INTRODUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES

Cours 3. Représentation externe

INTRODUCTION
Il existe plusieurs manières de représenter les modèles mathématiques.
Pour un système linéaire invariant dans le temps (LTI), nous avons vu que le modèle de base correspond a une équation différentielle ordinaire, qui peu s'exprimer classiquement comme il suit :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{du}{dt} + b_n u \qquad n \geq m$$

Qui peut être exprimé aussi avec l'operateur mathématique D :

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = b_0 D^m u + b_1 D^{m-1} u + \cdots + b_{n-1} D u + b_n u$$

Ou en utilisant des points pour représenter les dérivées :

$$a_0 \overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{m}{u} + b_1 \overset{m-1}{u} + \cdots + n_{m-2} \ddot{u} + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

D'autres représentations se présentent aussi :

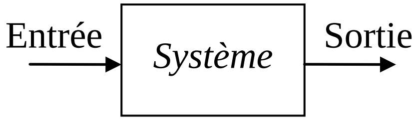
- Fonction ou matrice de transfert → l'automatique classique (représentation externe)
- Espace d´état → l'automatique moderne (représentation interne)

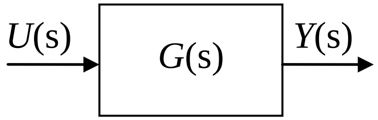
Les différences entre l´automatique moderne et classique peuvent se résumer a :

Automatique classique	**Automatique moderne**
Systèmes linéaires	Systèmes linéaires et non linéaires
Systèmes invariant dans le temps (LTI)	Variant ou invariant dans le temps
Une entrée une sortie (SISO)	Multiples entrées et sorties (MIMO)
Opération dans le domaine de la fréquence	Opération dans le domaine du temps.

LA REPRESENTATION EXTERNE.

La représentation externe est une représentation que permet d´utiliser seulement les informations entrées - sorties d´un système, pour définir le modèle mathématique. Les équations différentielles sont une représentation externe, mais la plus utilisée en automatique est la fonction de transfert ou matrice de transfert qui est une extension aux systèmes multivariables de la première. Il existe aussi d´autres représentations telles que la réponse impulsionnelle.





LA FONCTION DE TRANSFERT

Elle est définie pour les systèmes LTI comme la relation entre la transformé de Laplace de la sortie (fonction réponse) et la transformée de Laplace de l´entrée (fonction excitation), sous la supposition que toutes les conditions initiales sont égales a zéro.

$$G(s)=\left.\frac{\mathscr{L}(sortie)}{\mathscr{L}(entrée)}\right|_{CI=0}$$

Pour l´équation différentielle ordinaire de forme générale, tel quelle a été présenté auparavant, et en considérant que *u* est l´entrée et que *y* est la sortie on obtient:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Cette représentation permet de représenter des systèmes dynamiques avec des équations algébriques en *s*. la puissance plus élevé du dénominateur indique l'ordre du système *n*.

Exemple. Prenons le système mécanique étudié dans le chapitre précédant:

$$MD^2y + CDy + Ky = F$$

Ou y (déplacements) est la sortie, et F (force) est l´entrée (appelée de façon courante u).

La transformée de Laplace de chaque membre de l équation (avec les C.I.=0) est :

$$Ms^2Y(s) + CsY(s) + KY(s) = F(s)$$

Avec :

$$Y(s) = \mathscr{L}[x(t)]$$
$$F(s) = \mathscr{L}[F(t)]$$

La fonction de transfert est:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

Cette fonction exprime une relation entre la sortie et l’entrée:

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}F(s)$$

COMMENTAIRES AU SUJET DE LA FONCTION DE TRANSFERT (FT).

