INTRODUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES

Cours 4. Représentation interne, équations d'état

L'automatique moderne, a partir de laquelle c´est développé la représentation d´état pour la commande, apparait a partir des années 60 pour permettre la commande de systèmes complexes, tels que les applications spatiales Apolo et Polaris, les quelles possèdent multiples entrées et sorties (MIMO), et des critères de fonctionnement de plus en plus sévères. Son développement et application a grandit avec l´usage des ordinateurs.

Déjà utilisée dans d'autres disciplines : Mécanique ou la Thermodynamique.
Exemple, le comportement macroscopique d'un gaz peut être décrit et prédit à l'aide d'un nombre fini de variables physiques : le volume V du gaz, la pression p et la température T de ce gaz. L'ensemble (p, V, T) constitue l'état thermodynamique macroscopique du gaz.
Il évolue au cours du temps suivant les conditions de l'environnement extérieur au système (apport de chaleur par exemple) et peut donc être caractérisé par son comportement dynamique.

Ainsi, l'état dynamique d'un système peut être caractérisé par un ensemble de variables internes appelées variables d'état. Cet ensemble résume complètement la configuration dynamique courante du système. Pour cela, il doit contenir un nombre minimal de variables d'état nécessaires et suffisantes pour décrire les dynamiques du système.

Le choix de cet ensemble minimal n'est pas unique, mais doit comporter un nombre toujours identique de variables d'état indépendantes. Cela signifie que les valeurs initiales de chacune des variables d'état constituant l'ensemble peuvent être fixées de manière arbitraire.

L'état initial d'un système doit ainsi constituer sa mémoire : étant donné l'état d'un système à un instant donné, la connaissance du passé ne donne pas d'information additionnelle sur le futur comportement du système. Il faut donc définir aussi des fonctions (équations d'état) pour faire la prédiction du futur, les fonctions couramment utilisées sont celle résultant d'une intégration.

DEFINITION

Etat

L´état d´un système est un ensemble de variables $(x(t))$ telles que leurs valeurs a un instant $t = t_0$, avec les signaux d'entré $(u(t))$ pour tout temps $t \geq t_0$, et les équations qui décrivent les dynamiques $[f(x,u,t), g(x,u,t)]$, peuvent prédire les valeurs futures des états $(x(t))$ et sorties $y(t)$ du système, pour tout temps $t \geq t_0$.

Remarque : Les états ne représentent pas nécessairement des variables physiques du système.

VARIABLES DANS LA REPRESENTATION D'ETAT

La représentation d'état utilise trois types de variables, organisés en forme de vecteurs :

- Etats : $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$
- Entrées : $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$
- Sorties : $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$

n, m et r, représentent respectivement le nombre de variables d'état, de sortie et d'entrée.

EQUATIONS DANS LA REPRESENTATION D'ETAT

Les équations utilisés pour la représentation d'état sont les produites para des fonctions d'intégration, et peuvent varier suivant le type de système. Ainsi pour un :

Système Non Linéaire

$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ Equation d'état

$y(t) = g(x, u, t)$ Equation de sortie

Système Linéaire

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ Equation d'état

$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ Equation de sortie

Avec :

$A(t)$ matrice d'état
$B(t)$ matrice d'entrée
$C(t)$ matrice de sortie
$D(t)$ matrice de transition directe

Dans le cas ou les fonctions ou vecteurs de fonctions f et g, ou les matrices A, B, C et D, sont fonction du temps, le système prend le nom de système a temps variant, dans le cas contraire il prend le nom de système a temps invariant, pour le cas des systèmes linéaires ils se nomment Linéaire a Temps Invariant (LTI).

Dans le cas des **systèmes LTI**, les équations sont simplifiées :

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ Equation d'état
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ Equation de sortie

Représentation d'état de systèmes dynamiques

Il est possible d'obtenir des représentations d'état, en forme matricielle, pour un système SISO a partir d'une seule équation différentielle ou pour un système MIMO, a partir de plusieurs de ces équations représentant les relations entre les variables.

