INTRODUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES

Cours 5. Représentation Graphique : Schémas Fonctionnels

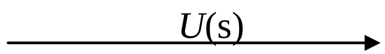
Un schéma fonctionnel est une représentation graphique qui illustre les relations fonctionnelles entre les composants d'un système. Ceux cis permettent l'évaluation des contributions individuelles de chaque composant.

Eléments d'un schéma fonctionnel

1. Blocs Fonctionnels

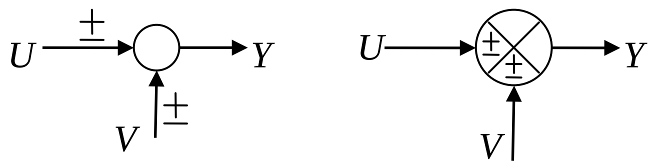
Principal élément d'un diagramme qui représente ses composants. Contient la relation entre l'entrée et la sortie de chaque composant : fonction de transfert du composant en général.

2. Arcs orientées



Représentent le flux de signaux qui transportent l'information, couramment regroupés dans un vecteur. Permet d'indiquer la connexion d'une variable entre les différents blocks.

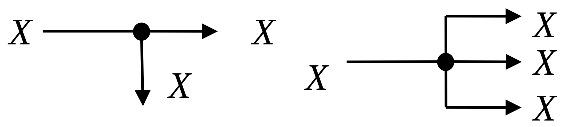
3. Blocks d'adition



Ces blocks représentés par un cercle représentent une relation algébrique d'adition ou soustraction de deux ou plusieurs signaux :