- La FT est un modèle mathématique car elle représente une relation entrée sortie du système.
- L'usage de la FT est limite à des systèmes d'équations différentielles linéaires invariants dans le temps (LTI), avec une seule entrée et une seule sortie (SISO).
- La FT est une propriété du système, elle est donc indépendante de la magnitude et nature de l´entrée.
- La FT prend en compte les unités de mesure nécessaire pour la relation entrée sortie, mais ne donne aucune information sur la structure physique du système (modèle externe). Des systèmes physiquement différents peuvent avoir la même fonction de transfert.
- La FT permet l'étude de la réponse du système à plusieurs types d'entrées.
- La FT peut s'obtenir de manière expérimentale en étudiant la réponse du système face a des entrées connues, se procédé est connue comme identification de systèmes.
- Une définition alternative pour la fonction de transfert est : La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

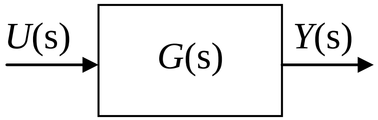
$G(s)$ et $g(t)$ contiennent la même information.

$$y(t) = g(t)u(t) \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

- modèle algébrique $G(s)$.
- modèle temporel $g(t)$.

FONCTION DE TRANSFERT ET REPONSE IMPULSIONNELLE.

Soit un système LTI, SISO soumis à une entrée $u(t)$ et donné par sa fonction de transfert $G(s)$.



Définition de la réponse impulsionnelle : Un système ayant pour fonction de transfert $G(s)$, a pour réponse impulsionnelle la fonction :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

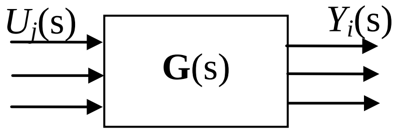
La réponse du système à une entrée quelconque $u(t)$ peut alors être calculée en utilisant le **théorème de convolution** :
La réponse d'un système de fonction de transfert $G(s)$ est donnée par l'intégrale de convolution suivante :

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Le produit de convolution est généralement noté $y(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

LA MATRICE DE TRANSFERT

Le concept de matrice de transfert est une extension à de systèmes MIMO de la fonction de transfert.



Définition de Matrice de transfert : la matrice $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}^{r\times m}$ est appelée matrice de transfert liant l'entrée $\mathbf{U}(s)$ a la sortie $\mathbf{Y}(s)$.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

Avec :

m : nombre d´entrées ; r : nombre de sorties

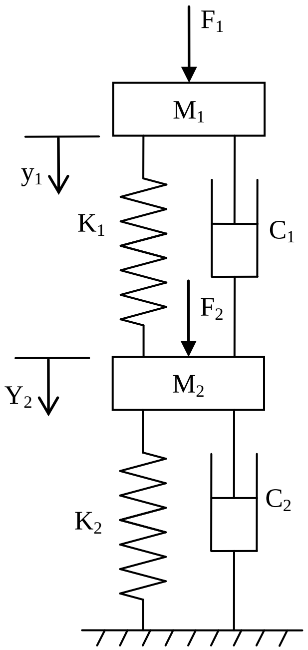
Ou en notation matricielle explicite par élément :

$$Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s)$$

On peu donc déterminer la i^{emme} sortie avec :

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(s)U_j(s)$$

Exemple : Soit les système mécanique MIMO avec deux entrées (F_1 et F_2) et deux sorties (y_1 et y_2):



Les équations du système sont :

$$F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1D(y_1 - y_2) = M_1D^2y_1$$
$$F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1D(y_1 - y_2) - K_2y_2 - C_2Dy_2 = M_2D^2y_2$$

La transformée de Laplace des sorties seront :

$$Y_2 = \frac{C_1s + K_1}{den}F_1 + \frac{M_1s^2 + C_1s + K_1}{den}F_2$$
$$Y_1 = \frac{M_2s^2 + (C_1 + C_2)s + K_1 + K_2}{den}F_1 + \frac{C_1s + K_1}{den}F_2$$

Avec :

$$\begin{aligned} den = {} & M_1M_2s^4 + (M_1(C_1 + C_2) + C_1M_2)s^3 + (M_1(K_1 + K_2) + C_1(C_1 + C_2) + K_1M_2 - C_1^2)s^2 \\ & + (C_1(K_1 + K_2) + K_1(C_1 + C_2) - 2C_1K_1)s + K_1(K_1 + K_2) - K_1^2 \end{aligned}$$