Représentation d'état à partir d'une équation différentielle ordinaire (SISO typiquement)

Cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n sans dérivées des termes d'entrée:

$$\overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

On suppose les conditions initiales $y(0), \dot{y}(0), \ldots y^{n-1}(0)$ et l'entrée $u(t)$ pour un temps $t \geq 0$ connues, il est donc possible de choisir les variables d'état tels quelles puissent définir complètement le futur du système, on peu donc choisir :

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad \cdots x_n = \overset{n-1}{y}$$

L'équation différentielle peu donc s'écrire sous la forme de plusieurs équations d'état, et une équation de sortie:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots a_1 x_n + u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Ou en forme matricielle:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx
\end{aligned}
$$

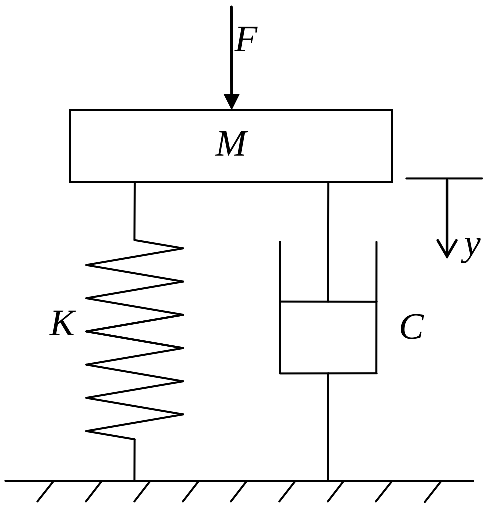
Avec:

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};
$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : La représentation d'état d'un système n'est pas unique, car celle-ci dépend de la sélection des variables d'état, cependant pour toutes les représentations d'état pour un même système auront le même nombre de variables d'état.
Exemple :
Pour le système mécanique de la figure, dont l'équation qui représente sa dynamique est :

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F$$



Avec : $u = F$

Il est possible de définir les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}$$

On substitue ces variables d'état dans l'équation :

$$M\dot{x}_2 + Cx_2 + Kx_1 = u \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{u - (Cx_2 + Kx_1)}{M}$$

Une représentation d'état du système est :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{C}{M}x_2 + \frac{1}{M}u$$
$$y = x_1$$

En forme matricielle :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Avec : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n sans dérivées des termes d'entrée:

$$\overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{n}{u} + b_1 \overset{n-1}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

On suppose les conditions initiales $y(0), \dot{y}(0), \dots y^{n-1}(0)$ et l'entrée $u(t)$ pour un temps $t \geq 0$ connues, il est donc possible de choisir les variables d'état tels quelles puissent définir complètement le futur du système. Il est nécessaire dans ce cas d'annuler les dérives de l'entrée. On peu donc choisir :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{n-1}{y} - \beta_0 \overset{n-1}{u} - \beta_1 \overset{n-2}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}
$$

$\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_n$ sont des coefficients a déterminer avec les expressions:

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = b_0; \quad \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0; \quad \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0; \quad \beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\mathrm{B}_0 \\
&\vdots \\
&\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
\end{aligned}
$$

Avec ce choix de variables d’état on obtient la représentation d’état suivante :

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\
&\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
&\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\
&\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \\
&y = x_1 + \beta_0 u
\end{aligned}
$$

Ou en forme matricielle:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu \\
&y = Cx
\end{aligned}
$$

Avec:

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};\ D = \beta_0 = b_0
$$

Exemple : Obtenir une représentation d'état pour l'équation differentielle:

$$\dddot{y} + 18\ddot{y} + 192\dot{y} + 640y = 160\dot{u} + 640u$$

On définir les états suivants :

$$x_1 = y - \beta_0 u$$
$$x_2 = \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$
$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

Avec :

$$\beta_0 = b_0 = 0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 640 - 18(160) = -2240$$

La représentation d'état est:

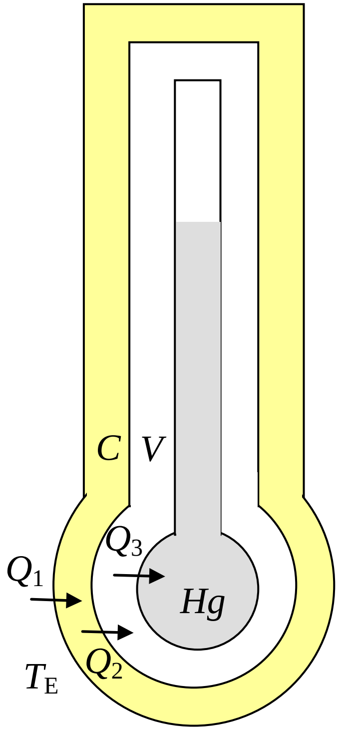
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Représentation d'état à partir de plusieurs équations différentielles du système

Il est aussi possible de d'obtenir une représentation d'état directement des équations différentielles de chaque élément d'un système, ou des équations intermédiaires.

Exemple 1 : Pour le système thermique qui représente le Thermomètre de mercure avec coque en cuivre.



Les deux surfaces et le mercure absorbent de la chaleur:

Hg: Mercure THg, CHg ; V: Verre TV, CV ; C: Cuivre TC, CC

Entre chaque élément on a une résistance de contact: R1, R2, R3.

