (choisis suivant la longueur du bief) et un modèle de différences finies implicite (Preissmann).

La troisième et dernière étape sera le test des commandes sur un modèle plus réaliste, qui prend en compte les équations et conditions de fonctionnement des ouvrages d'interconnexion des biefs.

La Figure 3.3 représente le schéma de simulation complet du système mis en œuvre sous Matlab Simulink pour la validation du système par simulation. On note que dans ce modèle il est possible de prendre en compte ou non les restrictions et équations d'ouvrage, et d'utiliser au choix le type de modèle pour le système ainsi que le modèle de la commande.

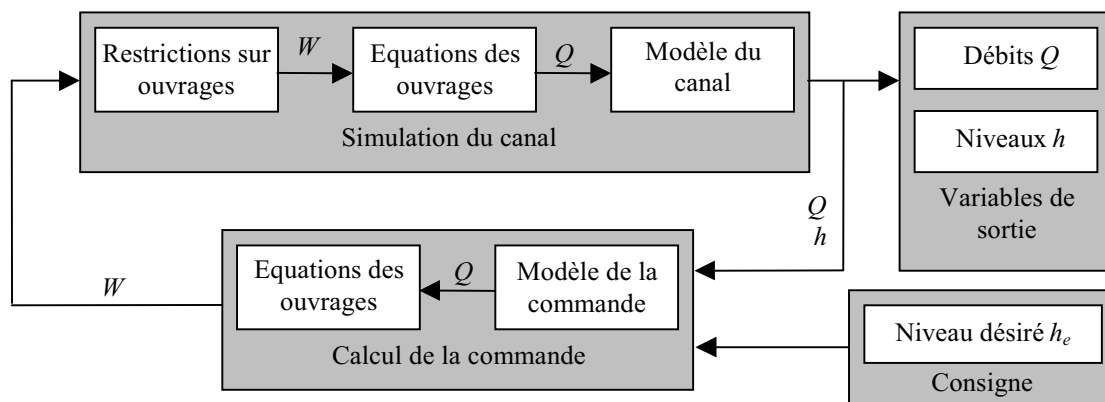


Figure 3.3. Schéma de simulation

Afin de valider la commande des test sous diverses configuration on été réalisés, et on a choisi de présenter ici seul les résultats des simulations les plus illustratives des conclusions obtenues. Les simulations montrées par la suite sont faites pour un canal avec section transversale rectangulaire de géométrie constante avec une largeur $B = 1\text{ m}$, une pente $I = 0,1\%$ et un coefficient de Strickler $k = 25$, et pour plusieurs longueurs de bief allant de 1 Km à 50 Km. Deux types de test sont proposés. Le premier est une variation de consigne de 20% ($h = 1,5\text{ m}$ à $h = 1,8\text{ m}$) pour tester la capacité de la commande à atteindre une valeur de niveau donnée à partir d'une autre valeur de niveau. Le deuxième est un test de rejet de perturbation, avec ajout d'infiltration ou de prise latérale. Il est

important de noter ici que la prise latérale n'est utilisée que pour le simulateur de Preissmann, en raison de la non validation de la simulation des prises latérales pour le simulateur par collocation.

3.5.1 Première étape : modèle par collocation à trois points

Dans la première étape de la validation il s'agit de vérifier que les lois de commande développées fonctionnent comme prévue, et elles sont donc testées en simulation sur le modèle utilisé pour leur calcul.

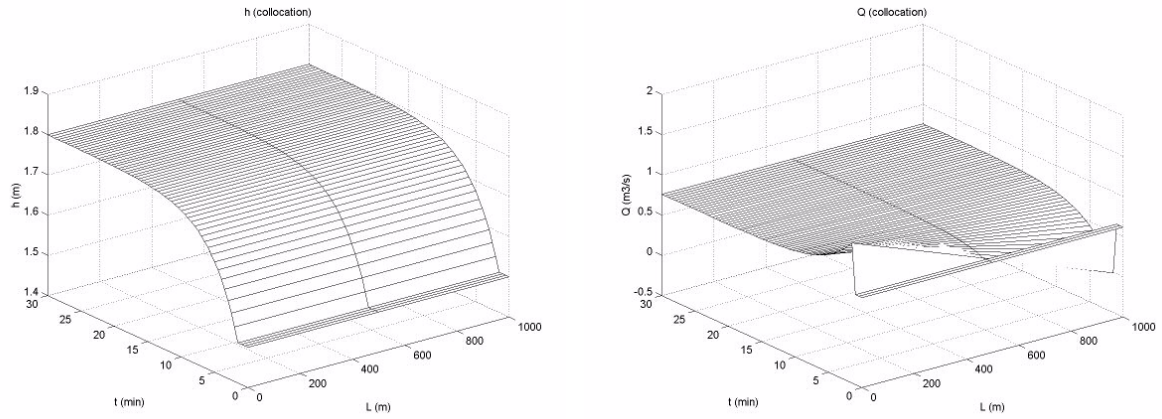
Cependant il est à noter que le modèle à trois points possède une précision limitée, et ne peut être considéré comme suffisamment précis que pour des biefs relativement courts. De plus ce modèle, en raison de son équation unique sur le débit, ne permet pas de représenter l'infiltration correctement, et les simulations avec ou sans infiltrations sont identiques. Pour cela les tests dans cette étape seront limités à des biefs de 1000 m de long sans infiltration.

La Figure 3.4 montre les simulations pour des biefs de 1000 m de long, avec une variation de la consigne de 20% sans infiltration, pour les trois méthodes de commande. Ces simulations montrent que les trois méthodes présentent de bons résultats, et le niveau atteint bien la valeur de référence désirée. La méthode par linéarisation entrée sortie dynamique semble la plus performante car la valeur de référence est atteinte plus rapidement, et bien que cela dépend des réglages il est à noter que les trois contrôleurs ont été ajustés avec les mêmes critères.

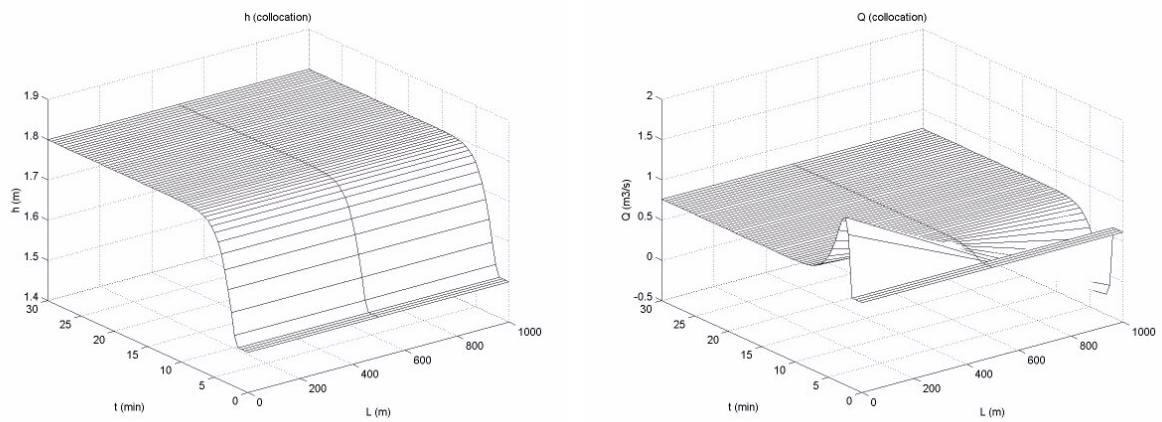
3.5.2. Deuxième étape : modèles plus précis

Cette partie a pour but de tester la robustesse des commandes développées par rapport aux incertitudes du modèle, et pour cela des modèles de plus en plus précis seront utilisés. Initialement sera utilisé un modèle par collocation avec un nombre de points approprié à la longueur du bief, et par la suite une infiltration sera ajoutée. Finalement les simulations seront faites avec un simulateur de Preissmann, cela avec un nombre de points important pour garantir la précision. La Figure 3.5 montre les simulations pour les trois types de commande pour un bief de 1 Km avec un modèle de collocation à 5 points. Il est à noter ici que les trois commandes fonctionnent correctement, et la valeur du niveau atteint effectivement la valeur de la nouvelle référence.

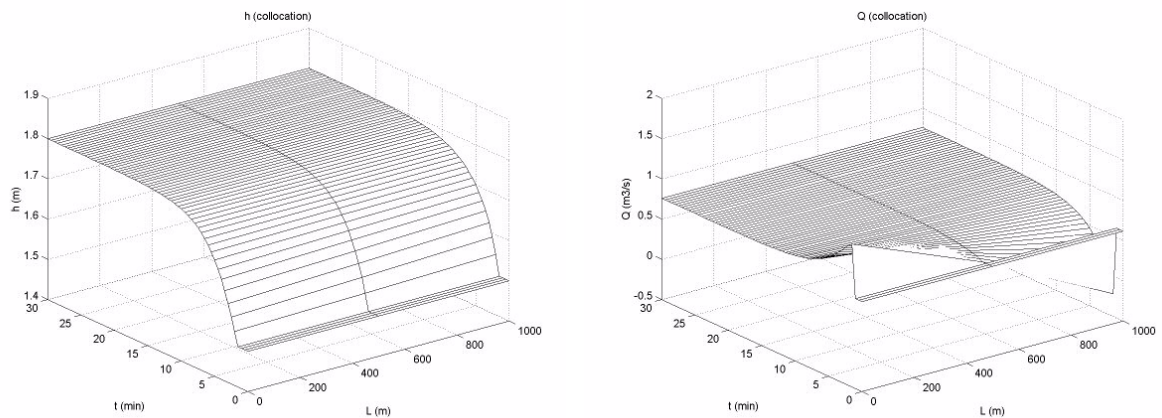
La Figure 3.7 montre une simulation similaire pour un bief de 5 Km de long, et pour les deux commandes par linéarisation entrée-sortie. Il est possible d'observer que les résultats sont presque identiques sur ces figures, et il est difficile sur cette base de dire laquelle des deux est meilleure. Il existe cependant une différence notable entre les résultats des deux méthodes, cette différence peut s'observer sur les valeurs du débit.



a) Commande par linéarisation entrée-sortie statique

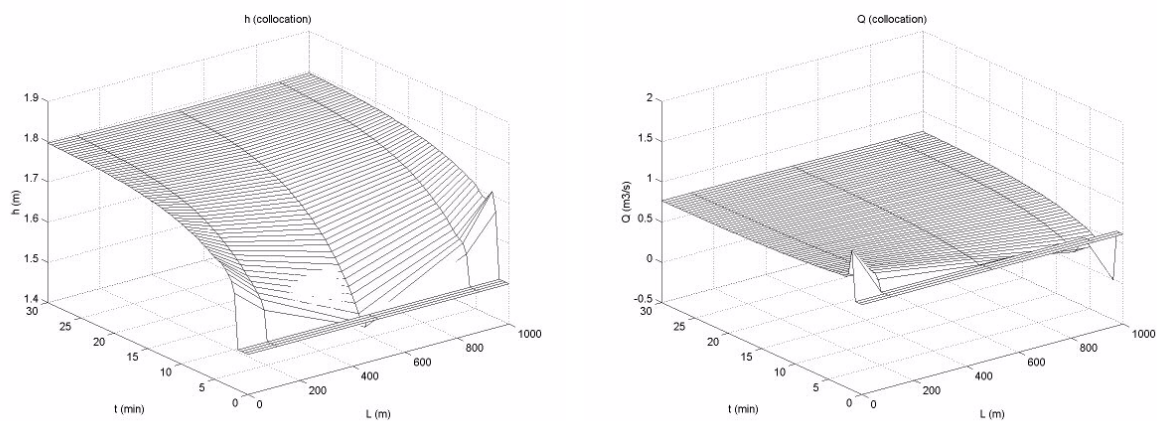


b) Commande par linéarisation entrée-sortie dynamique

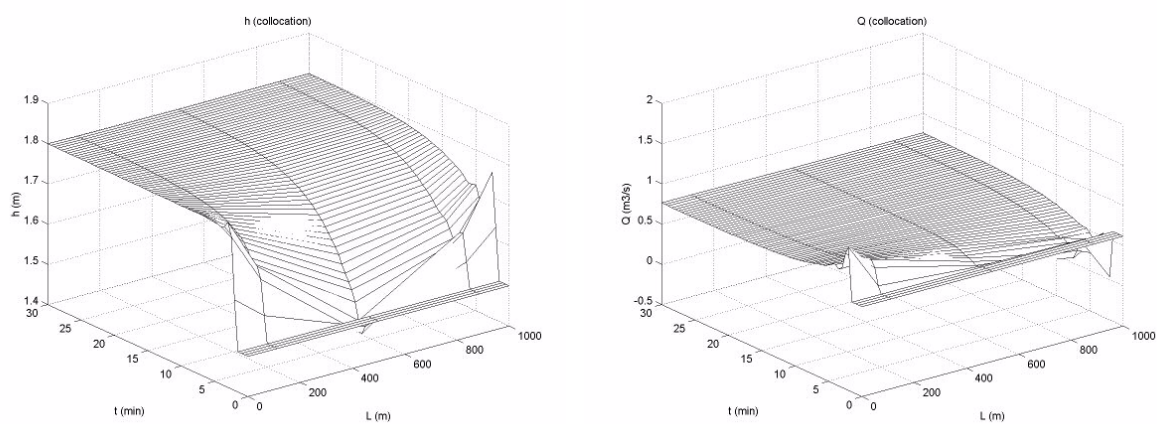


c) Commande par Backstepping

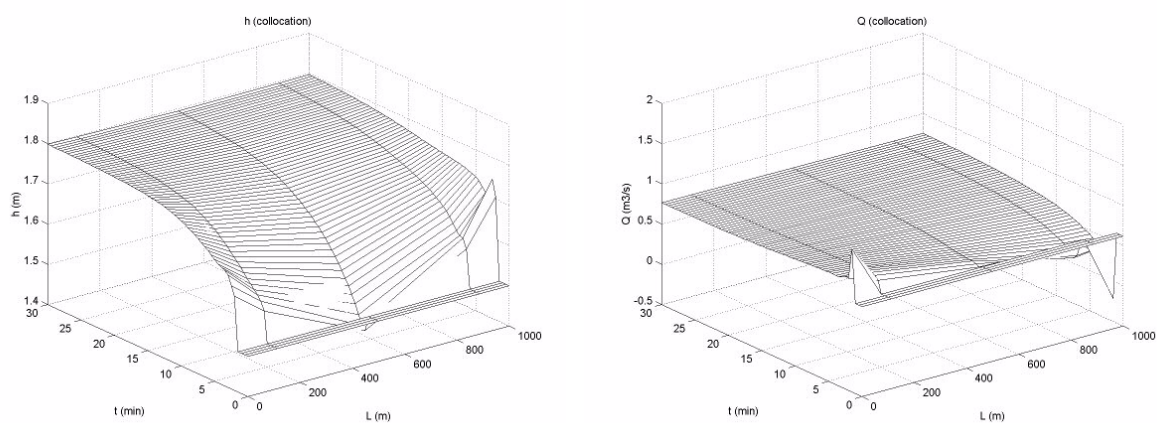
Figure 3.4. Simulation pour un bief de 1 Km et modèle de collocation à 3 points avec variation de consigne de 20%, sans infiltration



a) Commande par linéarisation entrée-sortie statique

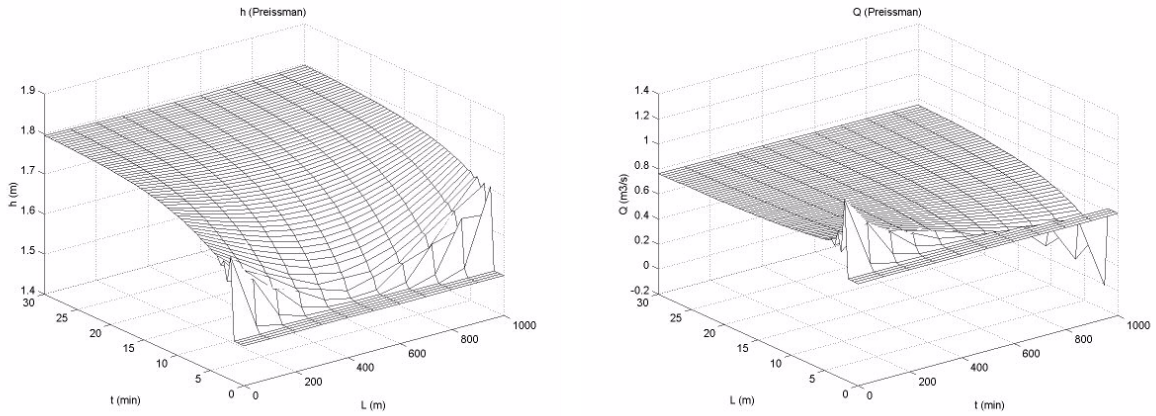


b) Commande par linéarisation entrée-sortie dynamique

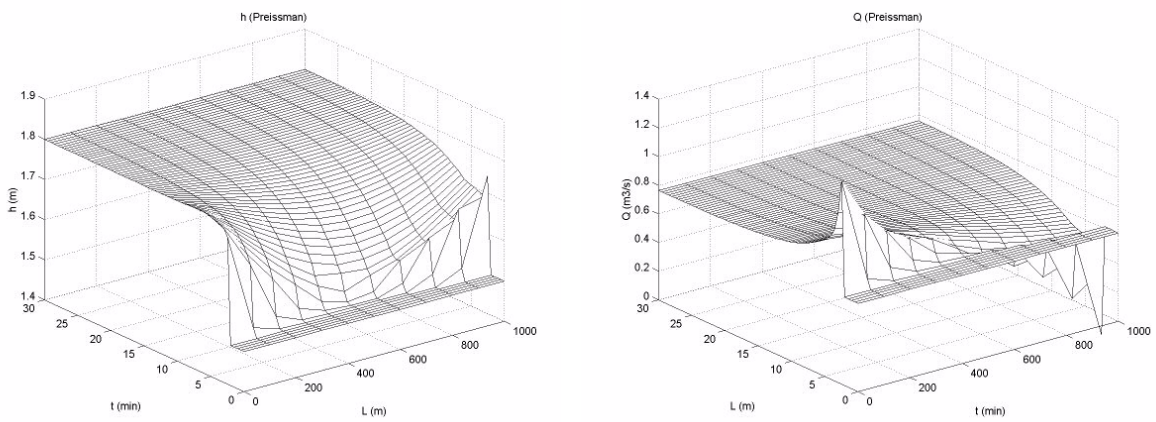


c) Commande par Backstepping

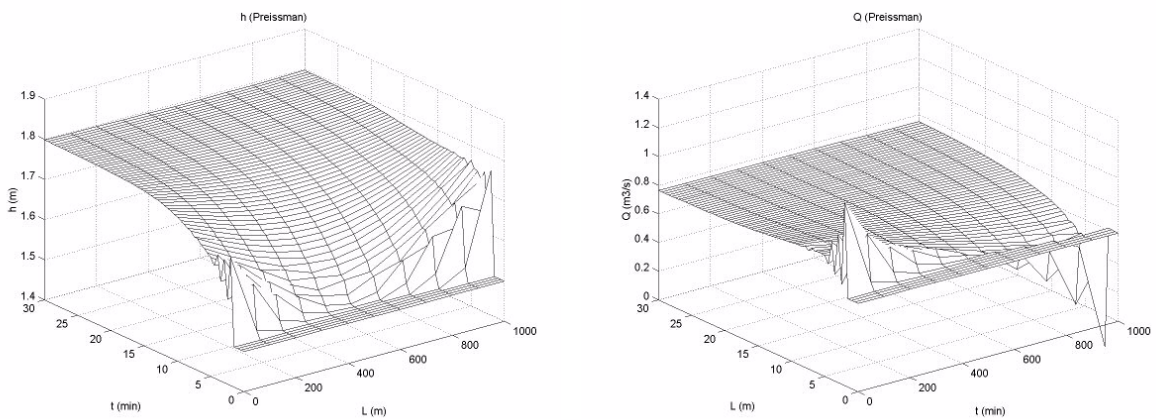
Figure 3.5. Simulation pour un bief de 1 Km et modèle de collocation à 5 points avec variation de consigne de 20%, sans infiltration



a) Commande par linéarisation entrée-sortie statique

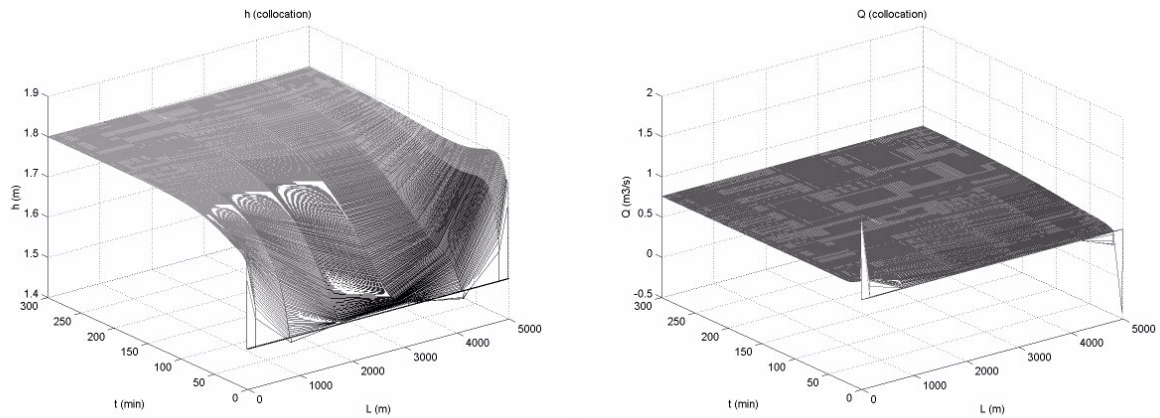


b) Commande par linéarisation entrée-sortie dynamique

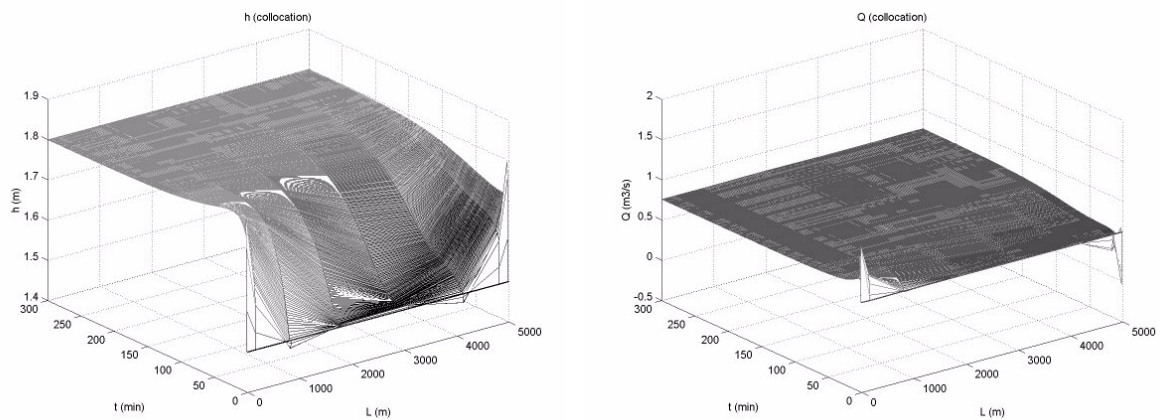


c) Commande par Backstepping

Figure 3.6. Simulation pour un bief de 1 Km et modèle de collocation à 5 points avec variation de consigne de 20%, sans infiltration



a) Commande par linéarisation entrée-sortie statique

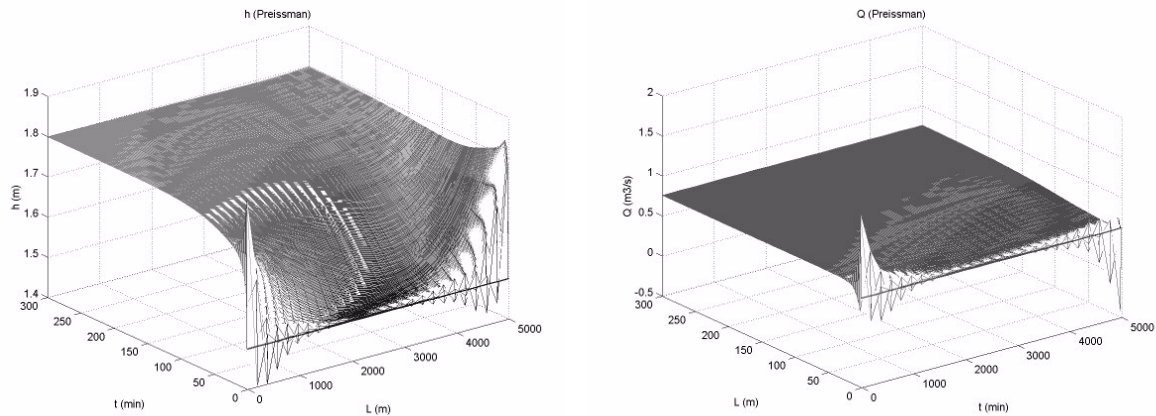


b) Commande par linéarisation entrée-sortie dynamique

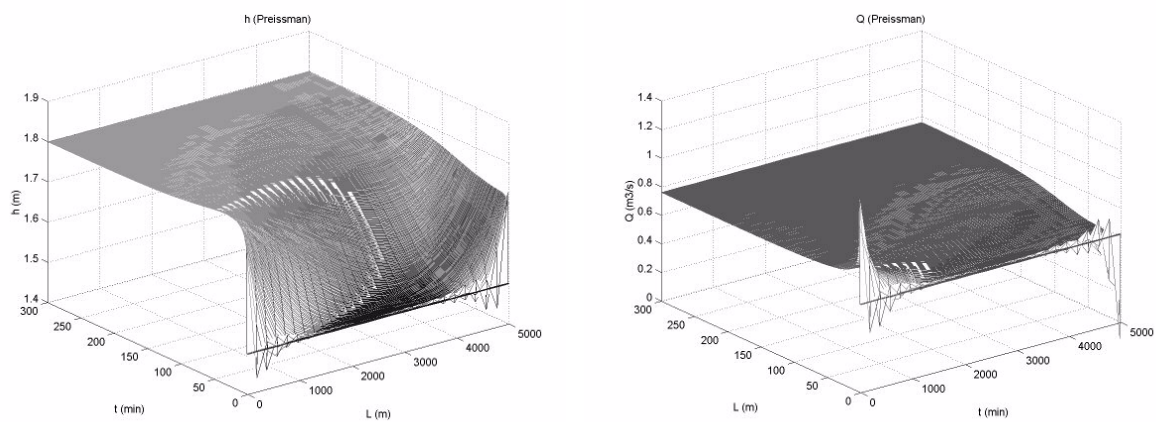
Figure 3.7. Simulation pour bief de 5 Km et modèle de collocation à 8 points avec variation de consigne de 20%, sans infiltration

Il est possible de voir sur cette figure que l'énergie utilisée pour faire varier le niveau, représenté ici par le débit Q , est bien inférieure pour la version dynamique de la commande, et cela pour obtenir un résultat similaire. De plus cette énergie n'est pas vraiment disponible en réalité, puisque pour la vanne aval le débit devient négatif.

Cela indique que la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique est plus satisfaisante du point de vue énergétique. La Figure 3.8 présente la simulation du même bief, sous les mêmes conditions de fonctionnement mais avec le modèle de Preissmann à 25 sections. La figure montre que pour ce modèle des oscillations apparaissent au début de la simulation, ces oscillations ont une cause numérique, et pour les diminuer il suffit d'augmenter le nombre de sections, mais il est à noter que du fait de l'énergie mise en jeu, ces oscillations sont de plus grande importance pour la commande entrée sortie statique que pour sa version dynamique. De fait pour des biefs plus longs le nombre de sections nécessaires pour obtenir une simulation correcte avec cette commande c'est avéré très grand (>100).



a) Commande par linéarisation entrée sortie statique



b) Commande par linéarisation entrée sortie dynamique

Figure 3.8. Simulation pour bief de 5 Km et modèle de Preissmann à 25 sections avec variation de consigne de 20%, sans infiltration

La commande par Backstepping par contre ne fonctionne pas correctement pour des biefs longs. Pour cette commande aucune simulation satisfaisante pour des biefs d'une longueur supérieure à 1 Km n'a pu être réalisée. Pour ces raisons la commande par Backstepping ne sera plus prise en compte par la suite, car nos conclusions ont montré qu'elle n'est pas robuste par rapport au modèle utilisé.