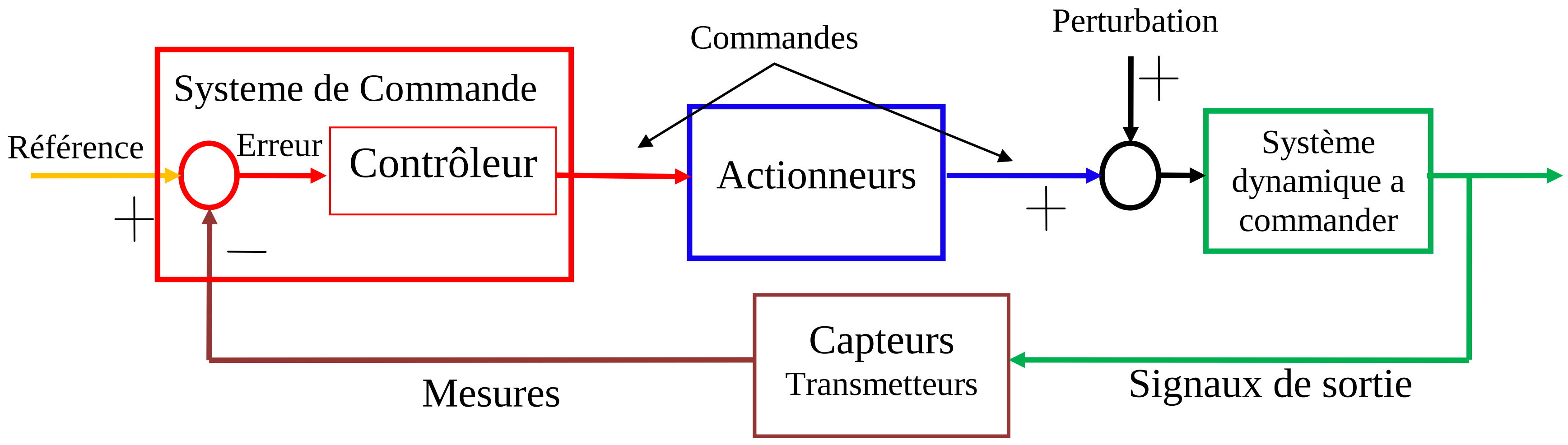
$$Z = X \pm Y$$

4. Point de ramification

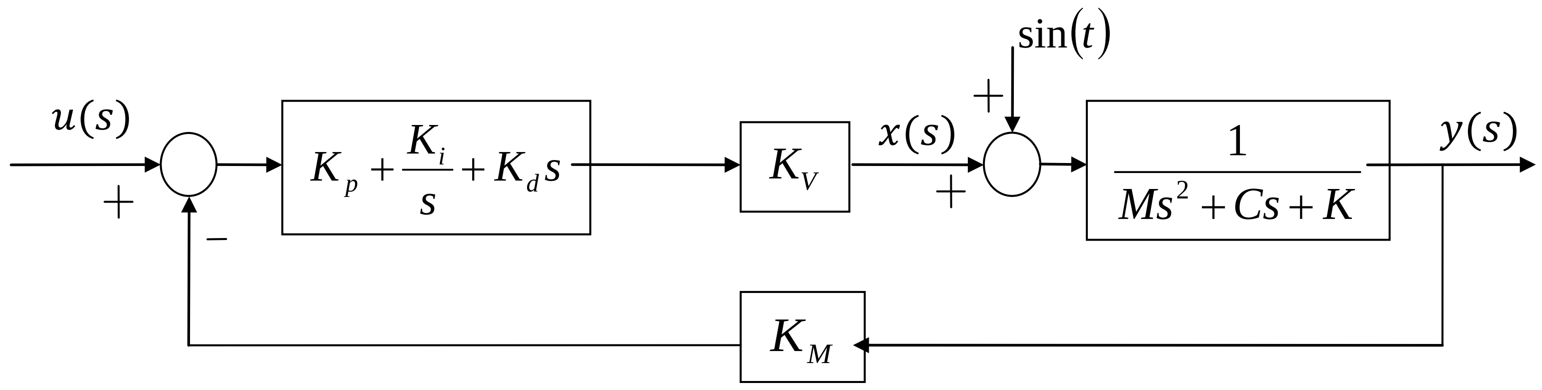


C'est un point ou un signaux pars vers plusieurs directions en même temps.

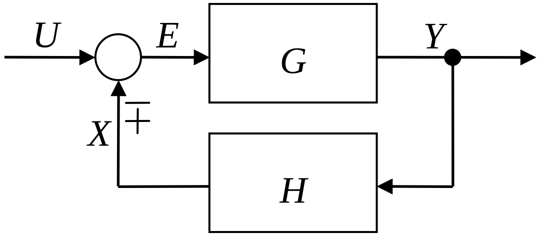
Exemple



Ou avec les fonctions de transfert:



Forme canonique d'un Asservissement a Contre Réaction



D'ou les définitions :

G: Fonction de transfert direct.

H: Fonction de transfert de retour

GH: Fonction de transfert boucle ouverte

$\frac{Y}{U}$: Fonction de transfert boucle fermé

$\frac{E}{U}$: Rapport d'erreur

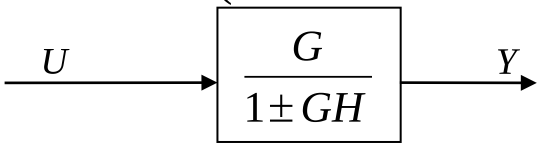
$\frac{X}{U}$: Rapport de retroaction primaire

C:elui ci représente les relations suivantes :

$Y = E \times G$ (1) $X = Y \times H$ (2) $E = U \mp X$ (3)

$$\frac{Y}{U} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

Il est donc équivalent au diagramme suivant (fonctions de transfert en boucle fermé):