La matrice de transfert, qui détermine la relation $[Y_1 \quad Y_2] = [\mathbf{G}(s)]\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ est :

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{C_1s+K_1}{den} & \frac{M_1s^2+C_1s+K_1}{den} \\ \frac{M_2s^2+(C_1+C_2)s+K_1+K_2}{den} & \frac{C_1s+K_1}{den} \end{bmatrix}$$

POLES ET ZEROS D´UN SYSTEME LTI, SISO.

Les pôles et les zéros permettent la caractérisation dynamique d´un système.
Ils peuvent être définis à partir des modèles de transfert (plus simple pour les systèmes SISO) ou à partir des modèles d'état (plus aisée pour les systèmes MIMO).

Le Polynôme Caractéristique et les Pôles

Pour un système LTI le **polynôme caractéristique** π_s est défini comme le plus petit dénominateur commun de tous les mineurs possibles non identiquement nuls de $\mathbf{G}(s)$.
Dans le cas d´un système SISO, celui-ci correspond au dénominateur de la fonction de transfert.

L'**ordre du modèle** LTI est le degré le plus élevé du polynôme caractéristique. Il est aussi égal au nombre d'états du modèle n. Si le système est causal alors $n \geq m$. Pour $n = m$, le système est dit propre alors que pour $n > m$, il est dit strictement propre.

Les racines du polynôme caractéristique s_0 sont appelées les **pôles** du système. De plus, s_0 est un pôle de $\mathbf{G}(s)$ si s_0 est un pôle de l'un des éléments de $\mathbf{G}(s)$.

La multiplicité d'un pôle est généralement déterminée comme la multiplicité associée à son occurrence dans le polynôme caractéristique.
Les pôles d'un système réel sont nécessairement réels ou complexes conjugués.

Exemple 1:
Pour la fonction de transfert obtenu pour le système mécanique a une entrée :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\pi_s = Ms^2 + Cs + K$$

Les pôles seront donc les racines de ce polynôme :

$$s_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M}$$

Exemple 2 :
Pour la matrice de transfert :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est associé au plus petit commun dénominateur :

$$\pi_s = (s * 1)^2(s + 2) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

Les pôles seront donc les racines de ce polynôme :

$$s_1 = -1; s_2 = -1; s_3 = -2$$

Les zéros

Dans le cas où le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties (systèmes carrés).

Les zéros peuvent être caractérisés à l'aide de la matrice de transfert.

On définit pour cela le polynôme des zéros, $\pi_z(s)$ comme le plus grand commun diviseur des numérateurs des mineurs d'ordre maximum de $\mathbf{G}(s)$ normalisés pour avoir le polynôme caractéristique $\pi_s(s)$ comme dénominateur. Ce polynôme est donné par :

$$\frac{\pi_z(s)}{\pi_s(s)} = det\mathbf{G}(s)$$

Les zéros sont alors les racines de ce polynôme. z_0 est un zéro si : $\pi_z(z_0) = 0$

Exemple : On reprend le précédent exemple ou : $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

Ici il y a un mineur maximal d'ordre 2, qui s'écrit :

$$det\mathbf{G}(s) = \frac{2}{(s+1)}\frac{1}{(s+1)} - \frac{3}{(s+2)}\frac{1}{(s+1)} = \frac{-s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

Donc le polynôme des zéros est :

$$\pi_z(s) = -s + 1$$

Il existe un seul zéro : $z_0 = 1$

REMARQUE

Toutes ces définitions s'appliquent évidemment au cas plus simple des systèmes SISO pour lesquels $\mathbf{G}(s)$ devient une fraction rationnelle dont

- le numérateur est $\pi_z(s)$ et ses racines sont les zéros

- le dénominateur est $\pi_s(s)$ et ses racines sont les pôles.