La conclusion à retenir de ces observations est que la commande par linéarisation entrée sortie dynamique semble être la meilleure des trois commandes testées, et pour cela seule celle-ci sera utilisée par la suite.

La Figure 3.9 et la Figure 3.10 représentent des simulations pour des biefs plus longs, 10 Km et 50 Km.

Ces simulations montrent que la commande reste valide pour des biefs très longs, cela indique donc la grande robustesse de celle-ci par rapport au modèle utilisé, et présente donc de très bonnes perspectives en vue de l'utilisation sur un système réel.

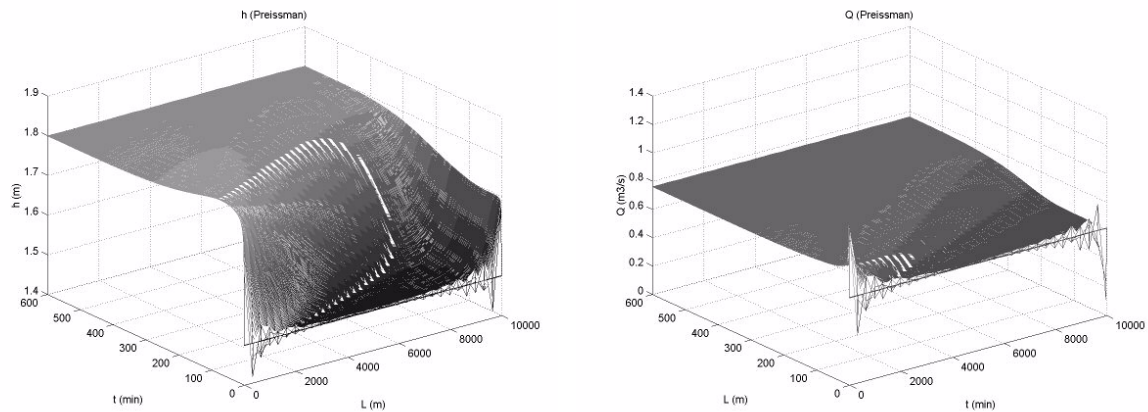


Figure 3.9. Simulation de canal long de 10 Km, simulateur Preissmann à 30 sections sous une variation de la consigne de 20%, avec commande par linéarisation entrée sortie dynamique

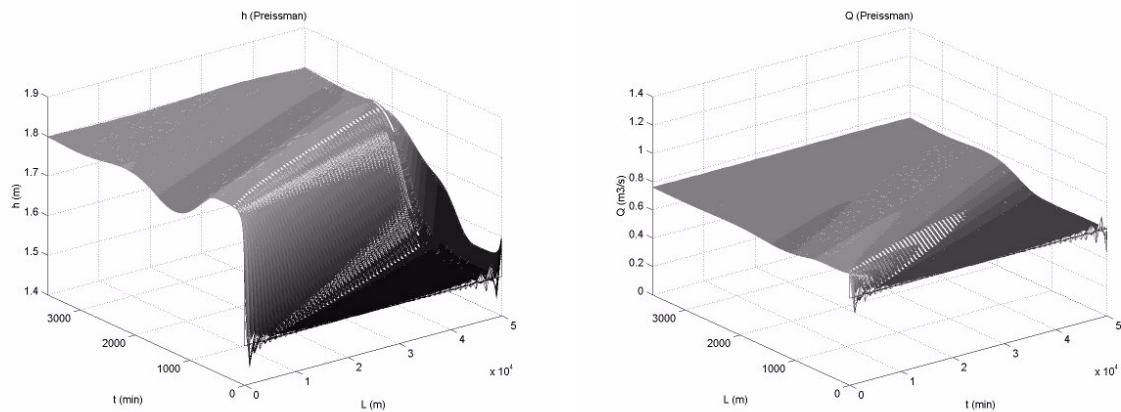
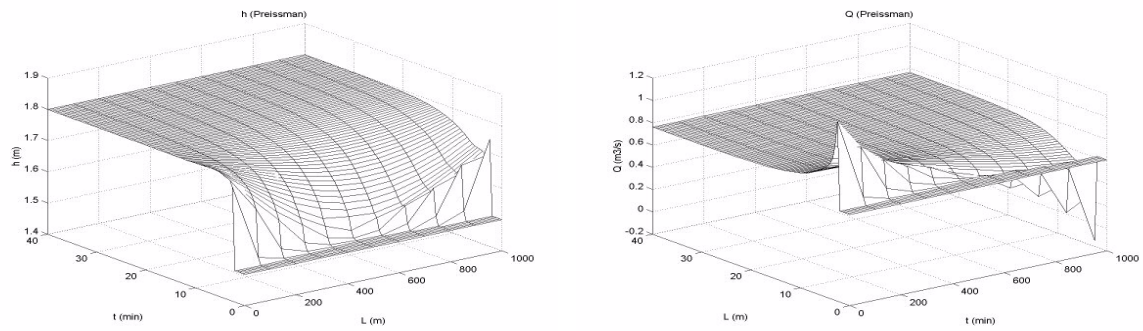


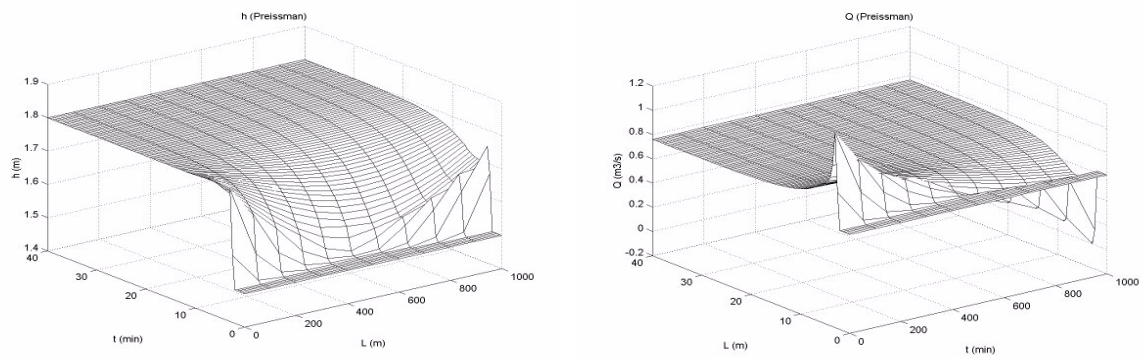
Figure 3.10. Simulation de cana long de 50 Km, simulateur Preissmann à 50 sections sous une variation de la consigne de 20%, avec commande par linéarisation entrée sortie dynamique

3.5.3. Troisième étape : Modèle avec équations d'ouvrages

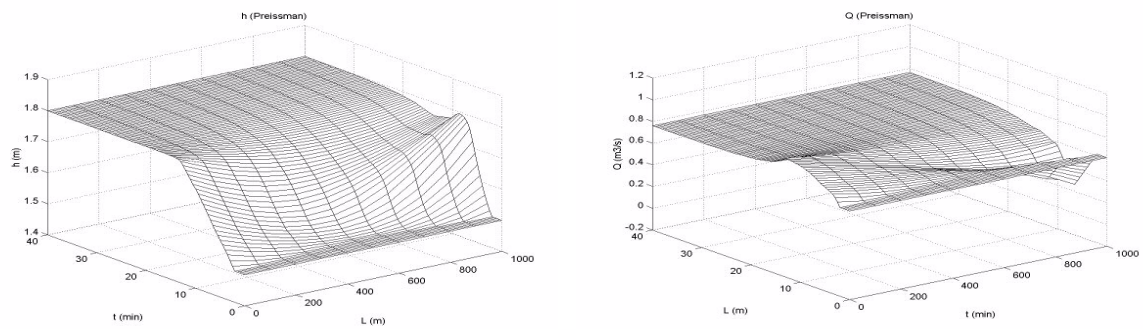
Dans cette partie sera faite la validation de la commande par linéarisation entrée sortie dynamique, en l'appliquant sur un système plus réaliste qui inclut les équations et les conditions de fonctionnement des ouvrages d'interconnexion des biefs, tel qu'ils sont présentés au paragraphe 1.4.1. Seul le modèle de Preissmann sera utilisé à présent. Le modèle des ouvrages et les contraintes sur leur fonctionnement (paragraphe 1.4.2) seront ajoutées successivement de façon à analyser chacun de ces effets sur le fonctionnement du système.



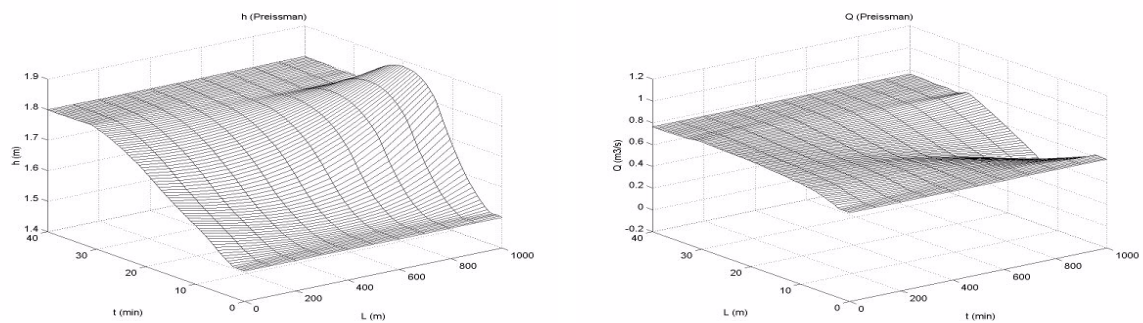
a) Sans équations de vannes



b) Avec équations des vannes



c) Avec équations des vannes et restrictions sur le fonctionnement



d) Avec équations des vannes, restrictions sur le fonctionnement et filtre simulant dynamique du moteur

Figure 3.11. Simulation de la variation de niveau pour un canal ouvert de 1000 m de long pour une commande par linéarisation entrée sortie dynamique sous une variation de la consigne de 20%.

La Figure 3.11 présente les résultats de simulation pour un canal de 1000 mètres de long soumis à une variation de la consigne de 20%, sans prise en compte des équations d'ouvrages (a), avec prise en compte des équations d'ouvrage (b), avec prise en compte des restrictions sur le fonctionnement des vannes (c) et avec prise en compte du modèle du moteur (d).

La Figure 3.12 montre quant à elle l'ouverture des vannes sous les trois conditions de fonctionnement des vannes indiquées précédemment.

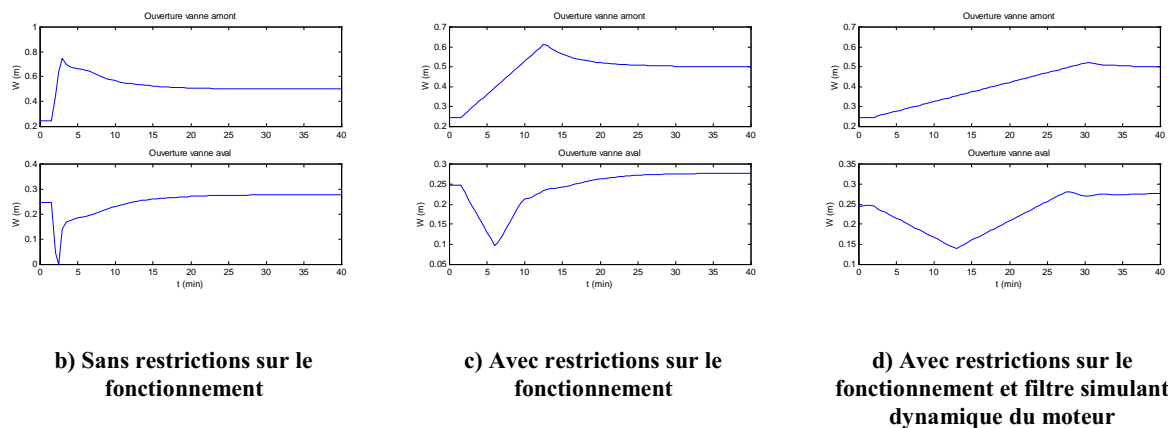


Figure 3.12. Ouverture des vannes pour simulation sur canal de 1 Km de long avec 20% de variation sur la consigne

La restriction de vitesse des vannes se fait en fixant le temps nécessaire pour une ouverture complète de la vanne à 1 heure, ce qui correspond à une ouverture très lente, mais plus ou moins en accord avec les valeurs réelles pour ce type de systèmes (voir canal de la Bourne par exemple).

Il est important de noter ici qu'au vu de la période d'échantillonnage utilisée pour la simulation (30s), la constante de temps pour les moteurs (τ , voir chapitre I) doit être au minimum de cette valeur, faute de quoi l'intégration numérique ne converge pas, alors que la dynamique réelle des moteurs est en général plusieurs fois plus rapide que cette valeur (bien sûr cette valeur dépend des dimensions de l'ouvrage). Pour cela les conclusions portant sur l'introduction ou non du filtre du moteur sont d'une certaine façon exagérées, car l'influence de celui-ci n'est pas ajustée à la réalité de ces systèmes.

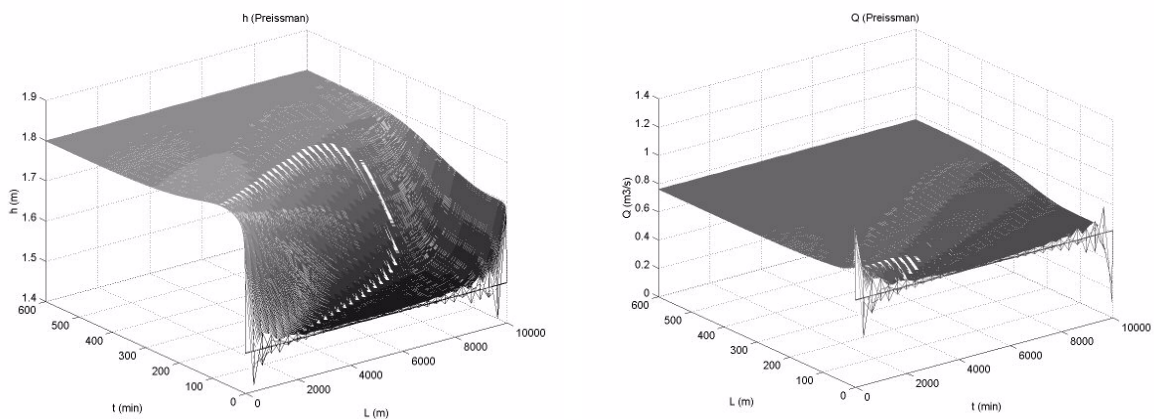
Les simulations présentées sur ces figures montrent que la loi de commande développée est suffisamment robuste pour fonctionner correctement sur un système très réaliste qui prend en compte les conditions de fonctionnement réelles telles que les équations et restrictions de fonctionnement sur les vannes, et cela sur un modèle du système considéré comme bien précis.

En observant en détails les simulations on peut apprécier que :

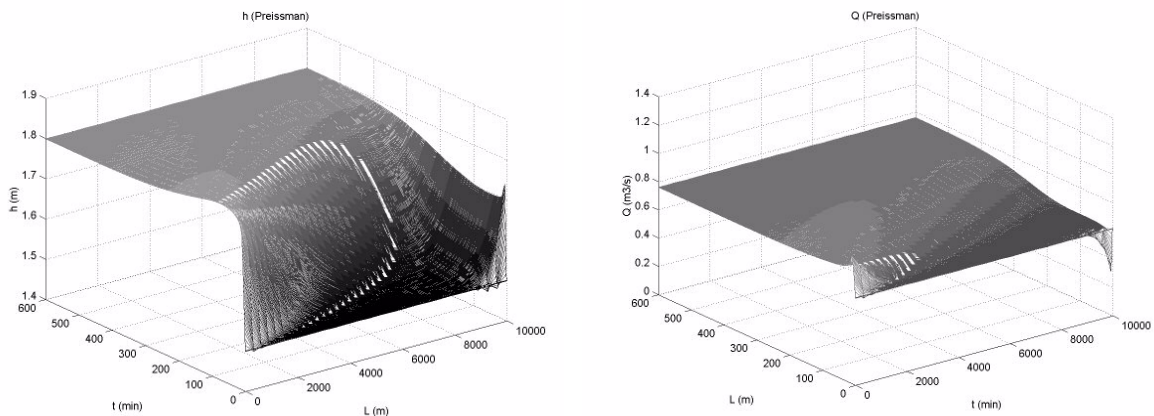
- ❑ Il existe peu de différences entre la simulation avec et sans les équations d'ouvrage.
- ❑ L'influence des restrictions sur le fonctionnement des vannes est quant à elle bien plus importante, et elle affecte sensiblement le temps nécessaire pour atteindre la nouvelle valeur de référence. Cela est dû au temps de réponse provenant de la lenteur de fonctionnement de vanne.

- L'influence du filtre du second ordre qui simule l'équation du moteur des vannes est aussi importante, même si comme il a été indiqué ces résultats sont un peu faussés. Dans ce cas des dynamiques sont ajoutées au système et se traduisent par un temps de réponse plus long pour les vannes, ce qui produit une augmentation de l'amplitude des oscillations, et de ce fait le temps pour atteindre la nouvelle valeur de référence est encore augmenté.

Pour des biefs plus longs l'influence des vannes et des conditions de fonctionnement est beaucoup plus limitée, la Figure 3.13 montre les simulations pour un bief de 10 Km avec et sans équations d'ouvrages et conditions de fonctionnement.



a) Sans équations des vannes



c) Avec équations des vannes et restrictions sur le fonctionnement

Figure 3.13. Simulation de la variation de niveau pour un canal de 10 Km de long, avec le modèle de Preissmann à 30 sections sous une variation de la consigne de 20%

L'observation de ces figures montre une différence très petite entre l'utilisation ou non des vannes et leurs conditions de fonctionnement. En fait, il semble que l'utilisation des vannes soit ici plutôt avantageuse car elle a tendance à filtrer les petites oscillations numériques. Cette petite influence est logique car pour des biefs de ce type les temps de réponse sont plus longs, donc le fait de ralentir la réponse des commandes n'est pas très important.

3.5.4. Rejet de perturbations

Deux types de perturbations peuvent se présenter sur un bief de canal, une infiltration ou une prise latérale.

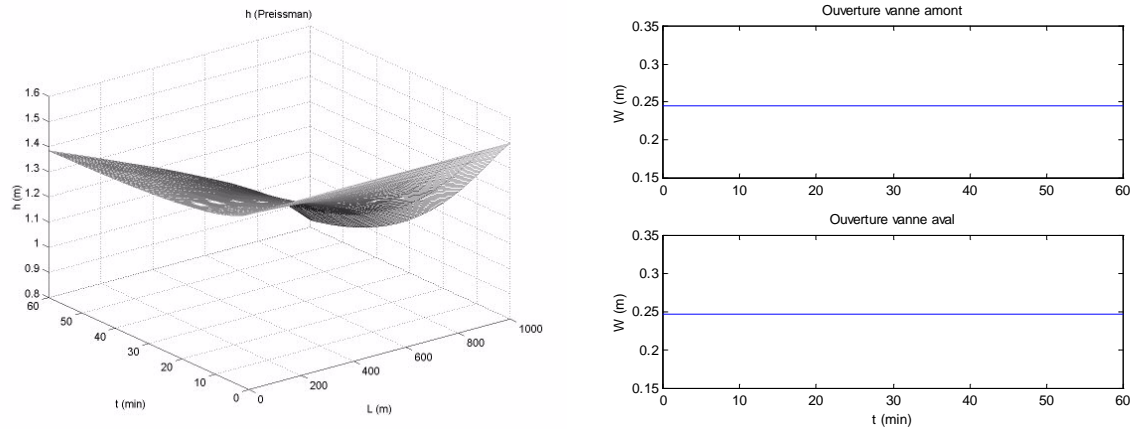
3.5.4.1. Infiltration

Parmi les infiltrations on peut considérer trois types de phénomènes : une perte d'eau par infiltration proprement dite, une perte d'eau par évaporation ou un gain d'eau par une pluie. La première peut sous certaines conditions être estimée suivant le type de matériel dont est construit le canal, mais les deux autres sont très difficiles à estimer, car elles dépendent des conditions climatiques, et constituent donc une vraie perturbation. Il est donc important de savoir si la commande est capable sous des conditions d'infiltration de pouvoir ramener le niveau à celui établi par la consigne.

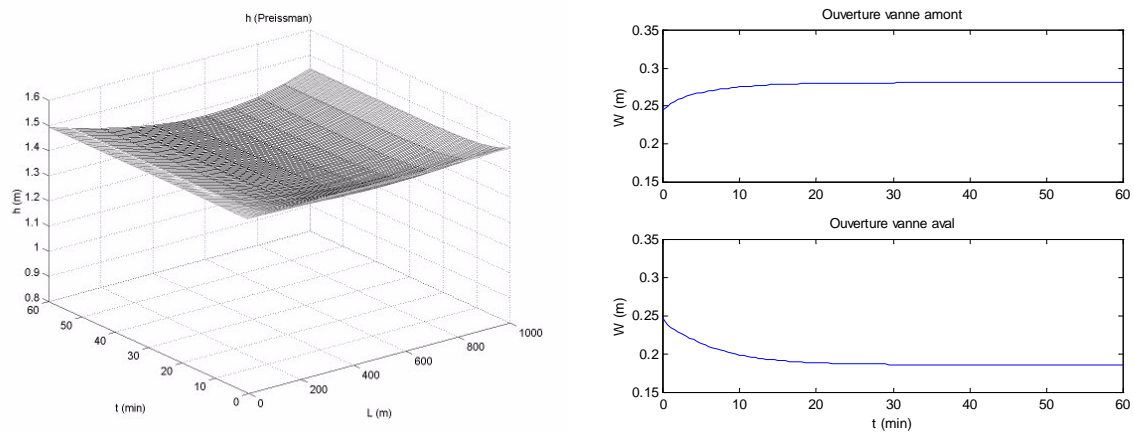
La Figure 3.14 montre la simulation d'un bief de canal de 1 Km de long en présence d'une infiltration de $2.5 \text{ e}^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Le but ici est de maintenir constant le niveau du bief à 1.5 m et trois cas de figures sont présentés : un premier avec un bief sans commande, c'est-à-dire avec les vannes en position fixe, un deuxième avec une commande par linéarisation entrée-sortie dynamique, calculée sans connaissance de la valeur de l'infiltration (infiltration égale à zéro pour la commande), et un troisième cas de figure avec une commande basée sur la même méthode mais calculée avec connaissance de l'infiltration.

L'analyse des figures montre que la commande est bien capable de rejeter les perturbations dues à une infiltration, car effectivement le niveau cherche à retrouver la valeur de la consigne, tandis que pour la simulation avec les vannes sans commande le niveau diminue de façon très importante. Il existe cependant une erreur à l'équilibre dans le cas du bief commandé, et cette erreur est moins importante dans le cas où l'infiltration est considérée connue. De fait dans ce dernier cas cette l'erreur peut être considérée comme presque nulle, car les variables contrôlées qui sont les niveaux aux deux extrémités sont quasiment à leur valeur de référence et semblent rester stables.

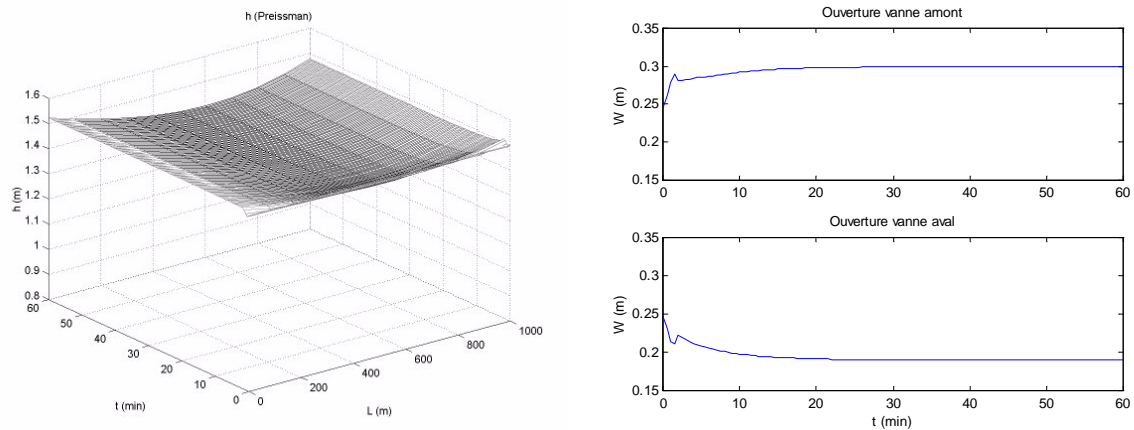
Il est à remarquer ici l'importance de pouvoir estimer la valeur de l'infiltration, pour pouvoir faire une commande précise. Ceci peut se faire de plusieurs façons, soit en estimant celle-ci par des calculs théoriques en fonction du matériel de fabrication du canal et des conditions climatiques (pluviométrie et chaleur), soit en construisant un observateur pour cette variable. La dernière option sera choisie dans ce travail, et sera présentée par la suite.



Sans commande



Commande sans connaissance de la valeur d'infiltration



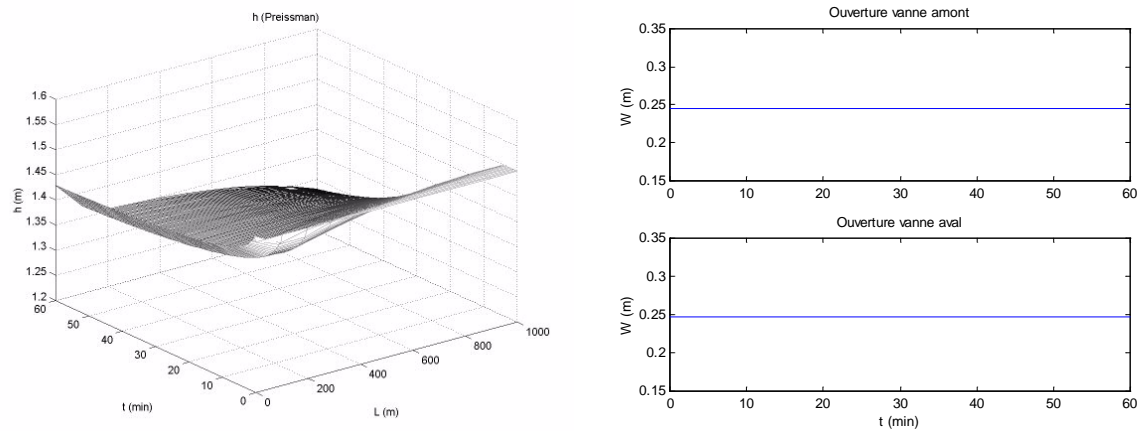
Commande avec valeur d'infiltration connue

Figure 3.14. Simulation de rejet de perturbation pour un bief de 1 Km soumis à une infiltration de $2.5e^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

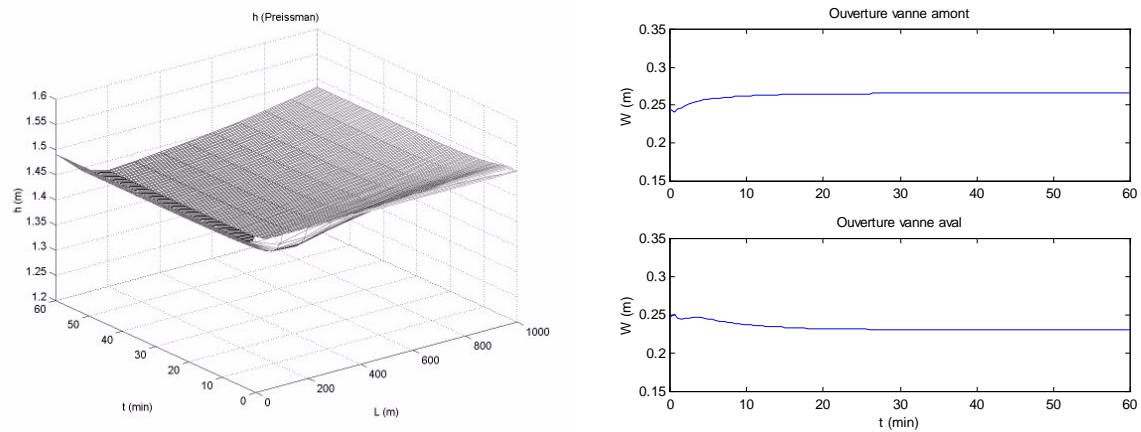
3.5.4.2. Prises latérales

Les prises latérales, bien qu'elles puissent physiquement être mesurables, ne le sont pas dans les systèmes réels, et pour cela doivent être considérées aussi comme des perturbations. En fait ce sont en général les perturbations les plus importantes du système, car on ne mesure pas toujours la quantité

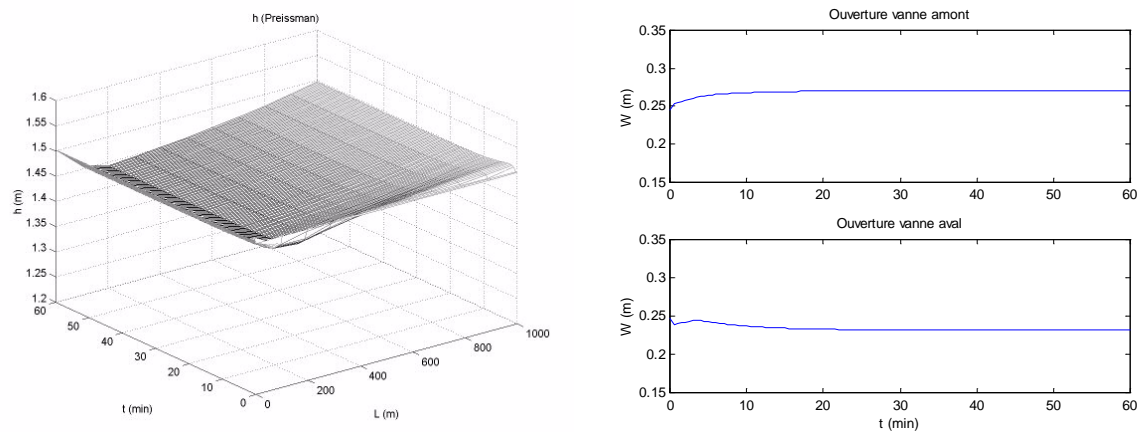
d'eau utilisée par les usagers et de plus, comme cela dépend beaucoup des conditions climatiques, il arrive souvent qu'un groupe d'utilisateurs en fasse usage en même temps, de sorte que des perturbations importantes peuvent se produire.