Les équations de base sont :

1) $Q_1 - Q_2 = C_C DT_C$; 2) $Q_2 - Q_3 = C_V DT_V$;

3) $Q_3 = C_{Hg} DT_{Hg}$ 4) $Q_1 = \dfrac{T_E - T_C}{R_1}$;

5) $Q_2 = \dfrac{T_C - T_V}{R_2}$; 6) $Q_3 = \dfrac{T_V - T_{Hg}}{R_3}$

6 équations 7 variables ($T_E, T_C, T_V, T_{Hg}, Q_1, Q_2, Q_3$)

On veut obtenir une représentation d'état que représente le système avec la relation entrée sortie

$$T_{Hg} = f\left(T_E\right)$$

Pour cela on peut réduire le modèle du système de six à trois équations, et avec seulement les températures comme variables :

7) $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_C D\right)T_C = \frac{T_V}{R_2}+\frac{T_E}{R_1}$ 8) $\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+C_V D\right)T_V = \frac{T_C}{R_2}+\frac{T_{Hg}}{R_3}$ 9) $T_V = R_3\left(\frac{1}{R_3}+C_{Hg} D\right)T_{Hg}$

L'entrée est : $u = T_E$ et la sortie : $y = T_{Hg}$.

On peut choisir comme états : $x_1 = T_C; \quad x_2 = T_V; \quad x_3 = T_{Hg}$

Avec ces définitions on réécrit les équation du système :

$$\frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_2}x_1 + C_C\dot{x}_1 = \frac{x_2}{R_2} + \frac{u}{R_1}$$

$$\frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_3}x_2 + C_V\dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_3}{R_3}$$

$$x_3 + R_3 C_{Hg}\dot{x}_3 = x_2$$

On obtien donc une représentation d'état du système :

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C_C}x_1 - \frac{1}{R_2C_C}x_1 + \frac{1}{R_2C_C}x_2 + \frac{1}{R_1C_C}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_2C_V}x_1 - \frac{1}{R_2C_V}x_2 - \frac{1}{R_3C_V}x_2 + \frac{1}{R_3C_V}x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_2 - \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_3$$

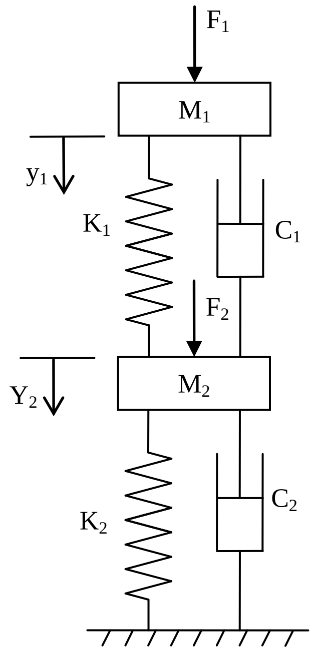
$$y = x_3$$

Ou en forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_C} - \frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V} - \frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple 2 : Soit les système mécanique MIMO avec deux entrées (F_1 et F_2) et deux sorties (y_1 et y_2):

Les équations du système sont :

$$F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1D(y_1 - y_2) = M_1D^2y_1$$
$$F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1D(y_1 - y_2) - K_2y_2 - C_2Dy_2 = M_2D^2y_2$$

Dans ce cas on a :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}\ ;\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

On choisi comme états :

$$x = [y_1 \quad Dy_1 \quad y_2 \quad Dy_2]^T$$

On substitue sur les équations originelles et on obtient :

$$u_1 - K_1x_1 + K_1x_3 - C_1x_2 + C_1x_4 = M_1\dot{x}_2$$
$$u_2 + K_1x_1 - K_1x_3 + C_1x_2 - C_1x_4 - K_2x_3 - C_2x_4 = M_2\dot{x}_4$$

On obtient la représentation d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{K_1}{M_1}x_1 - \frac{C_1}{M_1}x_2 + \frac{K_1}{M_1}x_3 + \frac{C_1}{M_1}x_4 + \frac{u_1}{M_1}$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{K_1}{M_2}x_1 + \frac{C_1}{M_2}x_2 - \frac{(K_1 + K_2)}{M_2}x_3 - \frac{(C_1 + C_2)}{M_2}x_4 + \frac{u_2}{M_2}$$
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_3$$

Ou en forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{C_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & \frac{C_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{M_2} & \frac{C_1}{M_2} & -\frac{K_1+K_2}{M_2} & -\frac{C_1+C_2}{M_2} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Devoir : lire chapitre 2 de [9]