Sans commande

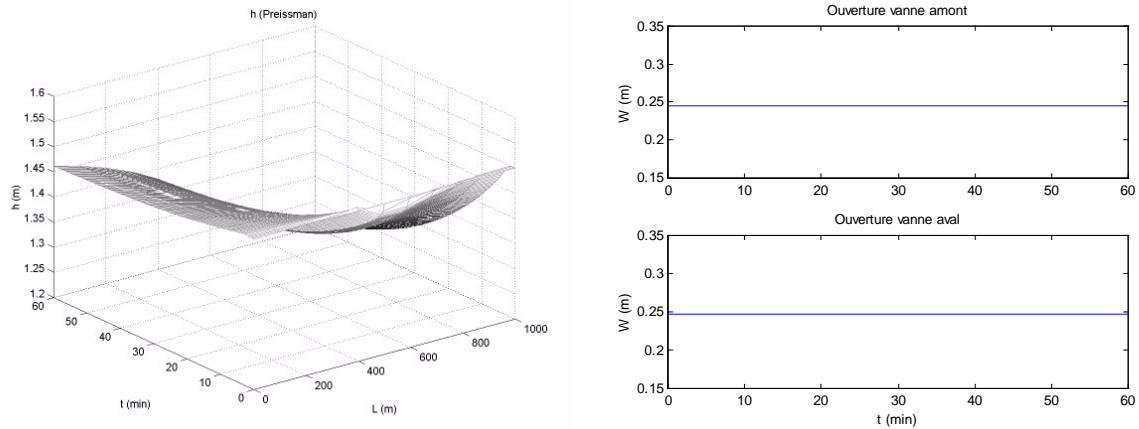


Commande en boucle fermée

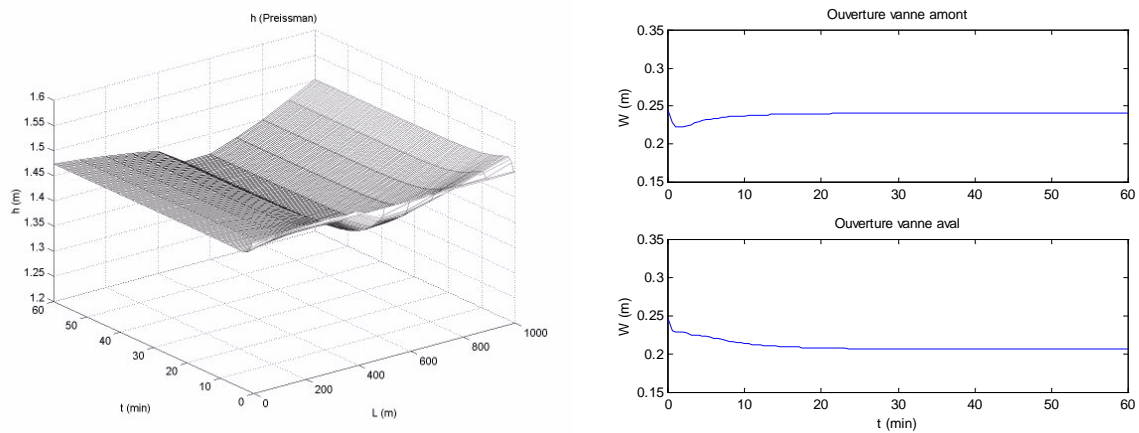


Commande avec correction par infiltration fictive

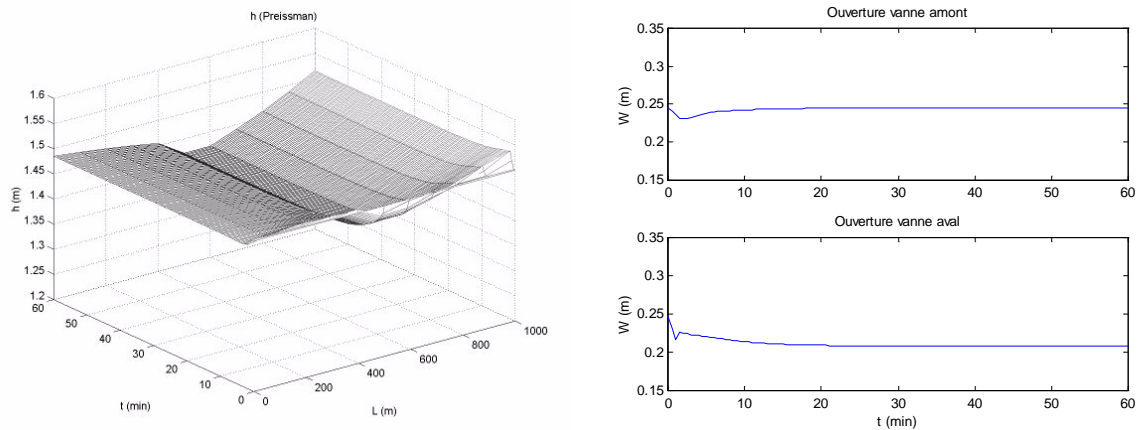
Figure 3.15. Simulation de rejet de perturbation pour un bief de 1 Km soumis à une prise latérale de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ au début du bief ($1/10 L$)



Sans commande



Commande en boucle fermé

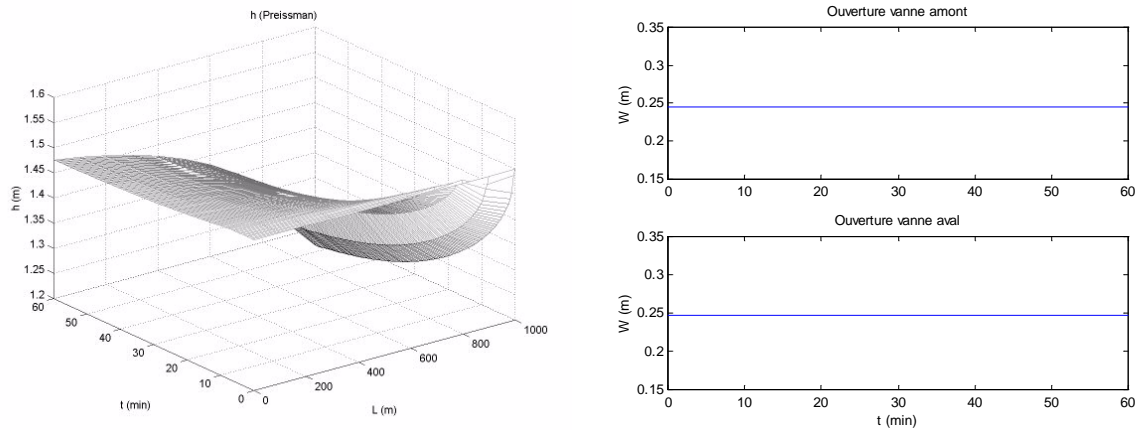


Commande avec correction par infiltration fictive

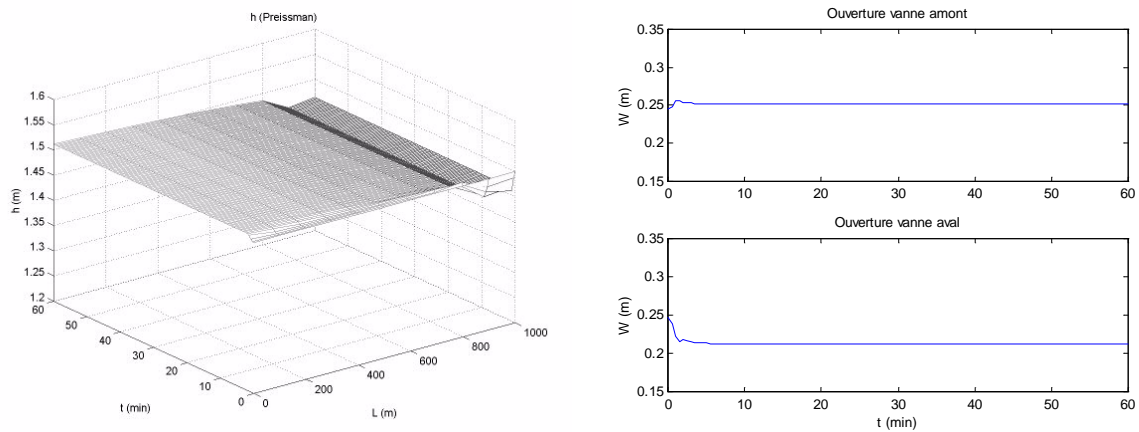
Figure 3.16. Simulation de rejet de perturbation pour un bief de 1 Km soumis à une prise latérale de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ au milieu du bief ($1/2 L$)

Le comportement de la commande, vis à vis de ces perturbations, est alors très important, et il a été remarqué dans les simulations que suivant l'emplacement de la perturbation la commande se comporte un peu différemment. Ainsi une prise latérale de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ pour un bief de 1 Km de long a été simulée,

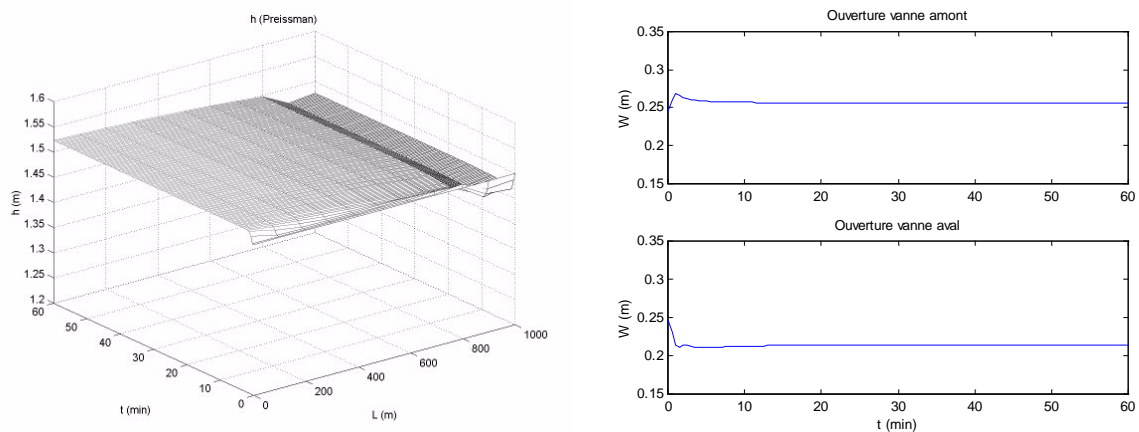
en la plaçant à trois positions du bief : au début (Figure 3.15), au milieu (Figure 3.16) et à la fin (Figure 3.17).



Sans commande



Commande en boucle fermé



Commande avec correction par infiltration fictive

Figure 3.17. Simulation de rejet de perturbation pour un bief de 1 Km soumis à une prise latérale de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ à la fin du bief (9/10 L)

Cette simulation a été faite pour trois conditions possibles de commande, une première sans commande, et deux autres avec commande des vannes en boucle fermée.

Sur les simulations sans commande il est possible de voir que cette perturbation a une influence sur le fonctionnement du bief similaire à celle de l'infiltration, à la différence près que l'influence est bien plus importante au point où elle est introduite, et qu'elle se propage plus vers l'aval que vers l'amont.

Les simulations avec la commande montrent que cette dernière réussit bien à rejeter la perturbation introduite, mais avec une erreur qui peut être a priori considérée comme assez importante. Cette erreur sera plus importante pour des prises latérales proches du centre du bief. Mais il est à noter que la somme des erreurs aux extrémités est proche de zéro. Aussi il est possible de conclure que la commande rejette assez bien les perturbations.

La troisième figure est un test d'amélioration des performances de rejet de perturbation. En fait la similarité entre l'effet de l'infiltration et des prises latérales fait penser à essayer de corriger l'erreur en ajoutant au contrôleur une information indiquant une infiltration fictive, et avec une consommation d'eau dans l'absolu identique à la prise latérale. C'est cela qui a été fait, et on observe peu de différence dans ce cas, mais il est à remarquer que la somme des erreurs aux deux extrémités du bief est dans ce cas encore plus proche de zéro. Donc la conclusion est que s'il est possible d'estimer la valeur d'eau perdue, sans prendre en compte le fait que ce soit une infiltration ou une prise latérale, alors il est possible d'apporter une amélioration au rejet de perturbation de la commande.

3.5.5. Conclusions

- ❑ Les résultats de simulation obtenus montrent que la commande obtenue à partir d'un modèle par collocation à deux points sur le niveau et trois points sur le débit est satisfaisante.
- ❑ Des trois méthodes de synthèse testées la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique est considéré comme la meilleure.
- ❑ Les performances de cette commande, testées en simulation, sont satisfaisantes, ceci tant du point de vue de la poursuite (changement de la valeur de la consigne), pour laquelle elle est capable de réaliser des changements de grande amplitude (20%), que du point de vue du rejet de perturbation (infiltration et prises latérales).
- ❑ Le fonctionnement de la commande appliquée à un modèle obtenu par une méthode différente et qui inclut les équations des ouvrages indique une bonne robustesse de la commande.
- ❑ On peut donc conclure à une validation satisfaisante de la commande.

3.6. OBSERVATEUR DE DEBIT ET INFILTRATION

3.6.1. Introduction

Bien que la commande développée précédemment puisse être considérée comme satisfaisante, il existe des difficultés pour son utilisation, la principale étant le besoin de connaître la valeur du débit au milieu du canal. Cette difficulté peut être levée par l'utilisation d'un observateur de débit. Une autre difficulté est la mesure de l'infiltration, qui là encore peut être contournée par l'utilisation d'une estimation provenant d'un observateur.

Dans cette partie sera donc traité le développement d'un observateur de débit et d'infiltration pour un bief de canal d'irrigation, et cet observateur sera basé sur le modèle par collocation à trois points sur le débit et deux points sur le niveau des équations de Saint-Venant (équation (3.1)), déjà utilisé pour le développement de la commande.

Il sera montré par la suite que dans le cas où $q \geq 0$, le débit Q_2 et l'infiltration q peuvent être estimés par deux observateurs indépendants : un observateur de type grand gain [Gauthier et al, 1992] pour l'observateur de débit Q_2 et un observateur linéaire classique pour l'estimation de l'infiltration q . D'un autre côté dans le cas où $q < 0$ il est aussi possible d'obtenir un observateur en appliquant les théories pour observateurs à grand gain multi-sorties [Bornard et Hammouri, 1991].

Ces deux observateurs seront par la suite couplés et combinés avec la commande développée précédemment, avec une stabilisation au sens semi-global du système [Teel et Praly, 1994].

3.6.2. Observateur linéaire pour q

Il est possible d'observer q en ne considérant qu'une partie du système, étendue par une équation de variation de q , qui suppose ici que l'infiltration est constante dans le temps et le changement de variable $h_2 = \frac{1}{2}(h_3 + h_1)$:

$$\begin{cases} \dot{h}_2 = \frac{1}{B}q + \frac{1}{BL}(u_1 - u_2) \\ \dot{q} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_2 \\ q \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} h_2 \\ q \end{bmatrix} + B_1 u \quad (3.86)$$

On suppose de plus que l'on mesure h_1 et h_3 , donc on connaît h_2 , et on considère comme sorties :

$$y_1 = C \begin{bmatrix} h_2 \\ q \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{BL} & \frac{-1}{BL} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0] \quad (3.88)$$

Il est facile de vérifier que ce système linéaire est observable, et donc qu'il est possible de développer un observateur pour estimer la valeur du débit d'infiltration en utilisant la théorie des observateurs linéaires classique.

Proposition 1

Pour tout $\lambda > 0$ il existe un gain K_o tel que le système d'équation (3.89) ci dessous est un observateur linéaire pour le système d'équation (3.86), avec un taux de convergence exponentielle λ .

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{h}_2 \\ \hat{q} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \hat{h}_2 \\ \hat{q} \end{bmatrix} + B_1 u + K_o (h_2 - \hat{h}_2) \quad (3.89)$$

Ce résultat est issu de la théorie linéaire classique.

3.6.3. Observateur à grand gain pour Q_2

En supposant à présent h_1 et h_3 également mesurés et considérant que Q_2 est difficilement mesurable, on cherche ici un observateur pour Q_2 . Il est facile de voir qu'avec la nouvelle variable $H = (h_3 - h_1)$, une partie du système peut être mise sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{H} = \frac{8}{BL} Q_2 - \frac{4}{BL} [u_1 + u_2] \\ \dot{Q}_2 = \frac{2Q_2(u_1 - u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2 H}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{H}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \end{cases} \quad (3.90)$$

Avec comme sortie mesurée :

$$y = H \quad (3.91)$$

Le système peut s'écrire alors comme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{H} \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} &= A_2 \begin{bmatrix} H \\ Q_2 \end{bmatrix} + \varphi(H, h_2, Q_2, u) \\ y &= C \begin{bmatrix} H \\ Q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Avec :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 8/BL \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]; \quad (3.93)$$

$$\varphi(x, u) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{BL}[u_1 + u_2] \\ \frac{2Q_2(u_1 - u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2 H}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{H}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Sous cette forme, le système peut admettre un observateur dit "à grand gain" [Gauthier et al, 1992], proposé sous la forme suivante :

Proposition 2

En supposant que u_1 , u_2 , h_2 et Q_2 restent bornées, avec $|Q_2| \leq \delta$ et $h_2 \geq h_{\min} > 0$ alors pour tout taux de convergence $\lambda > 0$, il existe un θ tel que le système suivant est un observateur exponentiel pour (3.92), pour lequel l'erreur décroît avec un taux exponentiel λ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} + \varphi(\hat{H}, h_2, \min(\delta, |\hat{Q}_2|) * \text{sign}(\hat{Q}_2), u) + S^{-1} C^T (H - \hat{H}) \quad (3.95)$$

Où la matrice S dépend du gain θ de l'observateur suivant l'équation Lyapunov :

$$0 = A_2^T S + S A_2 - C^T C + \theta S \quad (3.96)$$

Preuve

Il suffit de vérifier que (3.92) satisfait la condition de structure pour la construction d'un observateur à grand gain, et que dès lors que h_2 et Q_2 restent bornées, la fonction φ peut être rendue globalement Lipschitz par une saturation connue dans l'équation de l'observateur (3.95).

Il découle de ces propriétés que l'observateur (3.95) peut être exponentiellement convergent pour un choix de θ suffisamment grand.

La preuve revient classiquement à la théorie des observateurs grand gain [Gauthier et al, 1992].

On peut remarquer qu'ici la matrice S s'écrit :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & \frac{-8}{BL\theta^2} \\ -8 & \frac{128}{B^2 L^2 \theta^3} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

3.6.4. Couplage des deux observateurs

Les deux observateurs précédents peuvent être couplés, pour faire l'estimation des deux variables en même temps, dans ce cas l'observateur complet devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{h}_2 \\ \hat{q} \end{bmatrix} &= A_1 \begin{bmatrix} \hat{h}_2 \\ \hat{q} \end{bmatrix} + B_1 u + K_o (h_2 - \hat{h}_2) \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} &= A_2 \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} + \varphi(\hat{H}, h_2, \min(\delta, |\hat{Q}_2|)^* \text{sign}(\hat{Q}_2), u, q) + K_\theta (H - \hat{H}) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Il est à noter cependant que dans ce cas l'observateur du débit Q_2 dépend de l'infiltration, sous une fonction discontinue :

$$\frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \quad (3.99)$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_q &= 1 \text{ si } q < 0 \\ k_q &= 0 \text{ si } q \geq 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Dans le cas où $q \geq 0$, l'observateur du débit Q_2 ne dépend plus de q . Dans ce cas il est possible d'observer les deux variables de façon indépendante. Dans le cas contraire il est toujours possible de construire un observateur sur la base de la théorie des observateurs à grand gain multi-sorties [Bornard et Hammouri, 1991].

3.6.5. Couplage Observateur-Commande

A ce stade, on dispose d'une commande par retour d'état avec la garantie que celui-ci stabilise le système (3.1) sous certaines contraintes (3.15) et un débit supérieur ou égal à zéro. On dispose également d'un observateur pour l'estimation des variables d'état.

On souhaiterait donc pouvoir les coupler, c'est-à-dire, utiliser les valeurs observées pour la commande. Il est bien connu que pour les systèmes linéaires un observateur et une commande développés séparément fonctionnent toujours bien ensemble, cela est appelé le "*principe de séparation*". Mais il est aussi bien connu que pour les systèmes non linéaires le principe de séparation ne s'applique pas systématiquement.

Cependant, pour tout sous-ensemble compact de l'espace d'état tel que les conditions (3.15) pour le retour d'état soient satisfaites, il est possible, en réglant la convergence des observateurs des propositions 1 et 2, de garantir que le retour d'état basé sur ces observateurs rende le système bouclé stable pour toute condition initiale dans cet ensemble.

Ceci correspond à une stabilisation de type "semi-globale", soumise aux contraintes (3.15).

Proposition

Etant donnée le système (3.11), pour tout sous-ensemble Ω_0 de l'espace d'état, pour lequel les conditions de stabilité (3.15) sont satisfaites, et pour toute condition initiale dans Ω_0 , il existe un ensemble compact $\Omega \supset \Omega_0$, et des gains $K_O \in \mathbb{R}^2$, $\theta > 0$, $K_C > 0$, tel que le contrôleur (3.101) rend le système en boucle fermé stable avec $\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_3(t) = h_e$.

$$\dot{u} = G(h, \hat{Q}_{2s})u + F(h, \hat{Q}_{2s}, \hat{q}_s) \quad (3.101)$$

Où \hat{q}_s et \hat{Q}_{2s} sont les valeurs estimées par les observateurs (3.89) et (3.95), saturées par rapport à Ω , et avec G et F donnés par les équations (3.17) et (3.18).

Cette proposition découle des mêmes arguments que dans [Teel et Praly, 1994], par exemple, mais en tenant compte des conditions (3.15). Sommairement, en considérant l'ensemble de variables d'état $h_3 - h_1$, h_2 , Q_2 , u_1 , u_2 et un certain ensemble compact pour les conditions initiales, pour lesquelles les contraintes (3.15) sont satisfaites, et avec $Q_2(0) \geq 0$, l'idée est de calibrer les taux de convergence de l'observateur pour rendre l'erreur d'observation suffisamment petite assez vite pour que les états ne sortent pas de l'ensemble compact. A partir de là le retour d'état peut fonctionner correctement.

3.7. VALIDATION DU COUPLAGE OBSERVATEUR-COMMANDE

Cette section, consacrée à la validation du couplage observateur commande, sera divisée en trois parties. Une première partie dédiée à l'observateur, où seront testées les capacités de l'observateur à estimer correctement le débit et l'infiltration. Une deuxième partie sera consacrée à la validation du couplage observateur-commande étudié théoriquement, ceci par la simulation de variations de consigne en présence d'infiltration positive. Et finalement dans une troisième partie seront effectués des tests portant sur le rejet de perturbations provenant d'infiltration et de prises latérales.

3.7.1. Validation de l'observateur

Dans cette partie sont présentées quelques simulations pour illustrer le fonctionnement de l'observateur. Les simulations sont faites pour un canal identique à celui utilisé pour la commande, c'est-à-dire un canal de section rectangulaire de 1 m de large, avec une pente de 1%, un coefficient de Strickler de 25. Le test est fait pour deux longueurs de bief : 1 Km (bief court) avec une infiltration de 2.5×10^{-4} m²/s et 10 Km (bief long) avec une infiltration de 2.5×10^{-5} m²/s. Sur ce canal la consigne est constante à 1.5 m.

La Figure 3.18 montre les valeurs du débit et de l'infiltration estimées par l'observateur, ainsi que l'erreur par rapport à la valeur réelle, et ceci dans un cas idéal, c'est-à-dire à partir d'une simulation avec le modèle de collocation à trois points et sans bruit, ni erreur sur les paramètres du modèle. La figure montre que l'observateur converge bien vers la valeur réelle de la variable comme il est prévu théoriquement.

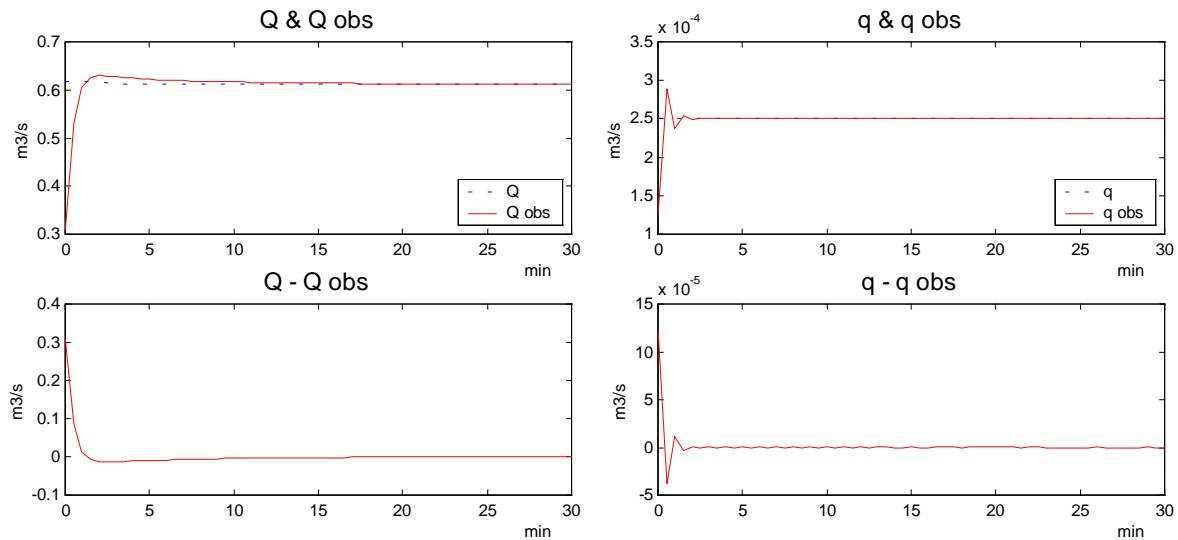


Figure 3.18. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle par collocation à 3 points. Canal 1 Km.

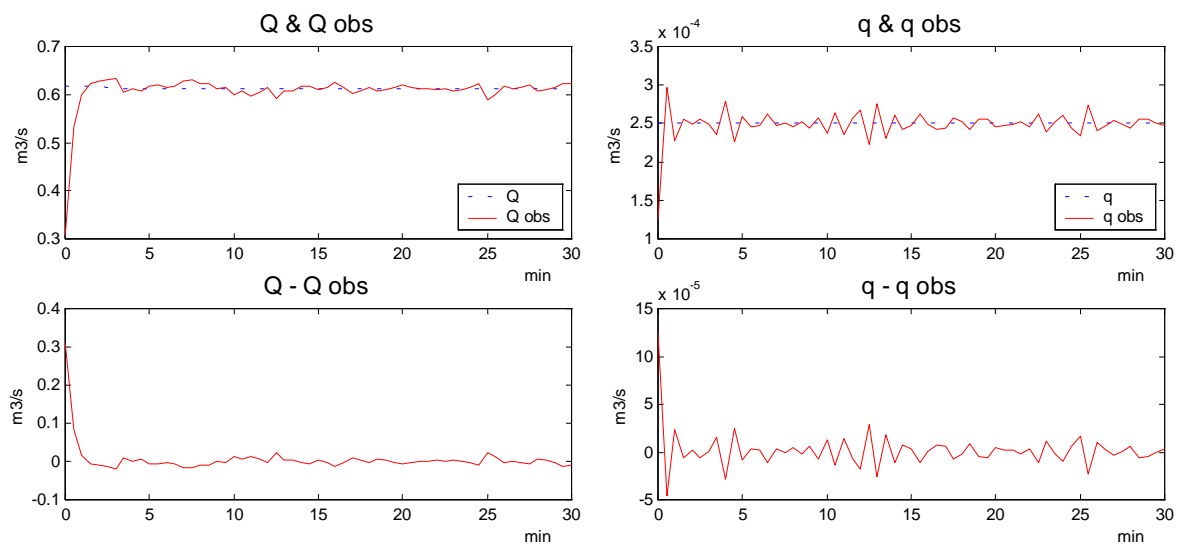


Figure 3.19. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle par collocation à 3 points avec bruit de mesure. Canal 1 Km.

Pour étudier l'influence du bruit de mesure (du niveau) et des erreurs sur les paramètres du modèle des simulations ont été effectuées en incluant du bruit et des erreurs induites sur deux paramètres du modèle. La Figure 3.19 montre une simulation du bief avec un bruit de mesure de 1 mm sur la valeur du niveau utilisée pour l'observateur. Ce bruit affecte les valeurs estimées de débit et infiltration en provoquant de petites oscillations chaotiques, similaires au bruit induit. La Figure 3.20 montre quant à elle l'influence d'une erreur sur deux paramètres du modèle, à savoir le coefficient de Strickler

(friction) et la largeur du canal. Ces deux paramètres ont été choisis car ce sont les plus susceptibles de présenter des différences entre les valeurs réelles et théoriques. Sur la largeur du canal une erreur de 10% a été établie, et sur le coefficient de Strickler (paramètre calculé empiriquement) une erreur de 20% a été introduite.

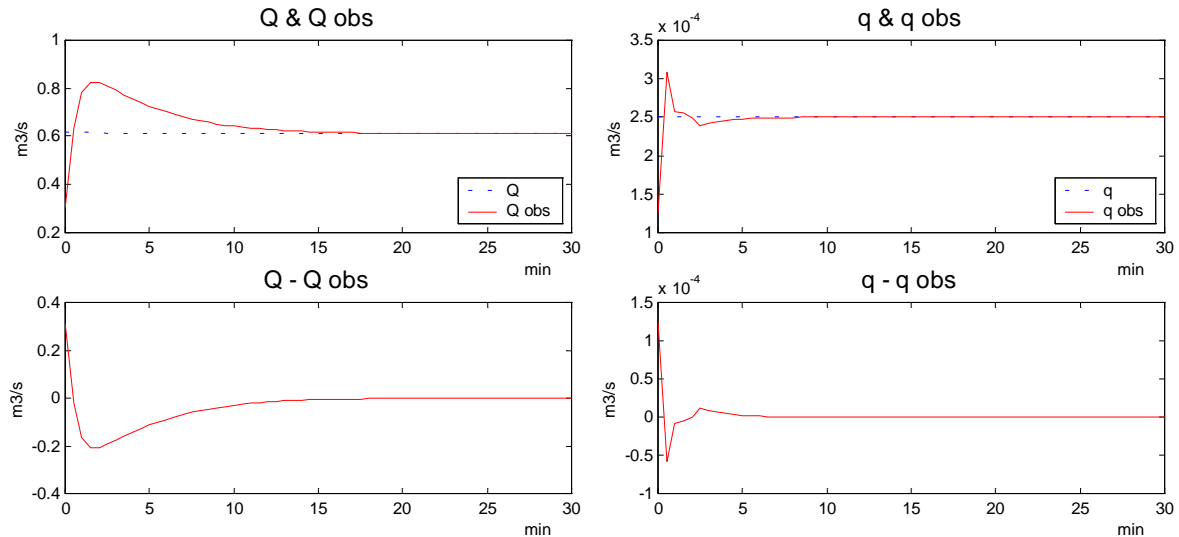


Figure 3.20. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle par collocation à 3 points avec erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

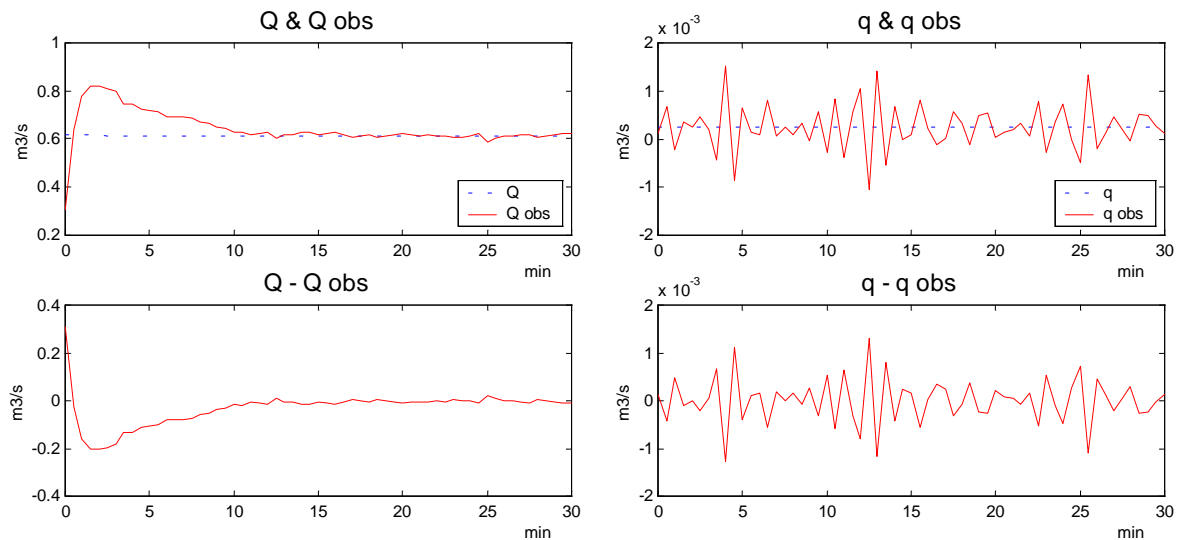


Figure 3.21. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle par collocation à 3 points avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

On observe sur cette figure que l'effet des erreurs sur ces paramètres n'est pas trop important en soi, car elles ne font que prolonger la zone transitoire de la réponse de l'observateur, et celui-ci atteint tout de même la valeur réelle. Par contre la présence de bruit et d'erreurs en même temps accentue l'effet du bruit (Figure 3.21) et cela surtout pour l'estimation de l'infiltration, la valeur du débit ne présentant pas beaucoup de différence par rapport à la simulation avec bruit et sans erreur des paramètres. Il est à noter que par la suite ce sera l'estimation de l'infiltration (observateur linéaire) qui posera le plus de problèmes.

Pour tester la robustesse de l'observateur des simulations ont été faites avec le simulateur de Preissmann, et sont présentés ci après les variables observées en simulation pour un modèle sans bruit ni erreurs de paramètres (Figure 3.22) et pour un modèle avec bruit et erreurs (Figure 3.23).

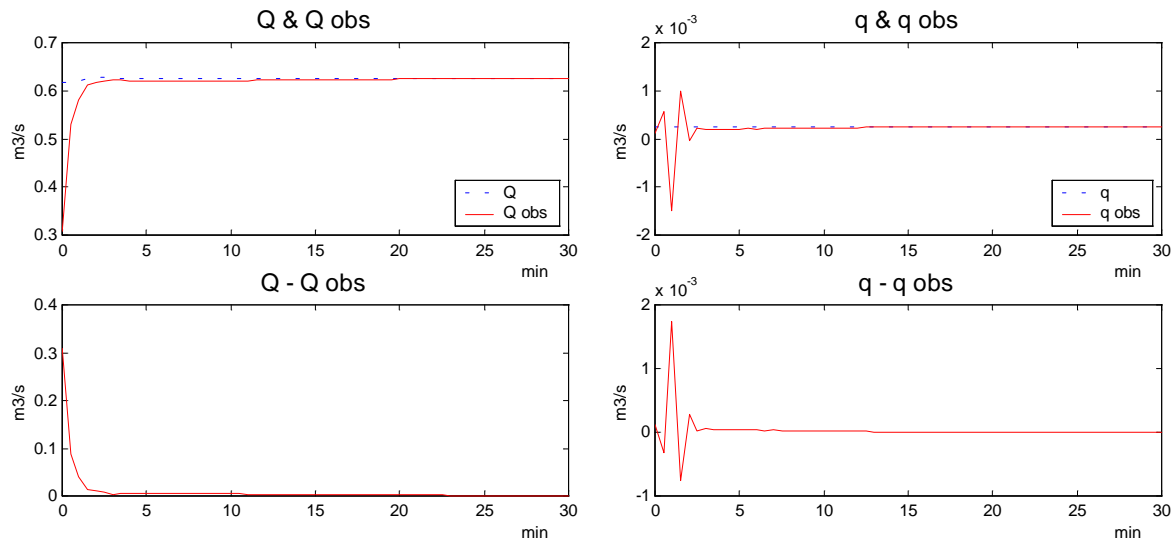


Figure 3.22. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle de Preissmann à 10 sections. Canal 1 Km.

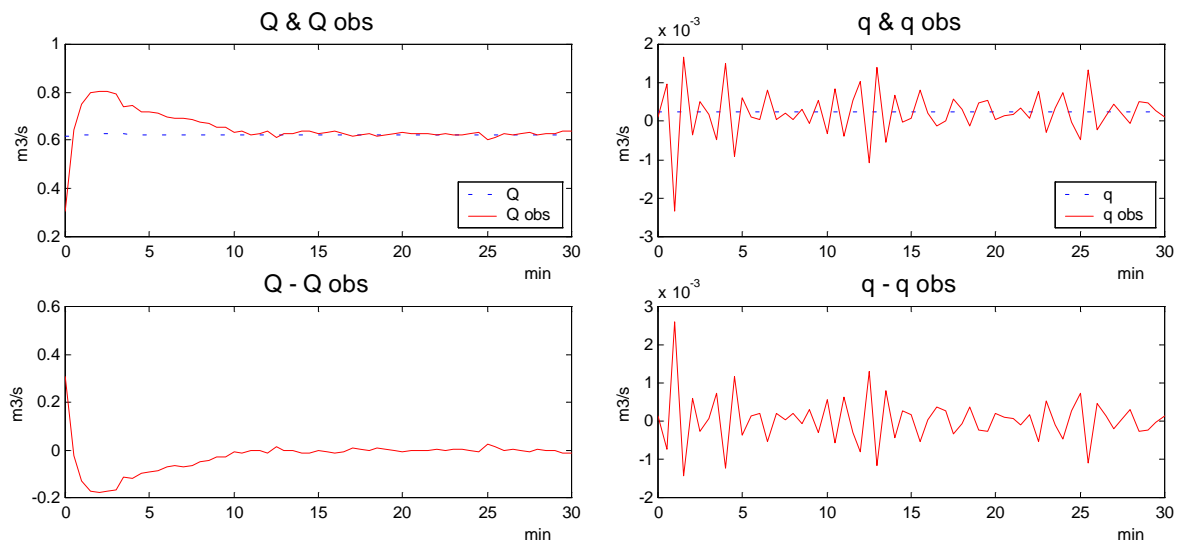


Figure 3.23. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle de Preissmann à 10 sections avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

Les résultats obtenus sont satisfaisants, car peu de différences existent entre les résultats obtenus avec le modèle de collocation et de Preissmann. On peut remarquer cependant quelques oscillations chaotiques au début de la simulation de l'infiltration, qui provoquent une erreur transitoire d'une certaine importance et prolongent un peu la période transitoire.

Par la suite des simulations similaires ont été réalisées pour un bief plus long (de 10 Km), cela bien sûr en vue de tester encore plus la robustesse de l'observateur, qui dans ce cas n'est pas garantie, car le modèle à trois points n'est pas très satisfaisant pour ces longueurs, comme il a été indiqué au chapitre

II. La Figure 3.24 montre la simulation pour un modèle sans erreur de paramètres ni bruit et la figure Figure 3.25 montre la simulation pour un modèle avec bruit et erreurs de paramètres. Il est à noter ici que pour le cas sans bruit ni erreurs de paramètres, la réponse est bien plus lente que dans le cas d'un bief court, bien que l'erreur transitoire reste petite. Par contre l'effet du bruit de mesure et des erreurs paramétriques est très important, surtout sur l'estimation de l'infiltration où l'erreur est très grande.

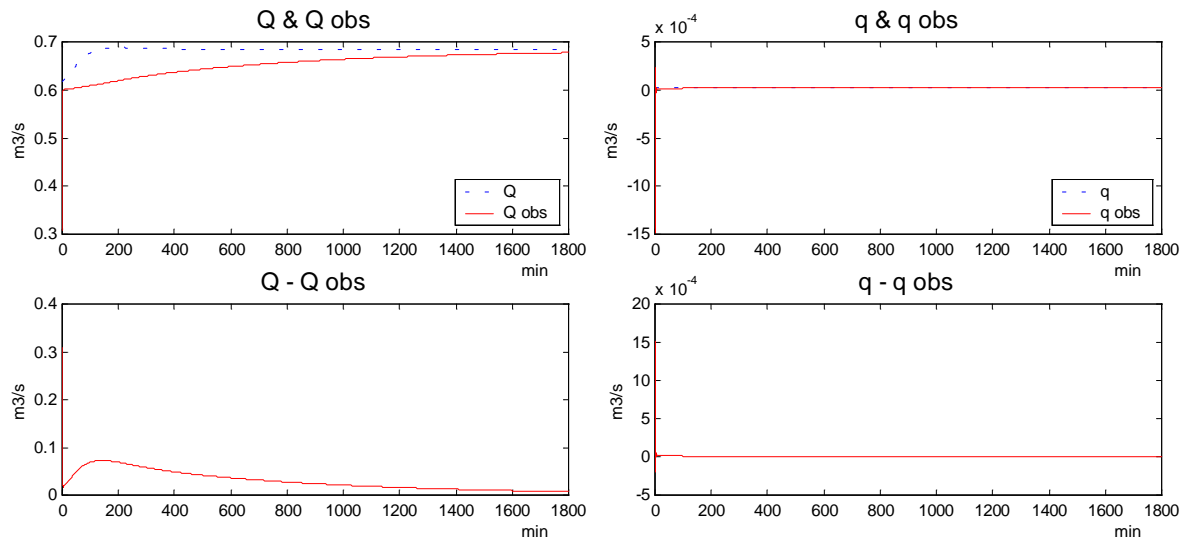


Figure 3.24. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle de Preissmann à 25 sections. Canal 10 Km.

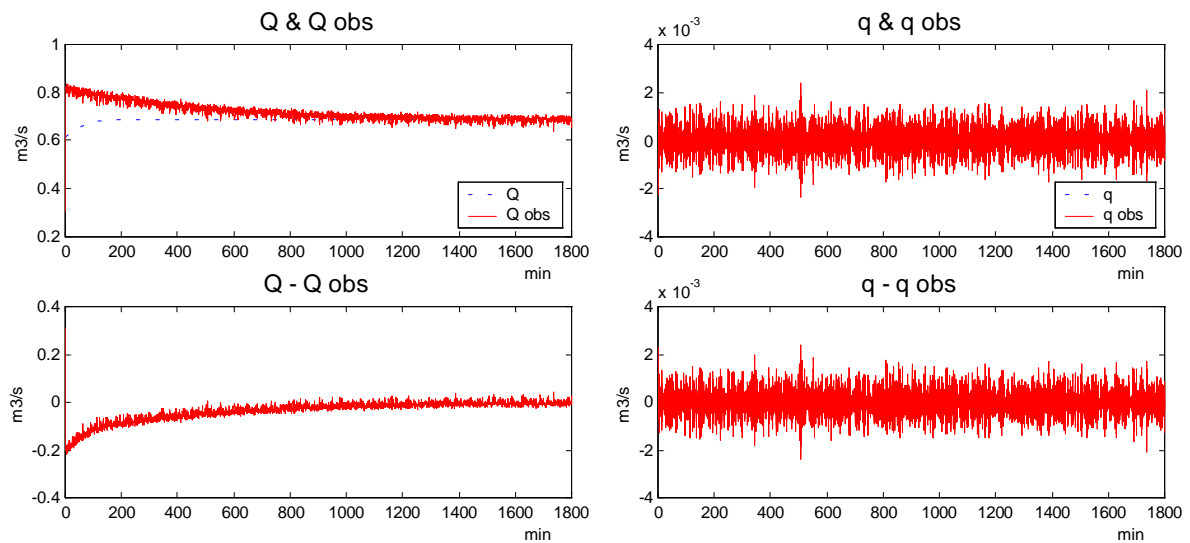


Figure 3.25. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs}) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle de Preissmann à 10 sections avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 10 Km.

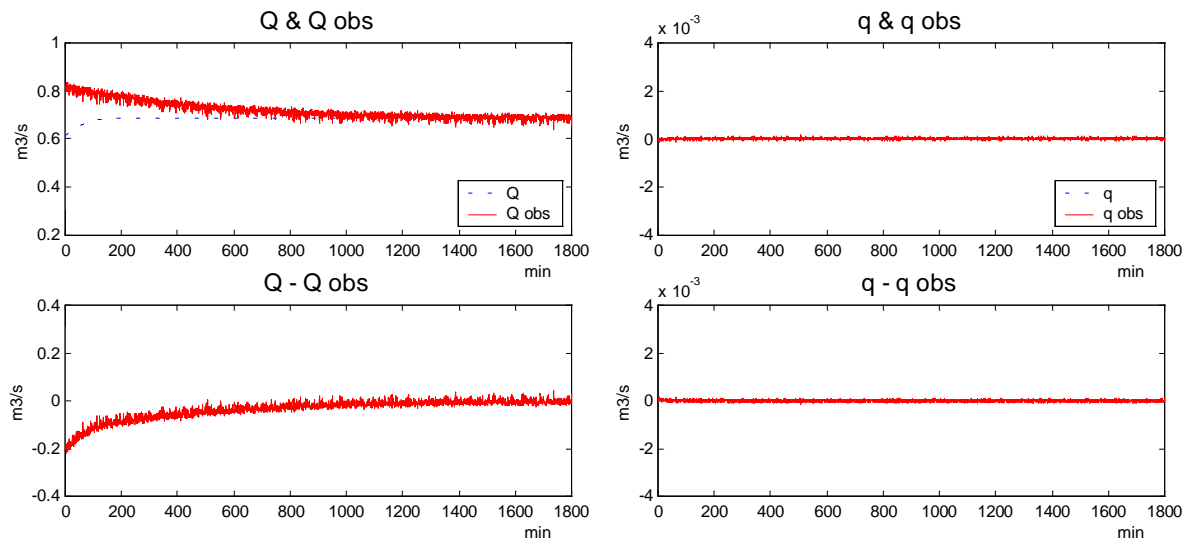


Figure 3.26. Valeurs réelles (Q et q) et observées (Q_{obs} et q_{obs} (filtré)) et erreurs ($Q - Q_{obs}$ et $q - q_{obs}$), pour modèle de Preissmann à 10 sections avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 10 Km.

Mais cette erreur reste centrée sur la valeur réelle, donc il est possible de conclure que l'observateur donne aussi pour des biefs longs un résultat presque satisfaisant. Il est aussi possible de filtrer la valeur d'infiltration observée pour diminuer l'effet du bruit de mesure, cela car c'est cette variable qui présente la plus grande erreur. La Figure 3.26 montre le résultat obtenu en filtrant la valeur observée de l'infiltration par un filtre du premier ordre de constante de temps 600 s.

L'erreur ici a diminué environ 10 fois, et la réponse lente de l'estimation de la valeur n'affecte pas l'objectif d'observation car c'est une variable qui change naturellement lentement. En conclusion l'observateur de débit et d'infiltration donne des résultats satisfaisants, avec une certaine difficulté pour des biefs d'une longueur appréciable.

3.7.2. Validation de la commande avec observation

Une fois validé l'observateur, il reste à valider le couplage de l'observateur et la commande par linéarisation entrée sortie dynamique.

Le premier résultat de test est présenté sur la Figure 3.28 qui montre les résultats d'une simulation de la commande du bief pour un observateur avec erreurs de modèle et bruit de mesure couplé à la commande sur un modèle par collocation à 3 points, la Figure 3.27 montre les résultats correspondants pour une commande avec les valeurs mesurées. Les résultats obtenus sont très satisfaisants car la différence entre les deux simulations est très petite.

Par la suite sont faits des tests de robustesse de ce couplage observateur commande en l'appliquant à des modèles plus proches du système réel. Deux simulations sont présentées ici, la première (Figure 3.30) montre la simulation avec la commande couplée à l'observateur avec bruit et erreurs de modèle sur un modèle de Preissmann à 10 sections et la deuxième sur un modèle de Preissmann à 10 sections

avec équation des vannes (Figure 3.32). La Figure 3.29 et la Figure 3.31 montrent quant à elles la même simulation avec utilisation de la commande et variables mesurées.

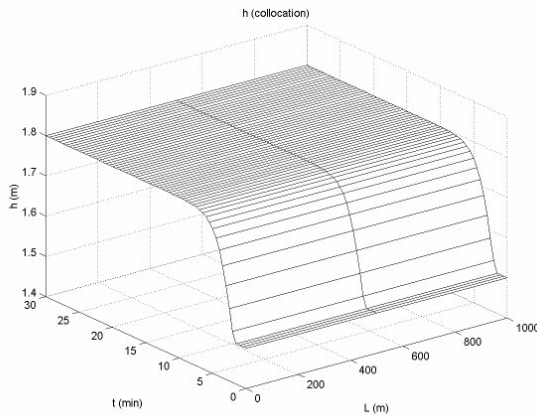


Figure 3.27. Evolution du niveau, pour modèle de collocation à 3 points avec variation de 20% sur consigne et infiltration. Canal 1 Km.

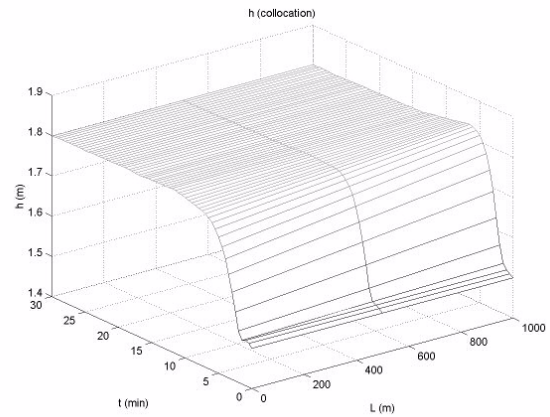


Figure 3.28. Evolution du niveau, pour modèle de collocation à 3 points avec variation de 20% sur consigne et infiltration et utilisation des variables observées avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

Les résultats ici sont très satisfaisants car les résultats obtenus avec ou sans le couplage de l'observateur avec la commande sont très similaires, et cela même en présence de bruit de mesure et d'erreurs paramétriques. La seule différence à noter est la présence de quelques oscillations chaotiques de petite magnitude aux extrémités du bief, cela provenant principalement de l'effet du bruit de mesure.

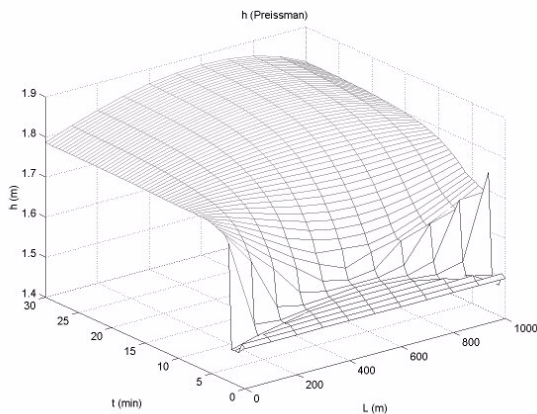


Figure 3.29. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections avec variation de 20% sur consigne et infiltration. Canal 1 Km.

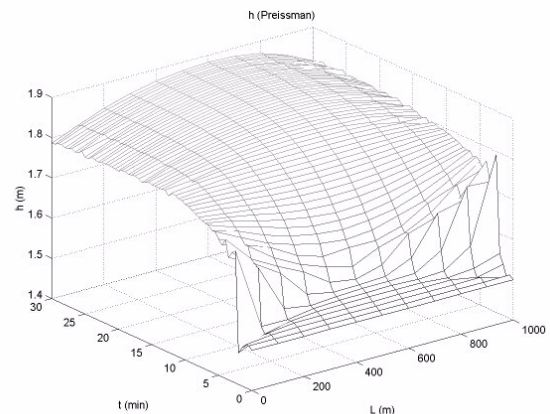


Figure 3.30. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections avec variation de 20% sur consigne et infiltration et utilisation des variables observées avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

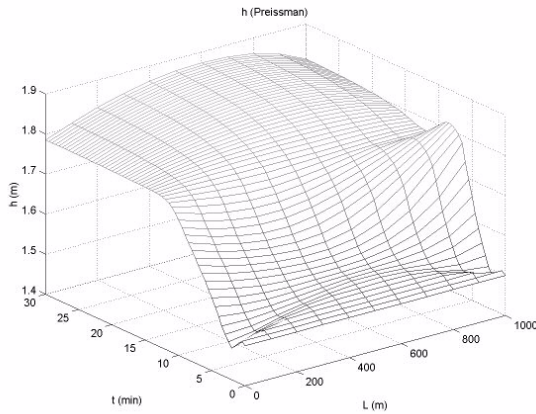


Figure 3.31. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne et infiltration. Canal 1 Km.

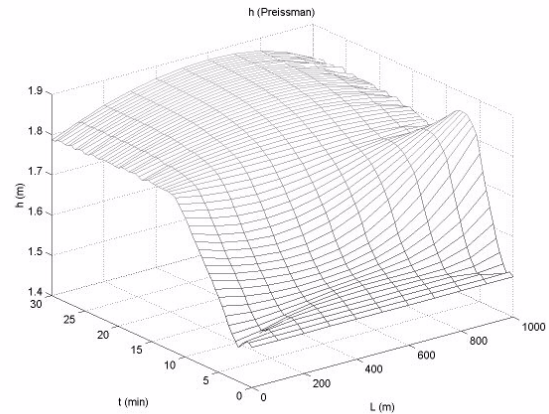


Figure 3.32. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne et infiltration et utilisation des variables observées avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

Les figures suivantes montrent des tests pour un bief long (10 Km). La Figure 3.34 montre la simulation de l'évolution du niveau avec couplage observateur-commande en présence de bruit (filtré) et d'erreurs paramétriques, tandis que la Figure 3.33 montre la même simulation pour la commande avec les variables mesurées.

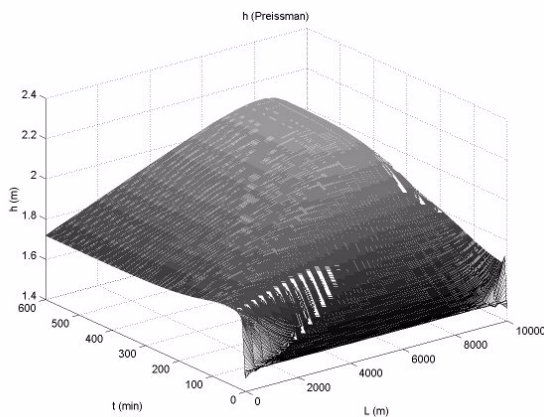


Figure 3.33. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 25 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne, infiltration positive et commande par linéarisation entrée sortie dynamique. Canal 10 Km.

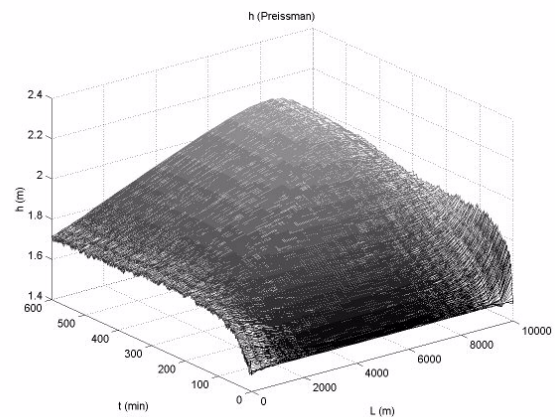


Figure 3.34. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 25 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne, infiltration positive et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées (q filtré) avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 10 Km.

La figure montre que la remarque faite dans la partie correspondante à la validation de l'observateur se présente à nouveau ici, c'est-à-dire l'erreur d'observation devient importante pour des biefs longs, et donc logiquement influe sur le résultat du couplage observateur-commande. Il est à noter tout de même que cette erreur est surtout importante sur l'estimation de l'infiltration et elle est due principalement au bruit, raison pour la quelle la valeur de l'infiltration observée a été filtrée pour réduire l'erreur qu'elle présente. Théoriquement, cela devrait diminuer l'amplitude des oscillations

présentes dans la valeur observée de l'infiltration, et donc aider au couplage observateur-commande, par contre un changement rapide de la valeur d'infiltration ne serait appréciée qu'avec un retard important. Ce dernier point n'est pas très important en vue du type de variation typique de la valeur de l'infiltration. Deux types de variations se présentent généralement sur cette variable : le premier type est un changement lent de la variable, c'est le cas par exemple d'une détérioration de la couche imperméable du fond ou des changements dans les taux d'évaporation. Le deuxième type est un changement brusque mais où la variable gardera par la suite une valeur relativement constante pour une période de temps considérable, c'est le cas par exemple pour un orage.

Une autre remarque importante à faire sur ces simulations est qu'en présence d'infiltration les résultats montrent une erreur statique importante, observée surtout sur des biefs longs. Cette erreur provient de l'approximation faite pour le niveau h_2 sur le modèle de commande et elle peut être observée sur les simulations avec et sans observateur. Il est possible d'améliorer ces résultats de commande, et diminuer de beaucoup cette erreur statique en utilisant une mesure pour le niveau h_2 au lieu de la valeur approchée du modèle de commande. La Figure 3.35 et la Figure 3.36, qui correspondent à des simulations similaires à la Figure 3.33 et la Figure 3.34 respectivement mais avec la valeur de h_2 mesurée pour l'observateur et la commande, montrent bien que dans ce cas l'erreur statique est beaucoup moins importante, donc cette modification permet de mieux respecter les consignes.

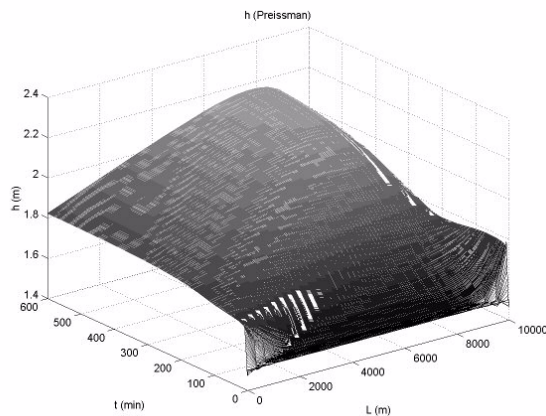


Figure 3.35. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 25 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne, infiltration positive et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec h_2 mesuré. Canal 10 Km.

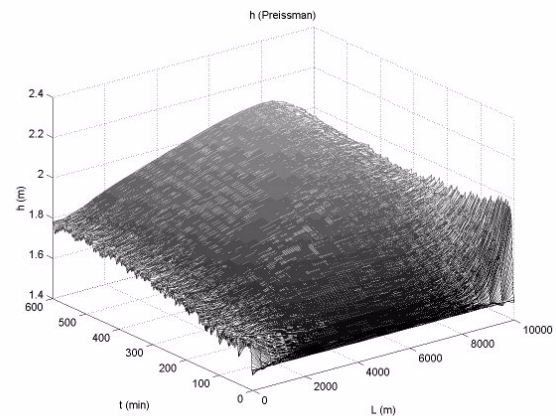


Figure 3.36. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 25 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne, infiltration positive et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées (q filtré) avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler et avec h_2 mesuré. Canal 10 Km.

Finalement on peut donc conclure à une validation du couplage observateur et commande linearisante dynamique.

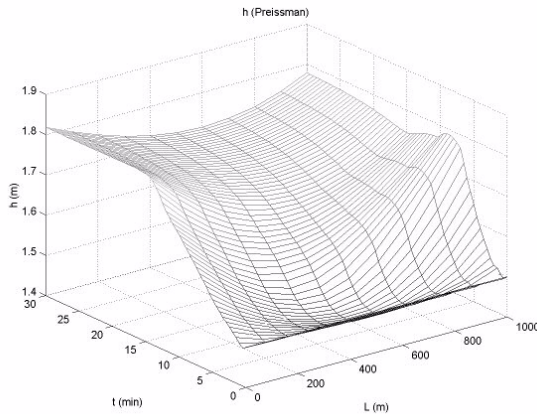


Figure 3.37. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne, infiltration négative et commande par linéarisation entrée sortie dynamique. Canal 1 Km.

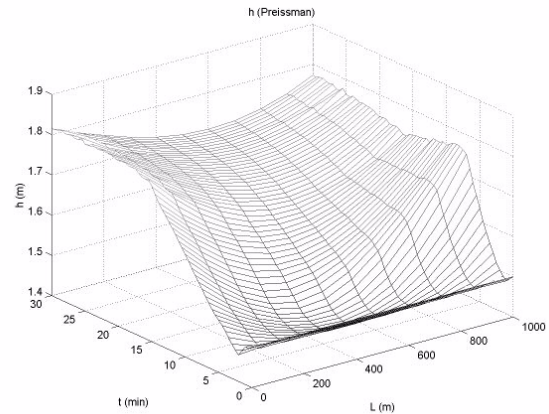


Figure 3.38. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec variation de 20% sur consigne, infiltration négative et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

Un point laissé de côté dans la partie théorique est la présence d'infiltration négative, qui est en fait plus souvent présente dans la réalité (évaporation, infiltration par le sol). La Figure 3.38 montre la simulation de la variation de niveau d'un bief en présence d'infiltration négative et avec couplage observateur commande linéarisante dynamique, tandis que la Figure 3.37 montre la même simulation pour une commande avec mesures du débit et infiltration.

Le comportement ici semble être identique au cas de l'infiltration positive, donc il est possible de conclure à la validation du couplage observateur commande en présence d'infiltration négative.

3.7.3. Rejet de perturbation

Dans cette partie de la validation seront regroupés des tests portant sur le rejet de perturbation du couplage de l'observateur et la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique, et cela pour deux types de perturbation: l'infiltration et les prises latérales.

3.7.3.1. Rejet de perturbation d'infiltration

La section 3.5.4, dédiée à l'étude du rejet de perturbation de la commande, a montré que la connaissance de la valeur de l'infiltration aide à mieux rejeter la perturbation due à cette infiltration, et comme conclusion il a été noté que la présence d'un observateur pourrait donc permettre d'améliorer ce rejet de perturbation, car la mesure de celle-ci est très difficile. Cette section a donc pour but de vérifier cette affirmation, et pour cela la Figure 3.40 montre la simulation de l'évolution du niveau d'un bief en présence d'infiltration négative, cette même évolution mais avec la valeur d'infiltration mise à zéro pour la commande étant présentée à la Figure 3.39.

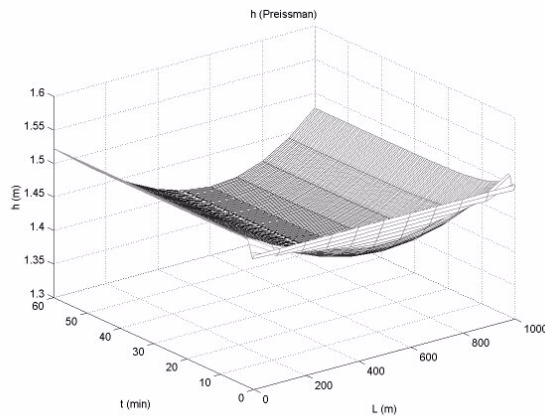


Figure 3.39. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec perturbation par infiltration négative et commande par linéarisation entrée sortie dynamique. Canal 1 Km.

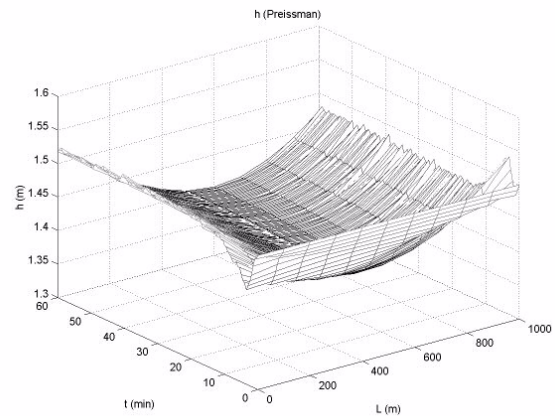


Figure 3.40. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec perturbation par infiltration négative et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées (q filtré) avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

Cette simulation montre qu'effectivement la valeur du débit observé permet de diminuer l'erreur sur la commande des niveaux amont et aval du bief (but de la commande), même si des petites oscillations sont présentes sur ces niveaux. Il apparaît donc bien que l'observateur permet d'améliorer les performances de rejet de perturbation de la commande pour une perturbation par infiltration.

Il est cependant important de noter ici que la valeur de l'infiltration observée a été filtrée pour diminuer les oscillations présentes dans la simulation, qui pour une infiltration non filtrée étaient très importantes.

3.7.3.2. Rejet de perturbation de prises latérales

De même que pour une infiltration dans la section 3.5.4 il a été signalé qu'il était possible de rejeter une perturbation par prise latérale en indiquant une perturbation fictive à la commande, de magnitude absolue identique à la valeur de la prise latérale. Et donc ici l'utilisation d'un observateur peut s'avérer très intéressante car en estimant une perte d'eau par le biais de l'estimation de l'infiltration, mais sans connaître a priori s'il s'agit d'une infiltration ou d'une prise latérale, alors il serait possible de rejeter les perturbations présentes.

La Figure 3.42 illustre l'évolution du niveau dans un bief de 1 Km de long en présence d'une prise latérale de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ et avec couplage observateur-commande linéarisant dynamique en présence de bruit et erreurs paramétriques, tandis que la figure Figure 3.41 montre la même évolution pour une commande avec mesures de débit et infiltration. Il est clair ici que même avec la présence des petites oscillations de niveau sur les extrémités du bief, le résultat de rejet de perturbation est bien meilleur avec la présence de l'observateur, que sans connaissance de la quantité d'eau perdue.

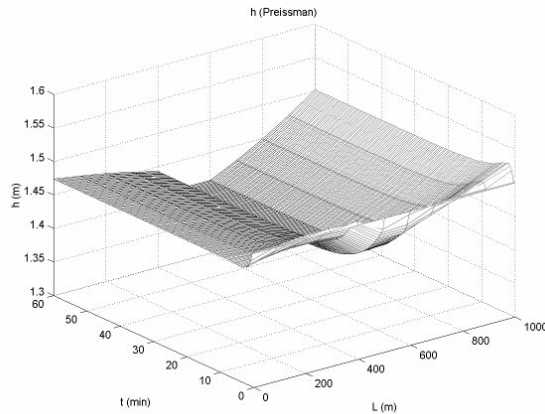


Figure 3.41. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec perturbation par prise latérale et commande par linéarisation entrée sortie dynamique. Canal 1 Km.

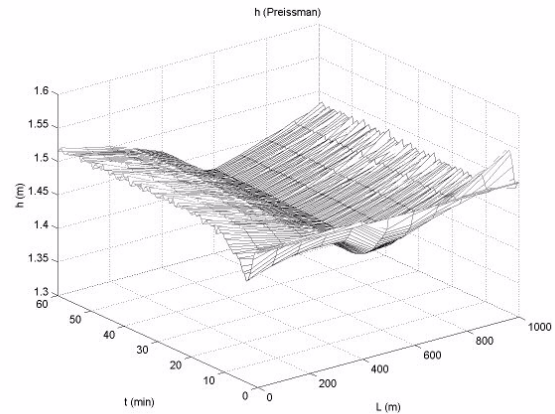


Figure 3.42. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 10 sections et vannes avec perturbation par prise latérale et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées (q filtré) avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 1 Km.

La Figure 3.44 montre une simulation similaire pour un bief de 10 Km de long, et la Figure 3.43 fait de même pour la commande avec mesures de débit et infiltration, ce qui montre bien que la conclusion reste valide même pour des biefs longs. Il est cependant à noter que dans les deux simulations présentées ici la valeur de l'infiltration estimée a été filtrée pour diminuer les oscillations.

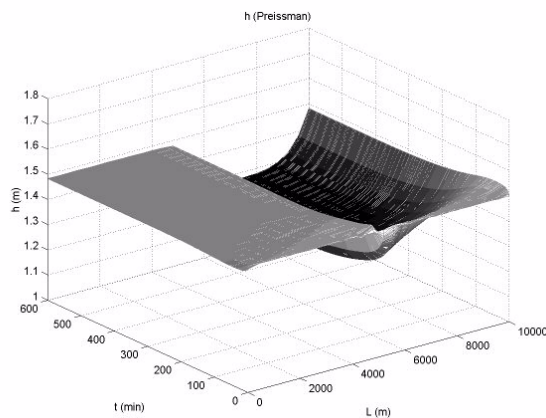


Figure 3.43. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 25 sections et vannes avec perturbation par infiltration négative et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées (q filtré). Canal 10 Km.

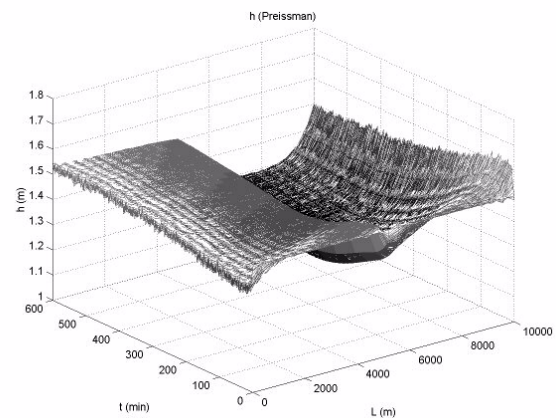


Figure 3.44. Evolution du niveau, pour modèle de Preissmann à 25 sections et vannes avec perturbation par infiltration négative et commande par linéarisation entrée sortie dynamique avec utilisation des variables observées (q filtré) avec bruit de mesure et erreur sur mesure de largeur et coefficient de Strickler. Canal 10 Km.

Comme conclusion ces simulations montrent bien que l'observateur permet d'améliorer le rejet de perturbation de la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique.

3.7.4. Conclusions

Les conclusions sur la validation du système couplé observateur-commande peuvent se résumer comme suit :

- ❑ L'observateur donne de bons résultats, même appliqué à un modèle réaliste, ce qui indique une certaine robustesse. Seule une petite difficulté se présente pour des biefs longs où l'erreur d'observation de l'infiltration est importante, mais cela peut être amélioré par le filtrage de la valeur.
- ❑ Le couplage observation-commande, qui permet de commander le système avec seulement deux mesures de niveau, fonctionne aussi bien et s'est avéré très robuste par rapport au modèle utilisé pour la simulation.
- ❑ L'utilisation de l'observateur couplé à la commande linéarisante dynamique, semble possible conformément aux résultats de simulation.
- ❑ L'observateur permet d'améliorer les performances de rejet de perturbation de la commande, tant pour une infiltration que pour une prise latérale.

3.8. COMMANDE DE BIEFS INTERCONNECTES

3.8.1. Introduction

La configuration classique des canaux d'irrigation se présente souvent sous la forme de biefs interconnectés. Cette interconnexion de biefs est à l'origine de problèmes additionnels pour la commande, en effet la commande développée pour un seul bief n'est pas directement transposable à des biefs interconnectés, dans la plupart des cas. Il est donc important de pouvoir étudier le comportement de ce type de systèmes car seuls les commandes qui considèrent cette configuration sont envisageables pour un système réel.

La commande développée dans les chapitres précédents présente un problème additionnel qui est l'utilisation des deux vannes pour la commande du bief (système MIMO). En effet si pour un bief il y a bien deux vannes utilisables pour la commande, pour deux biefs il n'y en a que trois, et il en faudrait quatre pour transposer directement la commande.

Dans la plupart des développements de commande étudiés dans la littérature ce problème ne se pose pas, car la commande est réalisée à partir d'une seule vanne pour chaque bief (système SISO), cependant il est clair que la possibilité d'utiliser les deux vannes pour chaque bief doit permettre une meilleure performance de la commande (atteindre plus rapidement le niveau désiré par exemple).

Plusieurs solutions sont envisageables pour pallier ce problème, une première est de développer des lois de commande spécifiques à des biefs interconnectés : pour un canal à deux biefs par exemple, il s'agit d'étudier le système complet des deux biefs et trois vannes et développer des lois de commande pour les trois vannes. Cette option présente le problème de devoir étudier un système complexe, et d'être particulière à chaque système de canaux interconnectés. Une autre option est de développer des nouvelles lois de commande pour une seule vanne par bief, comme c'est généralement le cas dans la littérature, en développant par exemple une commande par l'amont ou par l'aval. Dans cette deuxième option le gain de performance lié à la commande des deux vannes d'un bief n'existe plus, de plus avec une seule vanne il n'est possible de commander qu'un seul niveau d'un bief, tandis que les commandes développées permettent la commande simultanée de deux niveaux.

Une troisième option envisageable est d'utiliser les commandes des deux vannes développées pour un seul bief, et pour les vannes entre deux biefs, pour lesquelles deux commandes ont été calculées, utiliser une pondération de ces deux commandes, avec un critère à choisir. Cette dernière option présente comme principal problème la difficulté de garantir la stabilité du système interconnecté ainsi commandé, car la preuve de stabilité établie pour chaque bief ne garantit pas la stabilité du système complet, et en plus les commandes appliquées ne correspondent pas aux commandes qui garantissent la stabilité du système, puisqu'elles dépendent des biefs contigus. Par contre cette dernière option présente l'avantage de développer une commande semi-indépendante pour chaque bief, qui sera interconnectée naturellement du fait qu'elle prend en compte le bief suivant.

La dernière option sera utilisée par la suite, car en plus des avantages naturels qu'elle présente, elle permet d'appliquer directement les lois de commande développées à un système interconnecté, ce qui est le but principal de cette partie du travail.

3.8.2. Modèle pour un système à deux biefs

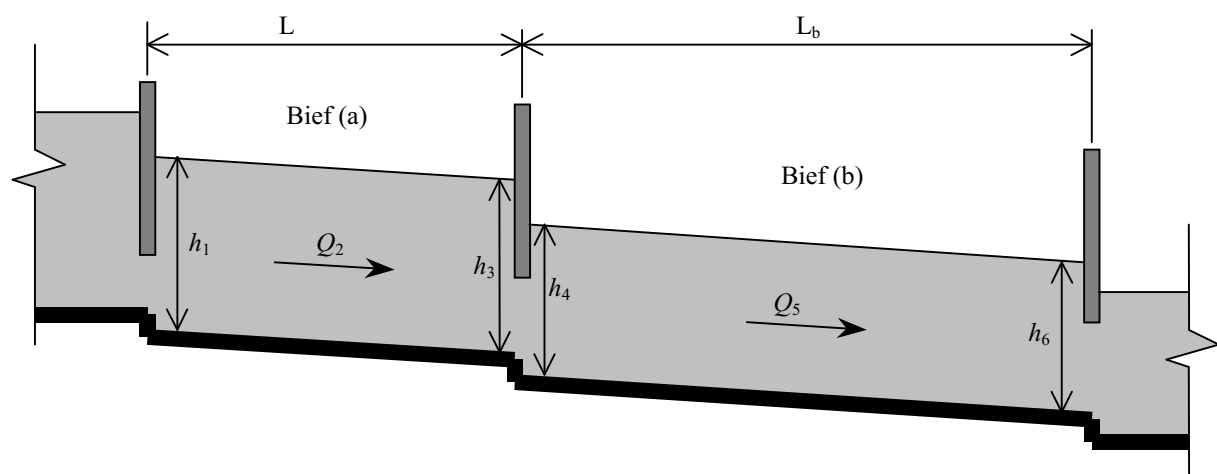


Figure 3.45. Configuration système à deux biefs

Pour l'étude de ce problème d'interconnexion sera utilisé par la suite une configuration de canal à deux biefs tel que sur la Figure 3.45, considérant que ces résultats pourront être extrapolés à des configurations avec un nombre supérieur de biefs.

Le modèle utilisé sera, comme pour la commande d'un seul bief, un modèle de dimension finie obtenue par une méthode de collocation à trois points pour chacun des biefs, tel que le montre la Figure 3.46.

On considère que le but de la commande est la régulation du niveau le long du canal, autour d'un état d'équilibre (h_e, Q_e) pour le premier bief et (h_{eb}, Q_{eb}) pour le second.

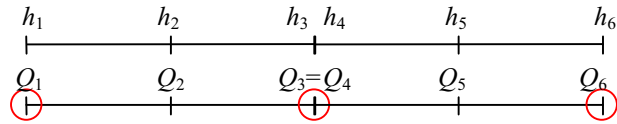


Figure 3.46. Conditions limites $Q_{am} - Q_{av}$ pour deux biefs

Les commandes dans ce cas sont :

$$u_1 = Q_1; \quad u_2 = Q_3 = Q_4; \quad u_3 = Q_6 \quad (3.102)$$

Le système s'écrit dans ce cas particulier, en tenant compte des infiltrations du canal, et en introduisant le terme de friction, ainsi que les commandes, pour le premier bief :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{BL} [qL - 4Q_2 + 3u_1 + u_2] \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{BL} [qL + 4Q_2 - u_1 - 3u_2] \\ \dot{Q}_2 = -\frac{2Q_2(-u_1 + u_2)}{BLh_2} + \frac{Q_2^2(-h_1 + h_3)}{BLh_2^2} - gBh_2 \left[\frac{(-h_1 + h_3)}{L} - I + \frac{Q_2^2}{k^2 B^2 h_2^2 \left(\frac{Bh_2}{B + 2h_2} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_q q}{B} \frac{Q_2}{h_2} \end{cases} \quad (3.103)$$

Avec $h_2 = \frac{1}{2}(h_3 + h_1)$ et comme sorties :

$$\begin{cases} y_1 = h_1 - h_e \\ y_2 = h_3 - h_e \end{cases} \quad (3.104)$$

Pour le deuxième bief :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{h}_4 = \frac{1}{B_b L_b} [q_b L_b + 3u_2 - 4Q_5 + u_3] \\ \dot{h}_6 = \frac{1}{B_b L_b} [q_b L_b - u_2 + 4Q_5 - 3u_3] \\ \dot{Q}_5 = -\frac{2Q_5(-u_2 + u_3)}{B_b L_b h_5} + \frac{Q_5^2(-h_4 + h_6)}{B_b L_b h_5^2} - g B_b h_5 \left[\frac{(-h_4 + h_6)}{L_b} - I_b + \frac{Q_5^2}{k_b^2 B_b^2 h_5^2 \left(\frac{B_b h_5}{B_b + 2h_5} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_{qb} q_b}{B_b} \frac{Q_5}{h_5} \end{array} \right. \quad (3.105)$$

Avec $h_5 = \frac{1}{2}(h_4 + h_6)$ et comme sorties :

$$\begin{cases} y_3 = h_4 - h_{eb} \\ y_4 = h_6 - h_{eb} \end{cases} \quad (3.106)$$

A noter que les coefficients géométriques peuvent être différents pour les deux biefs, l'indice b indique les paramètres géométriques du second bief.

3.8.3. Détermination de la commande

Le calcul de la commande se fait de façon indépendante pour chacun des deux biefs, en utilisant une des deux méthodes de linéarisation entrée-sortie. La version statique sera utilisée par la suite dans un souci de simplicité, mais la version dynamique sera aussi testée en simulation.

Dans ce cas les commandes calculées indépendamment pour chaque bief seront, pour le premier bief (a) :

$$\begin{aligned} u_1 &= Q_2 - \frac{1}{2} qL - BL \left(\frac{3}{8} K_1 (h_1 - h_e) + \frac{1}{8} K_2 (h_3 - h_e) \right) \\ u_{2a} &= Q_2 + \frac{1}{2} qL + BL \left(\frac{1}{8} K_1 (h_1 - h_e) + \frac{3}{8} K_2 (h_3 - h_e) \right) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Sous les contraintes :

$$\forall t \geq 0, \quad y_2(t) - y_1(t) < \frac{gL}{k^2 B} \quad \text{et} \quad y_2(t) - y_1(t) \leq LI \quad (3.108)$$

Pour le deuxième bief (b) :

$$u_{2b} = Q_5 - \frac{1}{2} q_b L_b - B_b L_b \left(\frac{3}{8} K_{1b} (h_4 - h_{eb}) + \frac{1}{8} K_{2b} (h_6 - h_{eb}) \right) \quad (3.109)$$

$$u_3 = Q_5 + \frac{1}{2}q_b L_b + B_b L_b \left(\frac{1}{8}K_{1b}(h_4 - h_{eb}) + \frac{3}{8}K_{2b}(h_6 - h_{eb}) \right)$$

Sous les contraintes :

$$\forall t \geq 0, \quad y_4(t) - y_3(t) < \frac{gL_b}{k_b^2 B_b} \quad \text{et} \quad y_4(t) - y_3(t) \leq L_b I_b \quad (3.110)$$

Le calcul de la commande commune u_2 est proposé comme une pondération de la façon suivante :

$$u_2 = (fp)u_{2a} + (1 - fp)u_{2b} \quad (3.111)$$

Où fp est un facteur de pondération avec une valeur comprise entre 0 et 1.

Donc:

$$\begin{aligned} u_2 = & (fp) \left(Q_2 + \frac{1}{2}qL + BL \left(\frac{1}{8}K_1(h_1 - h_e) + \frac{3}{8}K_2(h_3 - h_e) \right) \right) \\ & + (1 - fp) \left(Q_5 - \frac{1}{2}q_b L_b - B_b L_b \left(\frac{3}{8}K_{1b}(h_4 - h_{eb}) + \frac{1}{8}K_{2b}(h_6 - h_{eb}) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.112)$$

Deux cas particuliers se présentent ici :

1. Pour un facteur de pondération égal à 1, $u_2 = u_{2a}$, donc la commande du premier bief est identique à la commande pour un bief seul, et le deuxième bief sera alors commandé par sa vanne aval, la commande de la vanne centrale étant pour lui une perturbation. Ce cas correspond à la commande dite par l'amont. Notons ici que la stabilité du premier bief n'est pas affectée par le deuxième, tandis le deuxième bief se trouve dans la configuration la plus critique pour la stabilité car il conserve une seule de ces deux commandes.
2. D'un autre côté pour un facteur de pondération égal à zéro, $u_2 = u_{2b}$, alors ce sera le deuxième bief qui sera commandé par les deux vannes, et le premier par sa vanne amont, ce cas correspondant à la commande dite par l'aval. De la même façon que pour le premier, la stabilité du second bief ne se voit pas affectée, tandis que le premier bief se trouve dans la configuration la plus critique.

Afin de donner une idée plus précise du comportement à attendre de ce type de commandes, on propose dans ce qui suit une étude de stabilité correspondante au premier cas ($fp=1$).

3.8.4. Cas particulier de la commande par l'amont

On considère ici le cas $fp = 1$.

Le premier bief est commandé normalement par les deux commandes, et donc sa stabilité reste celle déjà vue pour un bief seul, tandis que le second bief est commandé par la vanne aval, la commande amont faisant office de perturbation dans ce cas. Il suffit donc d'étudier la stabilité du second bief, représenté par le système de l'équation (3.105), pour garantir la stabilité du système interconnecté.

Le système en boucle fermée, après introduction de la commande par linéarisation entrée-sortie statique, sera:

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_4 &= 3 \frac{BL}{B_b L_b} \left(\frac{1}{8} K_1 (h_1 - h_e) + \frac{3}{8} K_2 (h_3 - h_e) \right) + \frac{3}{B_b L_b} Q_2 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{8} K_{1b} (h_4 - h_{eb}) + \frac{3}{8} K_{2b} (h_6 - h_{eb}) \right) - \frac{3}{B_b L_b} Q_5 + \frac{3}{2} \frac{qL}{B_b L_b} + \frac{3}{2} \frac{q_b L_b}{B_b L_b} \\
 \dot{h}_6 &= - \frac{BL}{B_b L_b} \left(\frac{1}{8} K_1 (h_1 - h_e) + \frac{3}{8} K_2 (h_3 - h_e) \right) - \frac{Q_2}{B_b L_b} \\
 &\quad - \left(\frac{3}{8} K_{1b} (h_4 - h_{eb}) + \frac{9}{8} K_{2b} (h_6 - h_{eb}) \right) + \frac{Q_5}{B_b L_b} - \frac{1}{2} \frac{q_b L_b}{B_b L_b} - \frac{1}{2} \frac{qL}{B_b L_b} \\
 \dot{Q}_5 &= \frac{2Q_5 \left(\frac{BL}{B_b L_b} \left(\frac{1}{8} K_1 (h_1 - h_e) + \frac{3}{8} K_2 (h_3 - h_e) \right) + Q_2 \right.}{B_b L_b h_5} \\
 &\quad \left. - B_b L_b \left(\frac{1}{8} K_{1b} (h_4 - h_{eb}) + \frac{3}{8} K_{2b} (h_6 - h_{eb}) \right) - \frac{1}{2} q_b L_b + \frac{1}{2} qL \right)}{B_b L_b h_5} - \frac{2Q_5^2}{B_b L_b h_5} \\
 &\quad + \frac{Q_5^2 (-h_4 + h_6)}{B_b L_b h_5^2} - g B_b h_5 \left[\frac{(-h_4 + h_6)}{L_b} - I_b + \frac{Q_5^2}{k_b^2 B_b^2 h_5^2 \left(\frac{B_b h_5}{B_b + 2h_5} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_{qb} q_b}{B_b} \frac{Q_5}{h_5}
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

3.8.4.1. Points d'équilibre

Le système possède de multiples points d'équilibre, il est possible de calculer quelques relations entre les valeurs d'un point d'équilibre avec les expressions (3.114).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} K_{1b} (h_{4e} - h_{eb}) + \frac{3}{8} K_{2b} (h_{6e} - h_{eb}) + \frac{3}{B_b L_b} Q_e - \frac{3}{B_b L_b} Q_{eb} + \frac{3}{2} \frac{qL}{B_b L_b} + \frac{3}{2} \frac{q_b L_b}{B_b L_b} &= 0 \\
 - \frac{3}{8} K_{1b} (h_{4e} - h_{eb}) - \frac{9}{8} K_{2b} (h_{6e} - h_{eb}) + \frac{1}{B_b L_b} Q_{eb} - \frac{1}{B_b L_b} Q_e - \frac{1}{2} \frac{q_b L_b}{B_b L_b} - \frac{1}{2} \frac{qL}{B_b L_b} &= 0 \\
 \frac{2Q_{eb} \left(-B_b L_b \left(\frac{1}{8} K_{1b} (h_{4e} - h_{eb}) + \frac{3}{8} K_{2b} (h_{6e} - h_{eb}) \right) - Q_{eb} + Q_e - \frac{1}{2} q_b L_b + \frac{1}{2} qL \right)}{B_b L_b h_5} & \\
 + \frac{Q_{eb}^2 (-h_{4e} + h_{6e})}{B_b L_b h_{5e}^2} - g B_b h_{5e} \left[\frac{(-h_{4e} + h_{6e})}{L_b} - I_b + \frac{Q_{eb}^2}{k_b^2 B_b^2 h_{5e}^2 \left(\frac{B_b h_{5e}}{B_b + 2h_{5e}} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_{qb} q_b}{B_b} \frac{Q_{eb}}{h_{5e}} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

On peut obtenir par exemple une relation entre le niveau d'équilibre amont et aval :

$$h_{4e} = \frac{-3K_{2b}h_{6e} + (K_{1b} + 3K_{2b})h_{eb}}{K_{1b}} \quad (3.115)$$

Mais ici les possibilités sont infinies car les relations obtenues pour ces variables sont linéairement dépendantes entre elles.

Dans les possibilités existantes on a par exemple $h_{6e} = h_{eb}$ et dans ce cas $h_{4e} = h_{eb}$, qui indique que la consigne de niveau h_{eb} peut être un point d'équilibre. Par contre il est aussi possible que $h_{6e} = h_{eb} + \delta$, où le terme δ indique un écart par rapport à la valeur d'équilibre voulue, dans ce cas $h_{4e} = h_{eb} - 3\frac{K_{2b}}{K_{1b}}\delta$. En supposant que $K_{1b} = K_{2b}$, ce qui est le cas pour les simulations faites, cela revient à $h_{4e} = h_{eb} - 3\delta$.

D'un autre côté les équations montrent que le débit est à l'équilibre pour :

$$Q_{eb} = Q_e + \frac{1}{2}q_b L_b + \frac{1}{2}qL \quad (3.116)$$

C'est la valeur nécessaire pour satisfaire l'équation de continuité des deux biefs à l'équilibre.

La valeur de h_{5e} est de son côté plus difficile à évaluer car elle dépend de l'équation de la dynamique du débit, la seule chose facile à indiquer est qu'elle dépend de l'infiltration et peut donc être différente des deux autres.

Etant donné qu'aucune preuve de stabilité globale n'a pu être établie jusqu'à présent on étudiera la stabilité locale, autour d'un point d'équilibre général h_{4e}, h_{6e}, Q_{eb} , et pour simplifier les expressions, les relations montrées précédemment seront utilisées.

3.8.4.2. Simplification du système

On utilise le changement de variable :

$$\dot{h}_5 = \frac{1}{2}(\dot{h}_4 + \dot{h}_6) \quad (3.117)$$

$$\dot{H} = \dot{h}_6 - \dot{h}_4 \quad (3.118)$$

$$H = H(0) + h_6 - h_6(0) - h_4 + h_4(0) \quad (3.119)$$

Si le système est initialement à l'équilibre

$$H = H_e + h_6 - h_4 - 4\delta \quad (3.120)$$

Le système à analyser devient :

$$\begin{aligned} \dot{h}_5 &= -\frac{1}{2}K_{1b}(h_5 - h_{5e}) - \frac{1}{8}K_{1b}(H - H_e) - \frac{Q_5}{B_b L_b} \\ &\quad + \frac{BL}{B_b L_b} \left(\frac{1}{8}K_1(h_1 - h_e) + \frac{3}{8}K_2(h_3 - h_e) \right) + \frac{Q_2}{B_b L_b} + \frac{1}{2} \frac{q_b L_b}{B_b L_b} + \frac{1}{2} \frac{qL}{B_b L_b} \\ \dot{H} &= -2K_{1b}(h_5 - h_{5e}) - \frac{1}{2}K_{1b}(H - H_e) + \frac{4Q_5}{B_b L_b} \\ &\quad - 4 \frac{BL}{B_b L_b} \left(\frac{1}{8}K_1(h_1 - h_e) + \frac{3}{8}K_2(h_3 - h_e) \right) - \frac{4Q_2}{B_b L_b} - 2 \frac{q_b L_b}{B_b L_b} - 2 \frac{qL}{B_b L_b} \\ &\quad - 2Q_5 \left(\frac{-B_b L_b K_{1b} \left(\frac{1}{2}(h_5 - h_{5e}) + \frac{1}{8}(H - H_e) \right)}{B_b L_b h_5} + \frac{BL \left(\frac{1}{8}K_1(h_1 - h_e) + \frac{3}{8}K_2(h_3 - h_e) \right) + Q_2 - \frac{1}{2}q_b L_b + \frac{1}{2}qL}{B_b L_b h_5} \right) \\ \dot{Q}_5 &= -\frac{2Q_5^2}{B_b L_b h_5} - \frac{2Q_5^2}{B_b L_b h_5} \\ &\quad + \frac{Q_5^2 (H - H_e + 4\delta)}{B_b L_b h_5^2} - gB_b h_5 \left[\frac{H - H_e + 4\delta}{L_b} - I_b + \frac{Q_5^2}{k_b^2 B_b^2 h_5^2 \left(\frac{B_b h_5}{B_b + 2h_5} \right)^{4/3}} \right] + \frac{k_{qb} q_b}{B_b} \frac{Q_5}{h_5} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Le linéarisé tangent de ce système est :

$$\begin{aligned} \dot{h}_{5L} &= -\frac{1}{2}K_{1b}(h_5 - h_{5e}) - \frac{1}{8}K_{1b}(H - H_e) - \frac{1}{B_b L_b}(Q_5 - Q_{eb}) \\ \dot{H}_L &= -2K_{1b}(h_5 - h_{5e}) - \frac{1}{2}K_{1b}(H - H_e) + \frac{4}{B_b L_b}(Q_5 - Q_{eb}) \\ \dot{Q}_{5L} &= \dot{Q}_{5e} + \frac{\partial \dot{Q}_5}{\partial h_5} \Big|_e (h_5 - h_{5e}) + \frac{\partial \dot{Q}_5}{\partial H} \Big|_e (H - H_e) + \frac{\partial \dot{Q}_5}{\partial Q_5} \Big|_e (Q_5 - Q_{eb}) \end{aligned} \quad (3.122)$$

Avec :

$$\dot{Q}_{5e} = \frac{4\delta}{L_b} \left(\frac{Q_{eb}^2}{B_b h_{5e}^2} - gB_b h_{5e} \right) + gB_b h_{5e} I_b - \frac{gQ_{eb}^2}{k_b^2 B_b h_{5e} \left(\frac{B_b h_{5e}}{B_b + 2h_{5e}} \right)^{4/3}} + (k_{qb} - 2) \frac{q_b}{B_b} \frac{Q_{eb}}{h_{5e}} \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial \dot{Q}_5}{\partial h_5} \Big|_e = -\frac{Q_{eb} K_{1b}}{h_{5e}} - \frac{4\delta}{L_b h_{5e}} \left(2 \frac{Q_{eb}^2}{B_b h_{5e}^2} + gB_b h_{5e} \right) + gB_b I_b + \frac{gQ_{eb}^2 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{B_b}{B_b + 2h_{5e}} \right)}{k_b^2 B_b h_{5e}^2 \left(\frac{B_b h_{5e}}{B_b + 2h_{5e}} \right)^{4/3}} + (2 - k_{qb}) \frac{q_b}{B_b} \frac{Q_{eb}}{h_{5e}^2} := A_1 \quad (3.124)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{Q}_5}{\partial H} \right|_e = -\frac{1}{4} \frac{K_{1b} Q_{eb}}{h_{5e}} + \frac{1}{L_b} \left(\frac{Q_{eb}^2}{B_b h_{5e}^2} - g B_b h_{5e} \right) := A_2 \quad (3.125)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{Q}_5}{\partial Q_5} \right|_e = -\frac{2Q_{eb}}{B_b L_b h_{5e}} + 8 \frac{Q_{eb} \delta}{B_b L_b h_{5e}^2} - \frac{2gQ_{eb}}{k_b^2 B_b h_{5e} \left(\frac{B_b h_{5e}}{B_b + 2h_{5e}} \right)^{4/3}} + (k_{qb} - 2) \frac{q_b}{B_b h_{5e}} := A_3 \quad (3.126)$$

Ce système linéaire peut s'écrire comme :

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_5 \\ \dot{H} \\ \dot{Q}_5 \end{bmatrix}_L = A \begin{bmatrix} h_5 \\ H \\ Q_5 \end{bmatrix} + B \quad (3.127)$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} K_{1b} & -\frac{1}{8} K_{1b} & -\frac{1}{B_b L_b} \\ -2K_{1b} & -\frac{1}{2} K_{1b} & \frac{4}{B_b L_b} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

3.8.4.3. Analyse de stabilité

La stabilité dépend des valeurs propres de $(SI - A)$:

$$|SI - A| = (S + K_{1b}) \left(S^2 - A_3 S + \frac{A_1 - 4A_2}{B_b L_b} \right) \quad (3.129)$$

On observe donc que, pour que le système soit stable deux conditions s'imposent :

1. Première condition

$$A_3 < 0$$

$$(k_{qb} - 2)q_b < \frac{2Q_{eb}}{L_b} \left(1 - \frac{4\delta}{h_{5e}} + \frac{gL_b}{k_b^2 \left(\frac{B_b h_{5e}}{B_b + 2h_{5e}} \right)^{4/3}} \right) \quad (3.130)$$

Si on suppose que le système est initialement sur un équilibre $h_{4e} = h_{6e} = h_{eb}$, correspondant à

$\delta = 0$, alors :

Si $q > 0 \Rightarrow k_q = 0$ dans ce cas la condition est toujours garantie

Si $q < 0 \Rightarrow k_q = 1$ dans ce cas la condition est satisfaite si :

$$|q_b| < \frac{2Q_{eb}}{L_b} \left(1 + \frac{gL_b}{k_b^2 \left(\frac{B_b h_{se}}{B_b + 2h_{se}} \right)^{4/3}} \right) \quad (3.131)$$

Condition qui reste vraie seulement pour des infiltrations de faible amplitude.

Si $\delta \neq 0$, on observe d'après (3.130) que si $\delta < 0$, alors la condition de stabilité est plus facilement garantie, tandis que si $\delta > 0$, la condition est moins facilement garantie. On peut donc conclure que cette condition peut être satisfaite selon l'amplitude de l'infiltration q_b par rapport à la configuration d'équilibre considéré du canal (et notamment l'écart entre les niveaux extrêmes du deuxième bief).

2. Deuxième condition

$$A_1 - 4A_2 > 0$$

$$(k_{qb} - 2)q_b < -\frac{4\delta B_b h_{se}}{L_b Q_{eb}} \left(2 \frac{Q_{eb}^2}{B_b h_{se}^2} + g B_b h_{se} \right) + \frac{4B_b h_{se}^2}{L_b Q_{eb}} \left(g B_b h_{se} - \frac{Q_{se}^2}{B_b h_{se}^2} \right) + \frac{g B_b^2 I_b h_{se}^2}{Q_{eb}} + \frac{g Q_{eb} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{B_b}{B_b + 2h_{se}} \right)}{k_b^2 \left(\frac{B_b h_{se}}{B_b + 2h_{se}} \right)^{4/3}} \quad (3.132)$$

On observe sur la condition que si $\delta = 0$ alors tous les termes de droite sont positifs, ce qui indique que les conclusions ici sont analogues à la première condition, c'est-à-dire que la condition est satisfaite pour des infiltrations positives ou négatives de faible amplitude. D'un autre côté le terme δ a le même effet, c'est-à-dire que des valeurs négatives tendent à favoriser la stabilité du système et des valeurs positives à la défavoriser.

En conclusion à cette analyse de stabilité on peut dire que le second bief commandé par une seule commande reste stable localement autour d'un point d'équilibre, sous certaines conditions précises de relation entre l'infiltration et cet équilibre. A propos de cet équilibre, il est possible d'ajouter que plus la pente de la surface de l'eau sera forte, plus le système aura tendance à se stabiliser, par contre quand la surface de l'eau devient plane la stabilité est moins garantie. Ce qui s'approche des conditions de stabilité calculées pour un bief seul (où on avait une condition sur la différence de niveaux dans le même sens). De plus il est logique de penser que s'il existe une infiltration négative grande, alors on a besoin de plus d'eau à l'amont pour compenser cette infiltration, donc cette condition va dans le sens des caractéristiques physiques de ce système hydraulique.

Il est aussi important de noter que même si le système possède une multiplicité des points d'équilibre, pour un point d'équilibre donné la valeur du niveau à l'amont différera de la valeur du niveau à l'aval dans des proportions inverses. Cela indique que pour tout point d'équilibre, le niveau sur un point du canal sera celui indiqué par la consigne, et ce point sera placé plus ou moins au 3/4 de la longueur en partant de l'amont. Par contre on revoit ici le fait qu'il ne soit pas possible de contrôler exactement le niveau aux deux extrémités du bief avec une seule commande.

3.8.5. Validation de la commande sur biefs interconnectés

Pour valider la commande sur des biefs interconnectés le procédé sera similaire à celui utilisé pour les validations précédentes. Dans un premier temps des simulations seront faites pour un système à deux biefs interconnectés avec le modèle utilisé pour des calculs théoriques, ensuite seront faites les mêmes simulations pour un modèle plus précis (Preissmann), et seront ajoutées les équations des vannes, les valeurs observées et la commande dynamique, tout cela en produisant une variation de la consigne de niveaux des deux biefs. Ensuite sera testée la capacité de rejet de perturbation du système en introduisant une prise latérale sur un des biefs et en observant la variation qui apparaît sur les niveaux, en comparaison avec un modèle sans commande (ouverture des vannes fixe).

3.8.5.1. Validation sur modèle par collocation à trois points

Les figures suivantes montrent les résultats de simulation pour un système de deux biefs interconnectés de 1 Km de long chacun, 1 m de large, 1 % de pente et un coefficient de Strickler de 25 (ces valeurs seront utilisées pour toutes les simulations de cette partie). Ces deux biefs seront soumis à une variation de consigne de 20 %, en utilisant la commande par linéarisation entrée-sortie statique dont la valeur de la vanne du milieu sera pondérée comme indique dans la section 3.8.3. Trois valeurs du facteur de pondération seront utilisées ici : 0, 0.5 et 1.

La Figure 3.47 montre l'évolution du niveau pour le système énoncé en utilisant un facteur de pondération pour la commande de 0, ce qui correspond à une commande par l'aval (c'est-à-dire que le bief aval sera commandé avec les deux vannes et le bief amont sera commandé par seulement sa vanne amont). Les résultats observés correspondent bien aux attentes car la simulation du bief aval est identique à celle d'un bief seul, tandis que pour le bief amont les transitoires sont plus longs, surtout sur le niveau proche de la vanne centrale.

La Figure 3.48 montre quant à elle l'évolution du niveau pour ce système en utilisant un facteur de pondération pour la commande de 0.5 : dans ce cas les deux biefs atteignent la nouvelle consigne de façon relativement similaire.

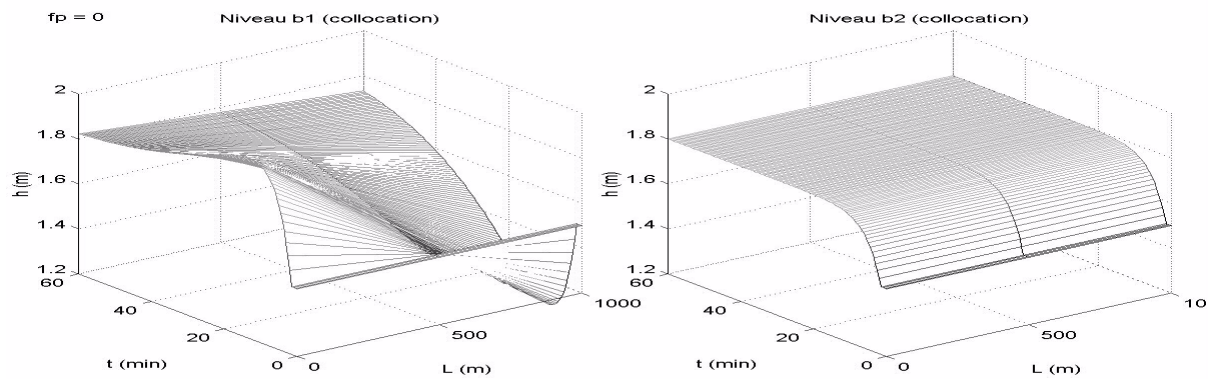


Figure 3.47. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une variation de consigne de niveau de 20%, avec modèle par collocation à 3 points et commande par linéarisation entrée-sortie statique et facteur de pondération 0 (commande par l'aval).

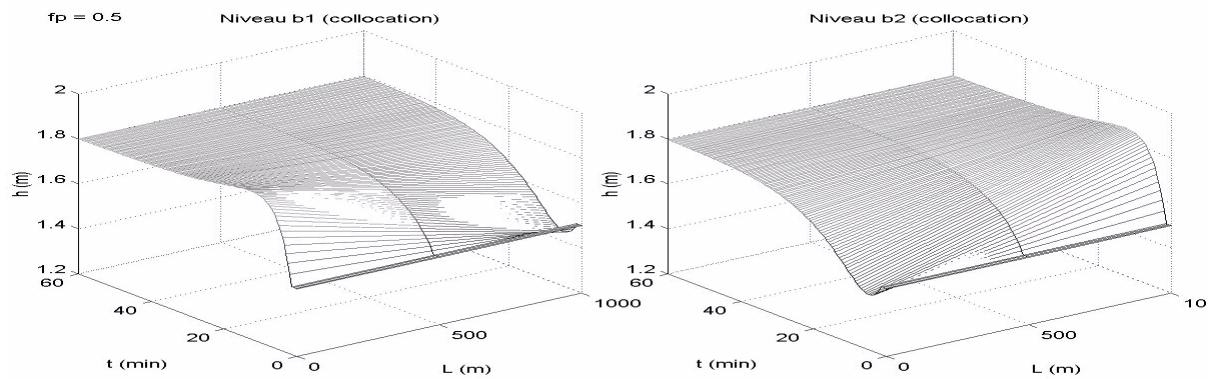


Figure 3.48. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une variation de consigne de niveau de 20%, avec modèle par collocation à 3 points et commande par linéarisation entrée-sortie statique et facteur de pondération 0.5.

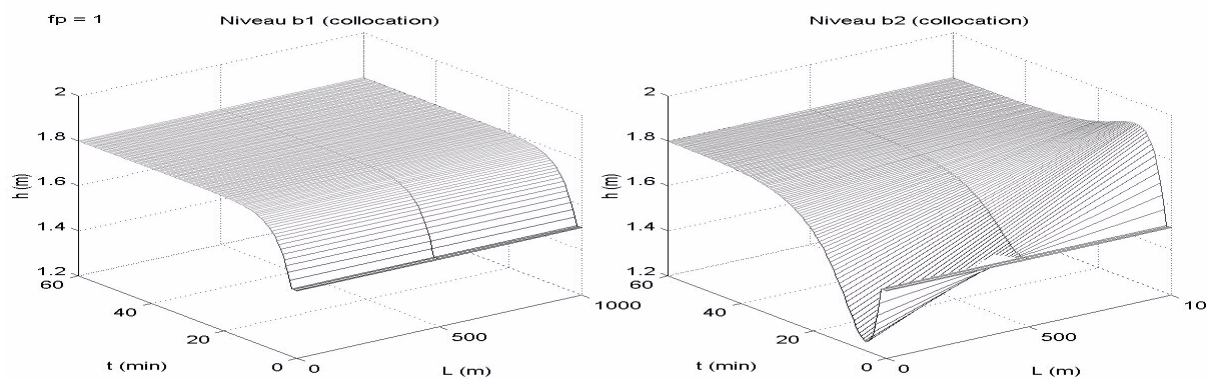


Figure 3.49. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une variation de consigne de niveau de 20%, avec modèle par collocation à 3 points et commande par linéarisation entrée-sortie statique et facteur de pondération 1 (commande par l'amont).

La Figure 3.49 montre alors la même simulation en utilisant un facteur de pondération de 1. Dans ce cas la commande correspond à une commande par l'amont, et de façon analogue à la commande par

l'aval le résultat du bief amont est identique à celui d'un bief seul, tandis que le bief aval atteint plus lentement la nouvelle consigne.

Il est donc possible de conclure que le système à deux biefs interconnectés, commandé par linéarisation entrée-sortie statique, satisfait de façon acceptable les changements de consigne imposés. De plus on retrouve ici les caractéristiques attendues suivant le facteur de pondération utilisé, c'est-à-dire, dans la commande par l'amont le premier bief atteint plus rapidement la nouvelle consigne, dans la commande par l'aval c'est le second qui atteint plus rapidement la nouvelle consigne, et pour une commande qu'on appellera intermédiaire les deux biefs répondent avec des vitesses similaires. A noter au passage que c'est pour cette dernière que l'erreur des transitoires est la plus petite sur les deux biefs.

Dans un souci de simplification du texte, est de correspondance avec les études théoriques réalisées, seuls les résultats obtenus avec la commande par l'amont ($fp=1$) seront présentés par la suite.

3.8.5.2. Validation sur modèle de Preissmann à 10 sections

Le but de cette section est de montrer la robustesse de la commande, vis-à-vis du modèle utilisé en simulation et des erreurs de mesure ou estimation, ainsi que tester l'utilisation de la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique qui elle n'a pas été analysée théoriquement.

La Figure 3.50 présente la simulation du même bief avec le simulateur de Preissmann à 10 sections, avec une commande par l'amont. Cette simulation montre des résultats similaires à celle du simulateur par collocation : on observe bien ici que le bief amont atteint la nouvelle valeur de référence comme un bief seul, tandis que le second bief présente des transitoires plus longs et de plus grande amplitude, mais atteint tout de même la nouvelle consigne. Cela nous montre que la commande est bien robuste par rapport au modèle de simulation utilisé, et il est possible de penser à la possibilité de son utilisation sur un système réel.

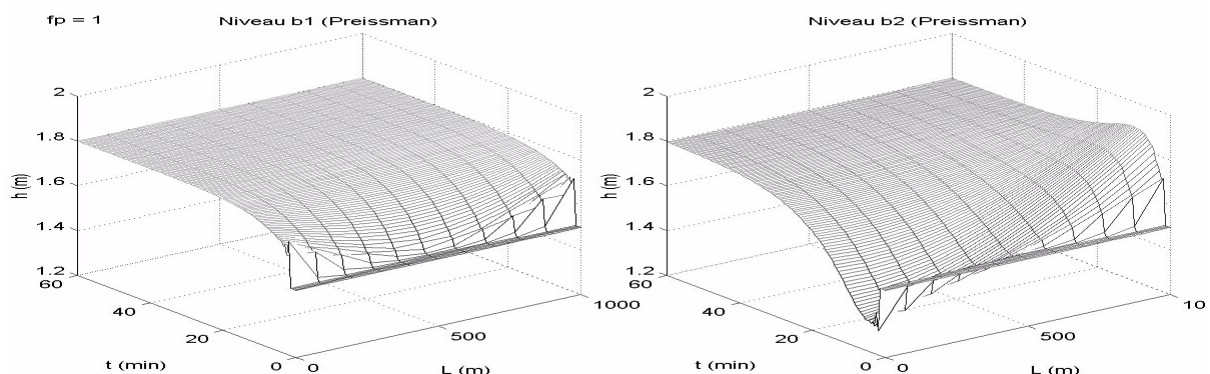


Figure 3.50. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une variation de consigne de niveau de 20%, avec modèle de Preissmann à 10 sections et commande par linéarisation entrée sortie statique et facteur de pondération 1 (commande par l'amont).

Par la suite plusieurs autres tests ont été faits toujours pour évaluer la robustesse de la commande, en ajoutant plus ou moins de réalisme au simulateur. La Figure 3.51 résume tout cela, car elle présente la simulation du même bief avec le simulateur de Preissmann à 10 sections, avec prise en compte des équations de vannes, et utilisation de l'observateur de débit et infiltration en présence d'erreurs et de bruit de mesure. L'estimation de l'infiltration a été filtrée comme dans le cas des simulations pour un bief seul, et le tout est commandé avec la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique.

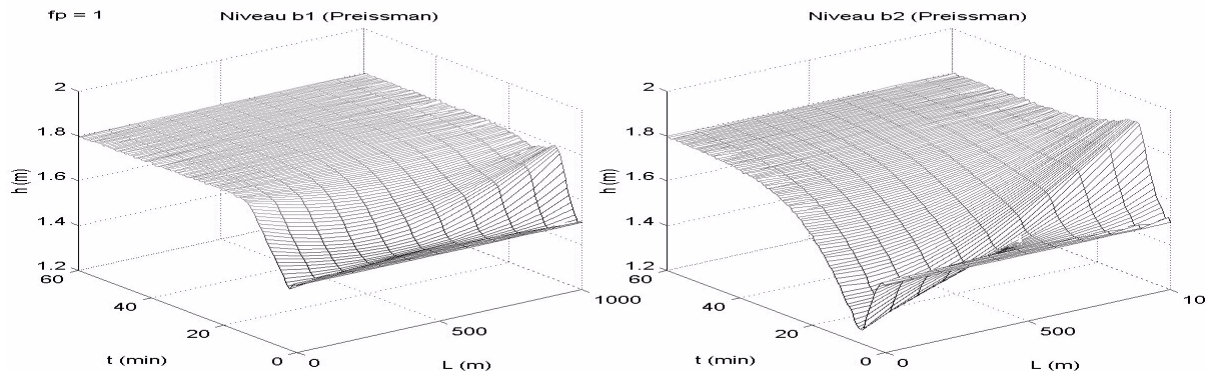


Figure 3.51. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une variation de consigne de niveau de 20%, avec modèle de Preissmann à 10 sections, équations des vannes, observateur (avec erreur et bruit), commande par linéarisation entrée-sortie dynamique et facteur de pondération 1 (commande par l'amont).

Le résultat obtenu est très satisfaisant. A noter que la nouvelle consigne est atteinte dans un temps proche de celui de la simulation avec un modèle plus simple et que l'amplitude et durée des transitoires sont acceptables. On observe ici des petites oscillations résiduelles dues principalement à l'effet du bruit de mesure sur l'observateur, comparables au cas d'un bief seul.

En conclusion il est bien possible de commander deux biefs de canal en utilisant les commandes par linéarisation entrée-sortie, dont la valeur de la commande commune est pondérée, et cette conclusion semble pouvoir s'étendre à un plus grand nombre de biefs. Mis à part le fait que les conditions sur la stabilité deviennent de plus en plus complexes à mesure que des biefs sont ajoutés.

Quelques remarques sont cependant à faire ici. La première est que le choix de la valeur du facteur de pondération est à prendre en compte pour une extension à plus de biefs, car si pour deux biefs il semble que toute valeur de facteur de pondération entre 0 et 1 est utilisable (mis à part que seul l'étude théorique pour $fp = 1$ a été réalisée), pour plus de biefs cela n'est pas forcément vrai. Prenons par exemple le cas de trois biefs et un facteur de pondération de 0.5 : dans ce cas le bief central sera commandé par deux demi-commandes, par contre le choix d'un facteur de pondération 0 ou 1 permet d'avoir au moins une commande par bief.

La seconde remarque est que quelques problèmes sont apparus lors de la simulation en présence des équations des vannes avec un facteur de pondération zéro. Ces problèmes sont semble-t-il

principalement dus à la structure simplifiée du simulateur des vannes. Ils apparaissent en effet quand le niveau du bief aval est très proche du niveau du bief amont, cas pour lequel les équations des vannes simulées ne sont pas suffisamment précises.

3.8.5.3. Rejet de perturbation par prises latérales

Cette dernière section est dédiée à l'étude de l'effet d'une perturbation sous forme de prise latérale sur le système. Pour cela la Figure 3.52 montre la simulation de l'évolution du niveau du système de deux biefs, avec une prise latérale au second bief et les vannes en position fixe, lesquelles procurent le débit nécessaire pour le système à l'équilibre. Dans ce cas les niveaux aux extrémités du second bief (h_4 et h_6) diminuent progressivement jusqu'à une autre valeur d'équilibre inférieure.

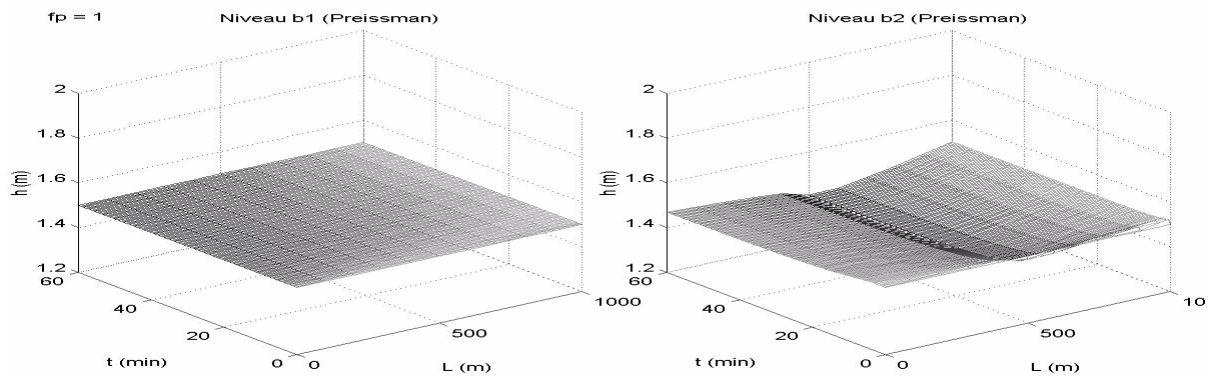


Figure 3.52. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une prise latérale au second bief, avec modèle de Preissmann à 10 sections, sans commande (position fixe des vannes).

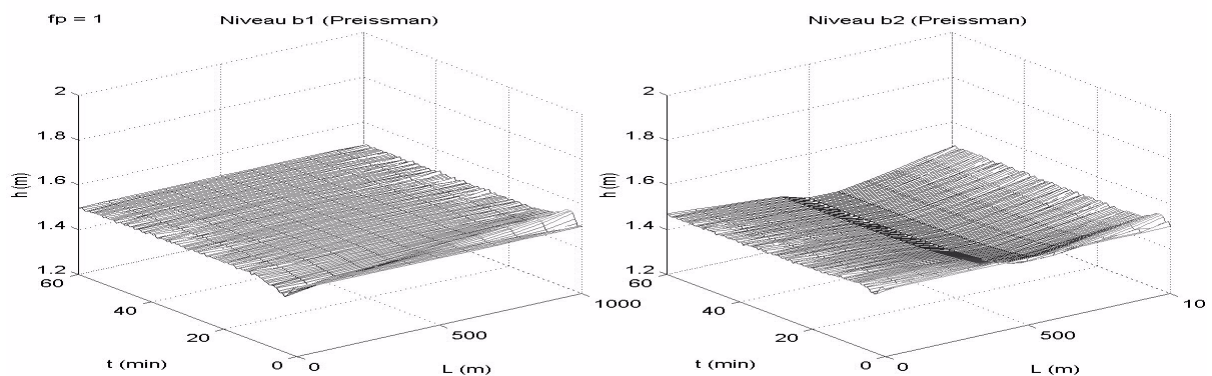


Figure 3.53. Evolution du niveau sur deux biefs soumis à une prise latérale au second bief, avec modèle de Preissmann à 10 sections, équations des vannes, observateur (avec erreur et bruit), commande par linéarisation entrée-sortie dynamique et facteur de pondération 1 (commande par l'amont).

La Figure 3.53 montre quant à elle l'évolution du niveau sur le même bief et la même prise latérale avec le niveau du bief régulé par la commande par linéarisation entrée-sortie dynamique, et avec l'observateur de débit et infiltration. Dans ce cas les niveaux aux extrémités du second bief restent constants, en respectant la consigne de niveau. Cela montre bien la capacité de la commande à rejeter les perturbations dues aux prises latérales. Il faut en plus remarquer le fait que la prise latérale a été volontairement placée sur le bief commandé par une seule vanne.

3.8.6. Conclusions

Les conclusions sur les études du système de biefs interconnectés avec une commande pondérée peuvent se résumer comme suit :

- ❑ La stabilité d'un tel système est conditionnée par la valeur de l'infiltration par rapport à l'équilibre considéré. Ceci peut d'une certaine façon sembler pénalisant mais semble néanmoins rejoindre les limitations physiques propres du système.
- ❑ Les simulations montrent que le comportement de la commande est satisfaisant, tant du point de vue d'un changement de consigne, que de celui du rejet de perturbation.
- ❑ Le système est robuste car il fonctionne bien sur un simulateur réaliste et avec le couplage de l'observateur avec la commande.
- ❑ Les conclusions obtenues sur un système à deux biefs semblent pouvoir s'étendre à un nombre supérieur de biefs, mais il faut analyser avec attention le choix du facteur de pondération.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Bien que les conclusions particulières à chaque point aient été déjà indiquées, il sera fait ici une récapitulation des conclusions les plus importantes de l'étude réalisée. Et, par la suite seront indiquées les multiples voies qui se sont ouvertes comme suite de ce sujet.

Conclusions

Deux points ont été globalement étudiés, la modélisation d'un système hydraulique par une méthode de collocation et la commande du modèle obtenu par des méthodes non linéaires.

La modélisation d'un système hydraulique de canaux ouverts par une méthode de collocation à partir des équations de Saint-Venant, est motivée par l'idée d'obtenir un modèle simple et de dimension finie, tout en restant non linéaire. De ce fait il était question de faire une sorte de réduction de modèle pour obtenir un modèle suffisamment simple pour pouvoir appliquer des méthodes de commande non linéaires. Il s'est avéré par la suite que les espoirs fondés sur cette méthode étaient bien satisfaits, car le modèle obtenu est plus simple que des modèles obtenus par d'autres méthodes tout en étant encore suffisamment précis pour l'utilisation pour la commande.

Bien sûr la validation en détail de ce modèle, par comparaison avec le modèle bien connu dans le domaine, obtenu par le schéma de discrétisation de Preissmann, en a montré quelques caractéristiques bien particulières : la première est qu'il a besoin de moins de sections de discrétisation que des modèles par différences finies, un quart si on parle de la méthode de discrétisation explicite en temps ou quelque pourcentage (30%) par rapport à la méthode de Preissmann. Mais, de ce point de vue de la réduction du nombre de sections de discrétisation, le point le plus important est que même pour un nombre très petits de sections (deux au minimum) les résultats restent proches de la solution réelle, tandis que pour les méthodes de différences finies il existe un nombre de sections en dessous duquel les résultats peuvent être tout à fait en dehors de la réalité. Et cette caractéristique est très appréciable pour la commande. Il a été montré que dans notre cas un modèle à trois points (deux sections) est satisfaisant pour la commande.

Une autre caractéristique importante du modèle obtenu par collocation est qu'il reste un modèle non linéaire tout en étant simple. Le fait d'être non linéaire est très important pour la modélisation de ces systèmes qui sont marqués par une forte dépendance des retards de propagation en fonction du débit, une caractéristique fortement non linéaire qui limite souvent la validité des modèles linéaires couramment utilisés. Et la simplicité est bien sur un atout important pour le développement de la commande.

Il est vrai d'un autre côté, que ce modèle reste moins précis que le modèle obtenu par différences finies en utilisant le schéma de discrétisation de Preissmann, surtout du fait du phénomène de dispersion plus important observé sur le modèle linéarisé. Mais cela est à relativiser, car si dans les simulations observées il existe toujours une différence entre les deux modèles, et bien que le modèle de Preissmann soit déjà largement considéré comme une référence, aucun test n'a pu être fait pour savoir lequel des deux modèles est plus précis sous des conditions de fonctionnement réelles d'un système hydraulique de canaux à surface libre. Cependant il existe une caractéristique du modèle par collocation, qui le rend moins simple à utiliser pour la simulation : on ne peut pas simuler directement les prises latérales sans scinder le système en deux, contrairement au modèle de Preissmann où il est simple d'introduire une prise latérale en ajoutant une condition sur un nœud entre deux sections.

L'objectif en terme de développement de la commande était quant à lui d'obtenir des lois de commande non linéaires sous forme explicite pour analyser si celles-ci étaient capables de palier le problème des fortes non-linéarités du système, et donc de présenter de meilleures performances par rapport aux commandes développées à partir de méthodes linéaires. Il s'est avéré par la suite que la structure du modèle obtenue, avec deux points de collocation sur le niveau et trois points de collocation sur le débit et des conditions aux limites sur les débits aux extrémités, était adéquat pour l'application de techniques de linéarisation entrée-sortie et de Backstepping.

Des deux méthodes testées, la première, la linéarisation entrée-sortie, a donnée de très bons résultats sous diverses conditions de fonctionnement tandis que la seconde, la méthode de Backstepping, a fonctionné correctement que sur des simulations pour un bief court ou appliqué au modèle de commande.

Plus précisément, la commande par Backstepping a été vite laissée de côté, car même si le fonctionnement a été satisfaisant pour des biefs courts, il n'a pas marché correctement sur des modèles précis pour des biefs longs, pour lesquels rapidement la simulation a divergé. Cela indique un manque de robustesse de cette commande vis-à-vis du modèle utilisé.

De son côté la commande par linéarisation entrée-sortie résultant d'un modèle par collocation à trois points a été développée sous deux versions, une statique qui rend la réponse du système en boucle fermé semblable à celle d'un système linéaire du premier ordre et une dynamique qui rend la réponse du système en boucle fermé semblable à celle d'un système linéaire du second ordre. De ces deux versions, la première donne de bons résultats si elle est appliquée à un modèle par collocation et à un modèle de Preissmann pour des biefs courts. En revanche, pour des biefs longs simulés avec le modèle de Preissmann, les simulations présentent des oscillations importantes et ont besoin de l'utilisation d'une discrétisation très fine pour pouvoir fonctionner.

D'un autre côté, la version dynamique de la commande par linéarisation entrée-sortie est de loin celle qui a montrée les meilleurs résultats de simulation, et cela tant du point de vue de la poursuite d'une

consigne que du rejet de perturbations dues aux infiltrations ou prises latérales. Sur les tests de poursuite de la consigne il a été observé que cette commande est capable de supporter des changements de grande amplitude (20%) au niveau du canal, et cela même sur des biefs très longs (jusqu'à 50 Km) simulés avec le modèle de Preissmann et avec prise en compte des équations et conditions des ouvrages, ce qui indique la grande robustesse de la méthode. Les tests de rejet de perturbations ont montré quant à eux que la commande était en effet capable de compenser les effets de ces perturbations, et le résultat obtenu est d'autant meilleur quand il est possible de connaître la valeur de ces perturbations, ce qui nous a mené à penser à l'utilisation d'un observateur pour estimer ces perturbations.

Une des difficultés supplémentaire présentée par cette méthode de commande est le besoin de connaître les valeurs de plusieurs variables (niveaux, débits et infiltration), et pour un canal seul les niveaux sont facilement mesurables. Cette difficulté a été résolue par l'utilisation d'un observateur non linéaire de débit et d'infiltration, développé aussi à partir du modèle par collocation, ce qui montre une grande applicabilité de ce modèle, car avec celui-ci le bief est commandé avec seulement deux mesures de niveau.

Cet observateur a été réalisé en deux parties, un observateur linéaire pour l'infiltration et un observateur non linéaire à grand gain pour le débit. Les résultats de simulation obtenus avec cet observateur sont à leur tour très satisfaisants, ainsi que son fonctionnement couplé avec la commande, et ceci même en présence de bruit de mesure et d'erreur paramétriques sur le modèle de l'observateur. Cependant il a été remarqué sur les simulations que l'estimation de l'infiltration est très sensible aux bruits de mesure, cela se remarque principalement sur des biefs longs. Ce problème a été réduit par le filtrage de cette estimation, et cela sans perte d'applicabilité pour cet observateur.

Au sujet du couplage observateur-commande, les simulations ont montré aussi de très bons résultats, cela même en présence de bruit de mesure et d'erreurs paramétriques, ce qui indique une certaine robustesse. Finalement il a aussi été vérifié l'hypothèse selon laquelle l'utilisation de l'observateur permet d'améliorer le rejet de perturbation de la commande, et cela tant pour une infiltration que pour une prise latérale.

Le dernier sujet étudié dans cette thèse est le problème de l'interconnexion des biefs. Les résultats montrés ici sont seulement un avant-goût des possibilités existantes, et il reste encore beaucoup de choses à étudier sur ce sujet. L'option choisie ici, est de tester l'utilisation directe de la commande développée pour un bief, sur un système à deux biefs, en utilisant une pondération sur la commande conjointe des deux biefs. Bien sûr cette option n'est pas nécessairement la meilleure et il reste beaucoup de choses à étudier sur ce sujet, mais cela nous a permis d'étendre d'une certaine façon les résultats obtenus pour un seul bief.

L'analyse théorique du modèle linéarisé d'une des configurations possibles pour un tel système, plus précisément le cas où le premier bief est commandé correctement et le second se retrouve avec une seule commande, a montré que la stabilité d'un tel système est conditionnée par la valeur de l'infiltration et par la position du point d'équilibre initial. Cette conclusion peut a priori sembler pénalisante mais semble rejoindre les limitations physiques propres du système, ce qui donne de bons espoirs à son application. Les simulations quant à elles sont très encourageantes, car elles montrent un bon fonctionnement d'un système de deux biefs interconnectés commandé de cette façon, et cela tant du point de vue de la poursuite d'une consigne comme pour un rejet de perturbation. De plus le fonctionnement est très satisfaisant même avec un simulateur réaliste et avec le couplage de l'observateur sur la commande.

Finalement il est possible de penser que les résultats obtenus peuvent s'étendre à un nombre supérieur de biefs, mais il faut analyser avec attention le choix du facteur de pondération, et les conditions de stabilité qui peuvent apparaître.

Perspectives

Comme dans la plupart des travaux de recherche, celui-ci a donné des options de solution à quelques problèmes, mais a aussi ouvert des voies d'étude intéressantes qui ont été laissées pour des recherches futures, faute de temps. Parmi ces perspectives, il est important de noter que :

- ❑ Ce travail repose sur toute une série de tests faits en simulation, il serait donc intéressant de pouvoir valider ces résultats sur un banc d'essais expérimental, et cela pour les tous les points étudiés ici, à savoir la modélisation, la commande, l'observation et les systèmes interconnectés. Pour cela un banc d'essais est actuellement en construction à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Systèmes Industriels Avancées (INPG, Valence).
- ❑ Il serait aussi important, pour avoir une idée plus précise des performances de la commande obtenue, de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux issus d'autres types de commandes développés par d'autres auteurs, comme par exemple un PID, retour d'état linéaire, ou une commande optimale, etc. De plus il est envisageable d'utiliser les Benchmarks de l'ASCE pour avoir un meilleur point de vue sur cette comparaison.
- ❑ Les simulations ont montré que les commandes et l'observateur obtenus étaient robustes vis-à-vis du modèle utilisé, mais aucune étude théorique a été réalisée à ce sujet. Il serait donc intéressant de réaliser une étude théorique de robustesse plus complète, en prenant par exemple des modèles plus précis tels que la collocation à 5 points ou plus, et/ou avec l'ajout d'incertitudes paramétriques sur des variables telles que le frottement, etc.

- ❑ De même l'observateur a été développé en se basant sur des travaux existants sur l'analyse de sa stabilité, mais il serait intéressant de réaliser une étude théorique plus rigoureuse de sa stabilité et surtout de la stabilité du couplage observateur-commande dans le cas précis étudié ici.
- ❑ Un autre point important à rappeler est que cette thèse a été réalisée sur la base de modèles d'un canal de section rectangulaire, il serait donc intéressant d'étendre des résultats à des canaux de section de géométrie différente, par exemple trapézoïdale qui est la plus utilisée dans les systèmes d'irrigation.
- ❑ Finalement le point offrant le plus de perspectives est l'étude de la commande de biefs interconnectés. Il serait d'un côté intéressant de pouvoir faire une étude plus complète de la méthode testée ici pour la commande de ce type de systèmes, cela en faisant une étude de stabilité non linéaire par exemple. Cette étude a bien été essayée dans cette thèse, mais aucun résultat n'a pu être obtenu jusqu'à présent. Il serait aussi important d'étendre l'étude faite pour une des configurations possibles à un cas plus général pour une configuration quelconque.
- ❑ Une autre voie dans l'étude de biefs interconnectés serait le développement d'un autre type de commande pour un bief qui puisse être appliqué directement à un système interconnecté, sans l'artifice de la pondération utilisé ici. Et finalement il est aussi envisageable de développer directement des lois de commande pour un système interconnecté particulier, option qui semble être la plus complexe.

Bien sûr les perspectives énoncés ci-dessus sont seulement les conséquences de l'utilisation du modèle obtenu par collocation, sachant qu'en dehors de ce contexte il existe encore une infinité d'études et développements imaginables pour la commande d'un canal d'irrigation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Akouz K., Benhammou A., Malaterre P.O. et Dahhou B.** *Predictive control of an irrigation channel*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [2] **Alam M.M. et Bhuiyan M.A.** *Collocation finite-element simulation of dambreak flows*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 118-127, 1995.
- [3] **Ankum P.** *Classification of flow control systems for irrigation*. Colloque "Advances in Planning, design and Management of Irrigation Systems as Related to Sustainable Land Use", édité par feyen et al., p 265-274, Louvain, Septembre 1992.
- [4] **Balogun O.S.** *Design of real time feedback control for canal systems using linear quadratic regulator theory*. Ph.D. dissertation, University of California Davis, 1985.
- [5] **Balogun O.S., Hubbard M. et DeVries J.J.** *Automatic control of canal flow using linear quadratic regulator theory*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 75-102, 1988.
- [6] **Baume J.P. et Malaterre P.O.** *SIC. Simulation des canaux d'irrigation. Vol II guide théorique* CEMAGREF. Division Irrigation, Novembre, 1997.
- [7] **Beaume J.P., Sally H., Malaterre P.O. et Rey J.** *Development and field-installation of a mathematical simulation model in support of irrigation canal management*. Document de recherche du IIMI et Cemagref, 1993.
- [8] **Besançon G., Dulhoste J-F et Georges D.** *A Non-linear backstepping like controller for a three-point collocation model of water flow dynamics*. IEEE Conference on Control Applications, CCA2001, Mexico, 2001.
- [9] **Bornard G. et Hammouri H.** *A high gain observer for a class of uniformly observable system*. IEEE CDC Conf. Brighton, England. 1991.
- [10] **Bounit H., Hammouri H. et Sau J.** *Regulation of an irrigation canal through the semigroup approach*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [11] **Bozakov P., Laycock A.** *The Pehur high level canal – first steps toward automation of Pakistan's canal system*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.

- [12] **Burt C.M.** *Regulation of sloping canal by automatic downstream control*. Ph.D. dissertation, Dept of Ag. Engineering, Utah state university, 1983.
- [13] **Buyalski C.P.** *Canal systems automation manual, Volume 1*. A Water Resources Technical publication, U.S. Department of Interior, Bureau of reclamation, Denver Office, 113p, 1991.
- [14] **Cardona J., Gomez M. et Rodellar J.** *A decentralized adaptive predictive controller for irrigation canals*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [15] **Cemagref.** *Régulation et gestion des canaux à surface libre. Inventaire des canaux d'irrigation à surface libre dans le sud de la France. Enquete et étude des pratiques de régulation et des performances des canaux a but agricole*. Rapport DERF, Cemagref - Ministère de l'Agriculture et de la Pêche, 1997.
- [16] **Chen M-L.** *Commandes optimale et robuste des équations aux dérivées partielles régissant le comportement des systèmes hydrauliques à surface libre*. Thèse de Doctorat de l'INPG, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, juillet 2001.
- [17] **Chen M-L. et Georges D.** *Nonlinear closed-loop robust control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model*. European Control Conference, ECC'01, Porto, Portugal, September 2001.
- [18] **Chen M-L. et Georges D.** *Nonlinear robust control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model*. IFAC Conference on Control Application of Optimization, Saint-Petersburg, Russia , vol.2, pp.16-21, 2000(a).
- [19] **Chen M-L. et Georges D.** *Discrete-time nonlinear optimal control of an open-channel hydraulic*. IFAC Conference Control System Design, Bratislava, Slovak, pp.82-87, 2000(b).
- [20] **Chen M-L. et Georges D.** *Nonlinear optimal control of an open-channel hydraulic system based on an infinite-dimensional model*. The 38ème IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, USA, pp. 4313-4318, 1999.
- [21] **Chentouf B., Xu C.Z., Malaterre P.O. et Sallet G.** *Etude des régulateurs PI stabilisants pour un système hydraulique de dimension infinie*. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Lille, Juillet, 2000.
- [22] **Chevereau G.** *Contribution à l'étude de la régulation dans les systèmes hydrauliques à surface libre*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.
- [23] **Collatz L.** *The numerical treatment of differential equations*. Springer-Verlag, Berlin 1960.
- [24] **Colley R.L. et Moin S.A.** *Finite element solution of Saint-Venant equations*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 102, No. HY6, pp. 759-775, 1976.

-
- [25] **Compas J-M., Pages J-C.** *Regulation by predictive control and embedded knowledge based models*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [26] **Corriga G., Giua A. et Usai G.** *PETRI net modeling of irrigation canal networks*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [27] **Corriga G., Sanna S. et Usai G.** *Sub-optimal constant volume control for open channel networks*. Appl. Math. Modelling, Vol.7, pp. 262-267, 1983.
- [28] **Coron J.M., D'Andrea-Novel B. et Bastin G.** *A Lyapunov approach to control irrigation canals modelled by Saint-Venant equations*. European Control Conference ECC'99, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [29] **Cunge J. A.** *Etude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement*. Thèse de la Faculté de Sciences de Grenoble, 116p, 1966.
- [30] **Cunge J.A., Holly F.M. et Verwey A.** *Practical aspects of computational river hydraulics*, Pitman ADVANCED Publishing Program, 420p, 1980.
- [31] **Deltour J-L.** *La régulation des systèmes d'irrigation*. DEA, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, 1988.
- [32] **Deltour J-L.** *Application de l'automatique numérique à la régulation des canaux; Proposition d'une méthodologie d'étude*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 153p, 1992.
- [33] **Dochain D., Babary J.P. et Tali-Maamar N.** *Modeling and adaptative control of nonlinear distributed parameter bioreactor via orthogonal collocation*. Automatica, Vol. 28, No. 5, pp. 873-883, 1992.
- [34] **Dulhoste J-F., Besançon G. et Georges D.** *Non-linear Control of Water Flow Dynamics by Input-Output Linearization based on a Collocation Method Model*. European Control Conference (ECC2001), Porto, Portugal, September 2001.
- [35] **Dumur D., Libaux A. et Boucher P.** *Robust RST control for «Basse-Isère» run-of-river cascaded hydro-electric plants*. European Control Conference (ECC01). Porto, Portugal, September, 2001.
- [36] **El Fawal H.** *Modélisation et gestion optimale d'un système d'irrigation complexe : Le canal de La Bourne*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble. France, 1999.
-

- [37] **El Fawal H. et Georges D.** *Modelling and identification of the « Canal de la Bourne » irrigation system. Application to a predictive control strategy.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [38] **Fletcher C.A.J.** *Computational Galerkin methods.* Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, 1984.
- [39] **Fortin A.** *Analyse numérique pour ingénieurs.* Ed. de l'école polytechnique de Montréal, 1995.
- [40] **Fox R. et McDonald A.** *Introducción a la mecánica de fluidos.* Prentice Hall, 1984.
- [41] **Framji K.K., Verdier J.** *Etat de l'art n°1: Irrigation, drainage et maitrise des crues.* Chapitre 9: L'automatique dans l'irrigation, p 459-578, ICID, New Delhi, 1978.
- [42] **Garcia A.** *Control and regulation of open channel flow.* Master of Science, University of California, Davis, 1988.
- [43] **Garcia A., Hubbard M. et DeVries J. J.** *Open channel transient flow control by discrete time LQR methods.* Automatica, Vol. 28, No. 2, pp. 255-264, 1992.
- [44] **Gauthier JP., Hammouri H. and Othman S.** *A simple observer for nonlinear systems – Application to bioreactors.* IEEE Transactions on automatic control, 37, pp. 875-880, 1992.
- [45] **Gennadii E.G., Atanor A. et Work P.A.** *Variational problem of water-level stabilization in open channel.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 124, No. 1, pp. 50-54, 1998.
- [46] **Georgakis C., Aris R. et Amundson N.R.** *Studies in the control of tubular reactors I (general considerations).* Chemical Engineering Science, Vol. 32, pp. 1359-1369, Pergamon Press LTD, Oxford, 1977.
- [47] **Georges D., Dulhoste J-F. et Besançon G.** *Modelling and control of water flow dynamics via a collocation model.* MTNS2000. Perpignan, France, 2000.
- [48] **Graf W.H. et Altinakar.** *Hydraulique Fluviale, Tome I: Ecoulement permanent uniforme et non uniforme.* Collection traitée de génie civil. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Presses polytechniques et universitaires Romandes, 1993.
- [49] **Graf W.H. et Altinakar.** *Hydraulique Fluviale, Tome II: Ecoulement non permanent et phénomènes de transport.* Collection traitée de génie civil. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Presses polytechniques et universitaires Romandes, 1996.
- [50] **Goussard J.** *L'automatisation des réseaux d'irrigation en canaux.* Comision Internationale des Irrigations et du Drainage, Groupe de travail sur la Construction, la Réhabilitation et la Modernisation des projets d'Irrigation, 103p, 1993.

- [51] **Hansen R. D. et Pugh C. A.** *Low-cost solar –power canal automation : Utah’s experience.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [52] **Henderson F.M.** *Open Channel Flow.* MacMillan, 1989.
- [53] **Hubbard M., DeVries J.J. et Balogun O.S.** *Feedback control of open channel flow with guaranteed stability.* AIRH-Congres-IARH, Lausanne, pp. 408-413, 1987.
- [54] **Isidori A.** *Non linear control systems.* Springer Verlag Berlin, 3re edition, 1995.
- [55] **Katapodes N.D.** *A dissipative Galerkin scheme for open channel.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450-466, 1984.
- [56] **Keuning D. H.** *Application of finite element method to open channel flow.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 102, No. HY4, pp. 459-468, 1976.
- [57] **Khaladi A.** *Gestion automatique des transferts d’eau en réseaux hydrauliques maillés a surface libre : application au réseau de Waterings.* Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 1992.
- [58] **Khalil H.K.** *Nonlinear systems.* Second édition, Prentice-Hall, Inc. 1996.
- [59] **Kosuth P.** *Techniques de régulation automatique des systèmes complexes : application aux systèmes hydrauliques a surface libre.* Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse. Cemagref-LAAS-CNRS, 330p, 1994.
- [60] **Krstic M., Kanellakopoulos I, et Kokotovic P.** *Nonlinear and Adaptive Control Design,* Wiley Interscience", 1995.
- [61] **Lefèvre L., Dochain D., Feye de Azevedo S. et Magnus A.** *Analysis of the orthogonal collocation method when applied to the numerical integration of chemical reactor models,* Computers and Chemical Engineering, 24 (12), pp.2571-2588, 2000.
- [62] **Liggett J. et Cunge J.** *Numerical methods of solution of the unsteady flow equations.* In "Unsteady flow in open channels"; K. Mahmood et al (Ed.) Water Res. Publ., Fort Collins, CO, USA. 1975.
- [63] **Lin Z. et Manz D.H.** *Optimal operation of irrigation canal system using nonlinear programming - dynamic simulation model.* Cemagref-IIMI International Workshop, Montpellier, Octobre 1992.
- [64] **Linkens D.A. et Manfouf M.** *Generalized predictive control with feedforward (GPCF) for multivariable anaesthesia.* Int. J. Control, vol 56, n° 5, 1992.

- [65] **Littrico X.** *Modélisation, identification et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre.* Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts, Centre de Montpellier, 1999.
- [66] **Litrico X., Georges, D.** *Robust optimal control of a dam-river system with intermediate measurements.* European Control Conference ECC'99, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [67] **Litrico X., Georges, D.** *Non linear identification of an irrigation system with withdrawals.* International workshop on regulation of irrigation canals: State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [68] **Liu F. Feyen J. et Berlamont J.** *Computational method for regulating unsteady flow in open channels.* Journal of irrigation and Drainage Engineering. Vol 118, n° 10, pp674-689, 1992.
- [69] **Liu F. Feyen J. et Berlamont J.** *Downstream control algorithm for irrigation canals .* Journal of irrigation and Drainage Engineering. Vol 120, n° 3, pp 468-483, 1994.
- [70] **Liu F.** *Analysis of control algorithms for water delivery in irrigation canals based on hydrodynamic simulation.* Ph.D. thesis Katholieke Universiteit Leuren Belgium, 1995.
- [71] **Liu F., Chidzungu E. et Feyen J.** *A constant volume control method for open channel flow.* International workshop on regulation of irrigation canals: State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [72] **Malaterre P.O.** *Modelisation, analyse et commande LQG d'un canal d'irrigation.* Ph.D. Thesis LAAS-CNRS-ENGREF-Cemagref, ISBN 2-85362-368-8, 1994.
- [73] **Malaterre P.O.** *PILOTE: optimal control of irrigation canals.* First international conference on water resources engineering, San Antonio, USA, Août, 1995.
- [74] **Malaterre P-O. et Rodellar J.** *Multivariable predictive control of irrigation canals. Design and evaluation on a 2-pool model.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [75] **Malaterre P.O., Rogers D.C. et Schuurmans J.** *Classification of canal control algorithms.* Journal of irrigation and Drainage Engineering, 124(1): 3-10, 1998.
- [76] **Marzouki T.Z.** *Le système hydraulique de la rivière Larcis (barrages, rivière, périmètres irrigués). Modélisation hydraulique, analyse et amélioration de la gestion.* Cemagref, ENGREF, CARA, 1989.
- [77] **Michelsen M.L. et Villadsen J.** *A convenient computational procedure for collocation constants.* Chemical Engineering Journal, No. 4, pp. 64-68, 1972.
- [78] **Onikuza K. et Nii Odai S.** *Burgers' Equation Model for Unsteady Flow in Open Channels.* Journal of Hydraulic Engineering, ASCE Division, Vol 24, N° 5, 1998.

- [79] **Parent E.** *Elaboration des consignes de gestion des barrages réservoirs*. Thèse de doctorat, ENPC - CERGRENE, 1991.
- [80] **Parrish J.** *Automation of sloping canals utilizing a pool-volume, pool-inflow control hierarchy*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [81] **Plusquellec H.** *Improving the operation of canal irrigation systems. An audiovisual production*. The economic Development Institute and the Agriculture and Rural Development Department of the World Bank, 1988.
- [82] **Preissmann A.** *Difficultés rencontrées dans le calcul des ondes de translation à front raide*. 11^{ème} congrès IAHR, Leningrad, Vol 3, 1965.
- [83] **Rappaz J. et Picasso M.** *Introduction a l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires Romandes, 1998.
- [84] **Reddy J.M.** *Design of global control algorithm for irrigation canals*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 122, No. 9, pp. 503-551, 1996.
- [85] **Reddy J.M.** *Controlled-volume regulation of irrigation canals*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [86] **Reddy J.M., Dia A. et Oussou A.** *Design of control algorithm for irrigation canals*. Journal of Irrigation and Drain Engineering. Division ASCE, Vol. 118, No. 6, pp. 852-867, 1992.
- [87] **Rodellar J., Gomez M. et Bonet L.** *Control method for on demand operation of open channel flow*. Journal of Irrigation and Drain Engineering. Division ASCE, Vol. 119, No. 2, pp. 225-241, 1993.
- [88] **Rogers D. C.** *Automatic control on the Dolores project. Development and implementation*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [89] **Roux A.** *Gestion des étiages de rivière par les méthodes de l'automatique. Application à la rivière Drop*. Cemagref, ENITRTS, 1992.
- [90] **Ruiz V. Guiterres C. et De Leon B.** *Modernizacion of the main water distribution network of the Begoña district, Mexico*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [91] **Sabet M.H., Coe J.Q., Ramirez H.M. et Ford D.T.** *Optimal operation of California Aqueduct*. Journal of Water Resources Planning and Management, Vol 111, n° 2, pp 222-237, 1985.

- [92] **Saint-Venant (de) Barré A. J. C.** *Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit.* Académie de Sciences de Paris, Comptes rendus V. 73, p 148-154, 237-240, 1871.
- [93] **Sanfilipo F.** *Application du régulateur PIR au cas des canaux a forte pente.* DEA de l'Université Claude Bernard, Lyon, 1993.
- [94] **Sawadogo S.** *Modélisation, commande prédictive et supervision d'un système d'irrigation.* Rapport de thèse Université Paul Sabatier, Toulouse. N° 1161,0155p, rapport LAAS N° 92141, Avril, 1992.
- [95] **Sawadogo S., Malaterre, P.O. et Kosuth, P.** *Multivariable optimal control for on demand operation of irrigation canals.* International journal of system science, Vol. 26, No. 1, pp. 161-178, 1995.
- [96] **Sawadogo S., Malaterre P-O., Niang A. et Faye R.** *Multivariable generalized Predictive control with feedforward for on-demand operation of irrigation canals.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [97] **Schuurmanns J.** *Robust decentralised control of open channels. I : Modeling.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997(a).
- [98] **Schuurmanns J.** *Robust decentralised control of open channels. II : Control design.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997(b).
- [99] **Schuurmanns J.** *Controller design for a Regional Downstream Controlled Canal.* Delf University of technology, Laboratory for Measurement and Control , 1992.
- [100] **Seatzu C.** *Design of decentralized constant-volume controllers for open-channels by solving a least squares problem.* International journal of System Science, 31 (6), pages 750-770, 2000.
- [101] **Skertchly M., L. et Miles, J.P.** *Control of an irrigation canal.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 122, No. 7, pp. 403-410, 1996.
- [102] **Soeterboek R.** *Predictive control: a unified approach.* PhD dissertation, Delf University of Technology, 1990.
- [103] **Strelkoff T.** *Numerical solution of Saint-Venant equation.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 96, No. HY1, pp. 223-252, 1970.

- [104] **Stringam B.L. et Merkley G.P.** *Fuzzy controller simulation for local downstream water level control in canals*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [105] **Tardieu H.** *Automatic dam management and river regulation for irrigation purposes*. Irrigation and drainage systems, (2) : 53-61, 1988.
- [106] **Teel A. et Praly L.** *Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback*. Systems and Control Letters, 22, PP. 313-325, 1994.
- [107] **Théodor R.** *Initiation à l'analyse numérique*. Masson 1994.
- [108] **Tomicic B.** *A general optimization module for real-time control of surface water resources*. Master of Science. The International Institute for Hydraulic and Environmental Engineering, Delf University, 1989.
- [109] **Villadsen J.V., et Michelsen M.L.** *Solution of differential equations models by polynomial approximation*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- [110] **Villadsen J.V. et Stewart W.E.** *Solution of boundary-value problems by orthogonal collocation*. Chemical Engineering Science, Vol. 22, pp. 1483-1501, Pergamon Press LTD, Oxford, 1967.
- [111] **Voron B. et Bouillot A.P.** *Application of the fuzzy set theory to the control of large canals*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [112] **Xu C.Z. et Sallet G.** *Proportional and integral régulation of irrigation canal systems governed by the Saint-Venant equation*. Proceedings of the 14-th World Control Congress, Beijing, 1999.
- [113] **Zihui L. et Manz D.H.** *Optimal operation of irrigation canal systems using nonlinear programming - dynamic simulation model*. Cemagref-IIMI International Workshop, Montpellier, Octobre 1992.
- [114] **Zimbelman D.D.** *Planning, operation, rehabilitation and automation of irrigation water delivery systems*. Proceedings of a symposium ASCE, Portland, USA, July 1987.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

- [115] **A.G.H.T.M.** *Les stations de pompage d'eau*. Lavoisier Tec. & Doc. 1991.
- [116] **Abbott M.B.** *Computational hydraulics: elements of the theory of free surface flood*. Pitman, London. 1979.
- [117] **Akouz K.** *Modélisation et commande d'un canal d'irrigation*. Rapport de thèse FSSM. Faculté de Sciences Semalia. Université Cadi Ayyad Marrakesh Morocco, Juin 1997.
- [118] **Ayres F.** *Equations différentielles*. 1993.
- [119] **Baume J-P.** *Régulation des canaux d'irrigation : Etude de sous système bief avec vanne*. CEMAGREF ENGREF, DE National d'Hydrologie de l'USTL Montpellier. 1990.
- [120] **Baume J.P. et Sau J.** *Study of irrigation canal dynamics for control purpose*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [121] **Bonnet B., Dochain D. et Steyer J.P.** *Modélisation d'un digesteur anaérobie à lit fluidisé*. Journées des thésards sur l'automatique et l'environnement Narbonne, 17 mars 1995.
- [122] **Boyanov B.** *Analytical description and study of the dynamic behaviour of a downstream level stabilization system with AVIO (AVIS) regulatory gates*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [123] **Brière F.G.** *Distribution et collecte des eaux*. Editions de l'école polytechnique de Montreal, 1991.
- [124] **Bronson R.** *Equations différentielles, méthodes et applications*. SHAUM, 1994
- [125] **Chaudry M.H.** *Open channel flow*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1993.
- [126] **Chen Y.H.**, *Water and sediment Routing in Rivers, in Modeling of rivers*. Ed ; By H.W.Shen, John Wiley and Sons, Inc. pp. 10.1-10.97, 1979
- [127] **Chevereau G., Leblond B. et Ghali A.** *Analysis of the control problems in an existing network :the Moulouya irrigation scheme in Morocco*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [128] **Chow V.T.** *Open Channel Hydraulics*. McGraw Hill Book Co. Inc. New York, 1988.

- [129] **Clemens A., Bautista E., Gooch R. et Strand R.** *Salt River project canal automation pilot project*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [130] **Clemens A.J., Kacerek T.F., Grawitz B. et Schuurmans.** *Test cases for canal control algorithms*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE Division, 124(1), 1998.
- [131] **Clemens A.J. et Reploge, J. A.** *Control of irrigation canal networks*. Journal of Irrigation and Drain Engineering. Division ASCE, Vol. 115, No. 1, pp. 96-10, 1989.
- [132] **Cohen G. et Li, Zhu Dao** *Decomposition coordination methods in large-scale optimization problems: the non differentiable case and the use of augmented Lagrangians*. Advances in large-scale systems, Vol. 1, pp. 203-266, 1984.
- [133] **Comolet R.** *Mécanique expérimentale des fluides. Tome I: statique et dynamique des fluides non visqueux* Masson, 1979.
- [134] **Compas J-M.** *River development schemes regulation by predictive control*. Compagnie nationale du Rhône; ASCE meeting at Aix en Provence, France, 10p, Octobre, 1994.
- [135] **Corriga G., Sanna S. et Usai G.** *Suboptimal level control of open channel*. Proceedings international AMSE Conference Modeling & Simulation Vol.2, pp. 67-72, 1982.
- [136] **Corriga G., Fanni A., Sanna S. et Usai G.** *A constant volume control method for open channel operation*. International journal of Modelling & Simulation, Vol. 2, No. 2, pp. 108-112, 1982
- [137] **Cremer M. et Yu J.S.** *A dynamic model for the transportation of pollution loads in harbour channel networks*. AIPAC, pp. 320-324, 1989
- [138] **Demailly J.P.** *Analyse numérique, équations différentielles*. 1991
- [139] **El Hallani E. H., El Amghari M. et Coeuret C.** *Dynamic regulation on Rode canal and N'Fis canal. Ten years report and on-going developments*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [140] **Erlich M. et LeFrancois O.** *Automatic control in canal regulation, analysis of some pitfalls*. AIRH-Congres-IARH, Lausanne, pp. 402-407, 1987.
- [141] **Faye R., Mora Camino F. et Achaibou A.** *Adaptive optimization approach for the supervision of an irrigation system*. IFAC/IFIP Conference on Management and Control of Production and Logistics, Campinas (Brésil), pp.175-180 Rapport LAAS No97336,31 Août 3 Septembre 1997.
- [142] **Faye R., Mora Camino F. et Achaibou A.** *The contribution of intelligent systems to water resource management and control*. Journées Hispano-Françaises "Systèmes Intelligents et Contrôle Avancé", Barcelone (Espagne), 7p. Rapport LAAS No96458,12-13 Novembre, 1996.

- [143] **Faye R., Mora Camino F. et Sawadogo S.** *An intelligent decision support system for irrigation system management.* IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'98), San Diego (USA), Rapport LAAS No98383, Octobre, 1998.
- [144] **Faye R., Mora Camino F. Achaibou A. et Pereira A.L.** *A knowledge based approach for the supervision of an irrigation system.* Rapport LAAS N°98032, 10p., Janvier, 1998.
- [145] **Filiporia V. et Milosevic Z.** *DYN² method for optimal control water flow in open channels.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 115, No. 6, pp. 973-981, 1988.
- [146] **Franke C. et Schaback R.** *Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions.* Applied mathematical and computation (93) 1 pp 73- 82, 1998.
- [147] **Gates T.K. et Al-Zahrani A.** *Statiotemporal stochastic open-channel flow I: Model and its parameter data.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 122, No. 11, pp. 641-651, 1996.
- [148] **Gates T.K. et Al-Zahrani A.** *Statiotemporal stochastic open-channel flow II: Simulation Experiments.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 122, No. 11, pp. 652-661, 1996.
- [149] **Georges D.** *Non linear model identification and state observers design for water distribution systems.* Control 94, pp. 21-24, Conference publication No. 389, IEE, Mars, 1994.
- [150] **Georges D.** *Solution of non linear optimal regulator and $H\infty$ control problems via Galerkin methods.* European Journal of Control, Vol 2, 1996.
- [151] **Graf W.H. et Altinakar.** *Hydrodynamique.* Eyrolles, Paris, France, 1991
- [152] **Guo L., Schone A. et Ding X.** *Control of hydraulic rotary multi-moter systems based on bilinearization.* Automatica, Vol. 30, No. 9, pp. 1445-1450, 1994.
- [153] **Hariri A.** *Modélisation et commande optimale de processus hyperboliques. Application aux processus thermiques à contre courant.* Thèse de doctorat LAAS N° 85125 Université Paul Sabatier, Toulouse France, 1985.
- [154] **Herrero M.A. et Zuazua E.** *Recent advances in partial differential equations.* J. Willey, Masson, 1994.
- [155] **Holden A.P. et Stephenson D.** *Finite difference formulations of kinematic equations.* Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 121, No. 5, pp. 423-425, 1995.
- [156] **Hug M.** *Mécanique des fluides appliquée.* Eyrolles Paris, 1975.

- [157] **Jehanno P., Bernard P. et Odeyer C.** *New esna barrage (Egypt) water level regulation system*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [158] **Kosut P., Hurand P. and Trouvat J-L.** *Automatic control of river flows : complex architectures with intermediate flow measurement and controller robustness facing varying time delays*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [159] **Kotar Onizuka et Samuel Nii Oda** *Burger's equation model for unsteady flow in open channels*. ASCE. Journal of hydraulic engineering. Vol. 124 n°5 pp. 509-512, 1998.
- [160] **Kuper M., Litrico X. et Habib Z.** *Analysing the impact of alternative operational rules on water distribution*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [161] **Kwasniok A.** *Optimal Galerkin approximations of partial differential equations using principal interactions patterns*. Physical review. E vol 55 n° 5, 1997.
- [162] **Lapidus L. et Pinder G. F.** *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*. John Wiley and sons. INC., 1982.
- [163] **Larendhomme R.** *Analyse infinitésimale : base du calcul différentiel et équations différentielles*. 1993
- [164] **Le Pourhiet A.** *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Une première approche*. Collection La Recherche. Cepadues éditions Toulouse, 1988.
- [165] **Liu F., Malaterre P.O., Baume J.P., Kosuth P. et Feyen J.** *Evaluation of a canal automation algorithm CLIS*. First international conference on water resources engineering, San Antonio, USA, 5 p., Août, 1995.
- [166] **Liu F., Sujamoko et Feyen J.** *Robust analysis of canal automation algorithm CLIS*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [167] **MacDonald I., Baines M.J., Nichols N.K. et Samuels P.G.** *Analytic benchmark solutions for open-channel flows*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 123, No. 11, pp. 403-410, 1997.
- [168] **Malaterre P.O.** *La régulation des canaux d'irrigation: caractérisation et classification*. Journal la Houille Blanche, Vol. 5/6, pp. 17-35, 1995.

- [169] **Malaterre P.O. et Baume J.P.** *SIC 3.0, a simulation model for canal automation design*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [170] **Meslehe E.A. et Holly F.M.** *Numerical simulation of transcritical flow in open channels*. Journal of Hydraulical Engineering. Division ASCE, Vol. 123, No. 9, pp. 774-782, 1997.
- [171] **Morton K.W. et Parrott A.K.** *Generalized Galerkin methods for first order hyperbolic equations*. Journal of computational physics, No. 36, pp. 249-270, 1980.
- [172] **Ouziaux R. et Perrier J.** *Mécanique des fluides appliqués*. Dunod Université, 1978.
- [173] **Padet J.** *Fluides en écoulement*. Masson Paris France, 1991.
- [174] **Pages J-C., Compas J-M. et Sau J.** *Predictive control based coordinated operation of a series of river developments*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [175] **Pedroza E. et Garcia N.** *Two applications of an irrigation canal simulator : the automation Yaqui's canal, and the operations problems of the Main Humaya canal*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [176] **Quevedo J., Cortina J. A.** *Laboratory process for assessment of irrigation control algorithm*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [177] **Ramirez-Luna J., Sau J., Marquet O. Baume J-P. et Teboul E.** *A numerical analysis of dynamic behavior of the self-leveling (GEC ALSTHOM) gates: AMIL & AVIO (AVIS)*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [178] **Ramirez-Luna J., Sau J., Marquet O. Baume J-P. et Teboul E.** *A numerical analysis of dynamic behavior of the self-leveling (GEC ALSTHOM) gate: MIXTE*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [179] **Rao G. H.V. et Misra R.** *How effective are the canal control methodologies*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [180] **Reddy J.M.** *Kalman filtering in the control irrigation canals*. Int. Journal application math modeling, Vol; 19, no; 4, pp; 201-209, 1995.

- [181] **Reddy J.M.** *Local optimal control of irrigation canals*. Journal of Irrigation and Drain Engineering, Division ASCE, Vol. 116, No. 5, pp. 661-631, 1990.
- [182] **Romieu P. Roult D.** *The CRUE software : a knowledge based embedded model and tool-kit for hydraulic designs and regulation*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [183] **Rousset P., Brelle F., Deltour J-L. et Grawitz B.** *Control of canals and operation of open-channel irrigation networks*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [184] **Sanfilippo F. et Sau J.** *Application of the automatic multivariable to canal control*. International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [185] **Sawadogo S., Achaïbou A.K. et Aguilar-Martin J.** *An application of adaptative predictive control to water distribution systems*. IFAC, ITAC, Singapore, 6 p. 1991.
- [186] **Sawadogo S., Achaïbou A.K. et Aguilar-Martin, J.** *Long range predictive control of an hydraulic system*. CEMAGREF-IIMI workshop, 9 p. 1992.
- [187] **Sawadogo S., Achaïbou A.K., Aguilar-Martin J. et Moracauine F.** *Intelligent control of large water distribution systems: a two level approach*. SICICI 92, Singapore, Proceedings, pp. 1085-1089, 1992.
- [188] **Sawadogo S., Faye R., Malaterre, P.O. et Mora Camino F.** *Decentralized predictive controller for delivery canals*. IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'98), San Diego (USA), 11-14, pp.3880-3884 Rapport LAAS No98406, Octobre, 1998.
- [189] **Schuermans J., Bosgra O.H. et Borouwer R.** *Open-channel flow model approximation for controller design*. Applied mathematical modelling (19) 9 pp. 525-530, 1995.
- [190] **Sinha J., Eswaran V. et Bhallamudi S.M.** *Comparison of spectral finite-difference methods for flood routing*. Journal of Hydraulical Engineering, Division ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 108-117, 1995.
- [191] **Sinninger R. et Hager W.** *Constructions hydrauliques*. Collection traitée de génie civil. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Presses polytechniques et universitaires Romandes. 1989.
- [192] **Skertchly M., L.** *Automatización del canal Alto*. REP. AM 9105 Instituto Mexicano de tecnologia del agua, Cuernavaca, Mor, Mexico, 1991.
- [193] **Skertchly M., L. et Miles J.P.** *CAD method for analysis and controller design of irrigation canals, (water resources and distribution)*. Hydraulic engineering software V, Vol. 1, W.R. Blain & K.L. Katsifarakis, computational Mechanics Publ. Boston Mass., pp. 89-96, 1994.

- [194] **Sloan G.** *Evolution from manual control to remote canal control.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [195] **Strelkoff T.** *One dimensional equation of open channel flow.* Journal of Hydraulical Engineering, Division ASCE, Vol. 95, No. HY3, pp. 861-876, 1969.
- [196] **Stringam B.L. et Merkley G.P.** *Field application of a fuzzy controller for an irrigation canal in Roosevelt Utah.* International workshop on regulation of irrigation canals : State of the art of research and applications. Marrakech, Morocco, 1997.
- [197] **Vasilyev O.V. et Paolucci S.** *A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in finite domain.* Journal of Computational Physics vol 125 pp 498-512, 1996.
- [198] **Vasilyev O.V., Paolucci S. et Sen M.** *A multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain.* Journal of Computational Physics vol. 120 pp. 33-47, 1995
- [199] **Villadsen J. et Sorensen J.P.** *Solution of parabolic partial differential equations by double collocation method.* Chemical Engineering Science, Vol. 24, pp. 1337-1349, Pergamon Press LTD, Oxford, 1969.
- [200] **Wysocki M.** *Application of orthogonal collocation to simulation and control of first order hyperbolic systems.* Math and comp. In simulation 25, pp ; 335-345, 1983.
- [201] **Xu C.Z. et Feng D.X.** *Symetric hyperbolic systems and application to exponential stability of heat exchangers and irrigation canals.* Proceedings of the MTNS'2000, Perpignan, 2000.
- [202] **Ziimbelman D.D. et Bedworth, D.D.** *Computer control for irrigation canal systems.* Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Division ASCE, Vol. 109, No. 1, pp. 43-59, 1983.

Contribution à la Commande Non Linéaire de Systèmes d'Irrigation

Résumé

Ce rapport de thèse a pour but de résumer le travail de recherche sur la commande non linéaire de canaux à surface libre, basé sur un modèle de dimension finie, obtenu par une méthode de collocation orthogonale.

Il est divisé en trois grandes parties. Une première partie présente les systèmes de distribution d'eau en général, ainsi que quelques notions d'automatisation et un état de l'art sur le sujet.

La deuxième partie présente la modélisation de biefs de canaux ouverts par les équations de Saint-Venant, ainsi que trois méthodes d'intégration numérique de ces équations. Les méthodes présentées sont deux méthodes de différences finies, une explicite et une autre implicite dite de Preissmann, et une troisième est la méthode de collocation orthogonale, utilisée par la suite pour la commande.

La troisième partie est dédiée au développement de lois de commande non linéaires pour le modèle de canal à surface libre obtenu par la méthode de collocation orthogonale. Trois méthodes sont utilisées ici pour la commande : linéarisation entrée-sortie, linéarisation entrée-sortie dynamique et backstepping. De plus afin de s'affranchir de la nécessité de mesurer tous les états, un observateur de débit et infiltration a été développé. Enfin, quelques avancées sur la commande de biefs interconnectés sont présentés.

Mots clés

Hydraulique de canaux ouverts, méthodes de collocation, commande non linéaire, linéarisation entrée sortie, backstepping, observateurs non linéaires.

Contribution on Non Linear Control of Irrigation Systems

Abstract

This thesis report summarizes some research results about non linear control of open channel flow hydraulics, based on a finite dimensional model obtained by an orthogonal collocation method.

It is divided into three parts. The first part presents general characteristics of distribution water systems, some notions of automatization and a brief survey of the topic.

The second part focuses on the problem of modelling open channel reach by Saint-Venant equations, and three numerical resolution methods are reviewed. Two of them are based on finite differences, one explicit and one implicit named Preissmann scheme, and the third method corresponds to the orthogonal collocation. This last one is used afterwards for control purposes.

The third part is dedicated to the design of non linear control laws on the basis of the model obtained by the orthogonal collocation method. Three non linear control methods are used here: feedback linearisation, dynamic feedback linearisation and backstepping. Then in order to control without full state measurement, we develop a flow and infiltration observer. Finally we present some sketches of control of interconnected reaches.

Keywords

Open channel flow hydraulics, collocation method, non linear control, feedback linearisation, backstepping, non linear observers.

Spécialité : Automatique, Productique

Laboratoire d'Automatique de Grenoble. ENSIEG Rue de la Houille Blanche. B.P. 46.
38402 Saint Martin d'Hères Cedex. FRANCE