Règles d'algèbre des schémas fonctionnels

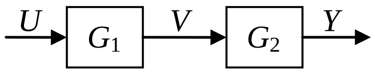
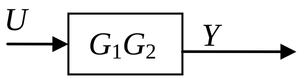
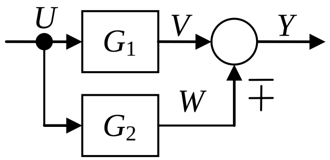
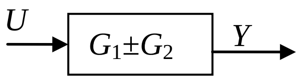
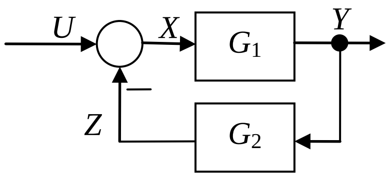
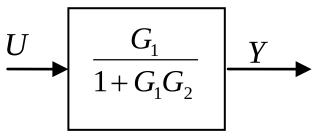
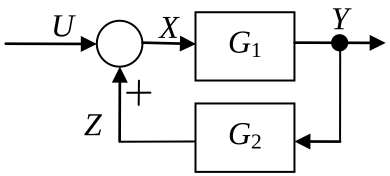
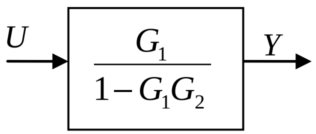
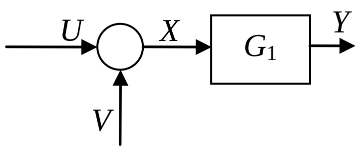
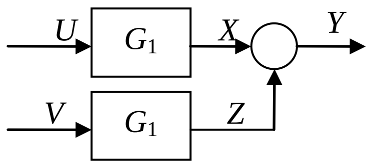
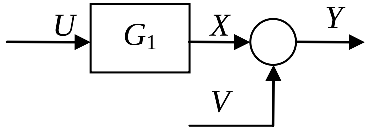
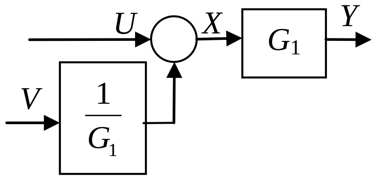
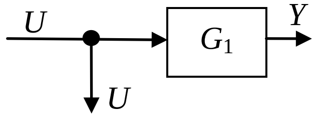
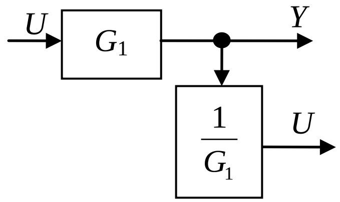
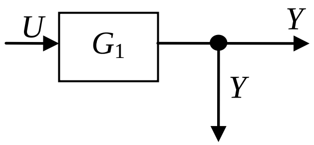
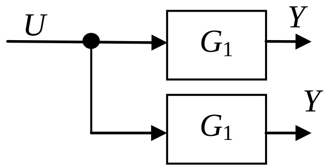
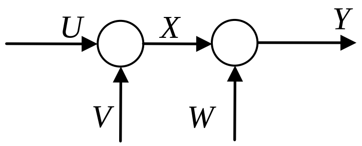
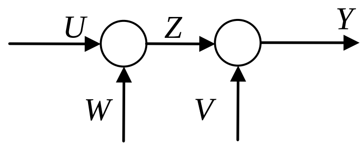
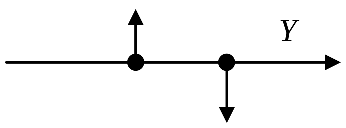
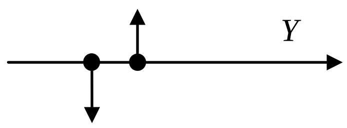
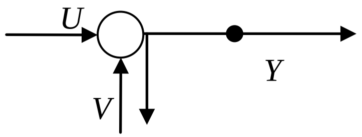
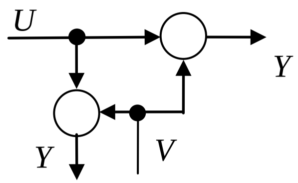
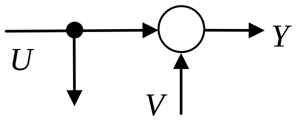
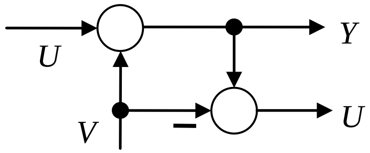
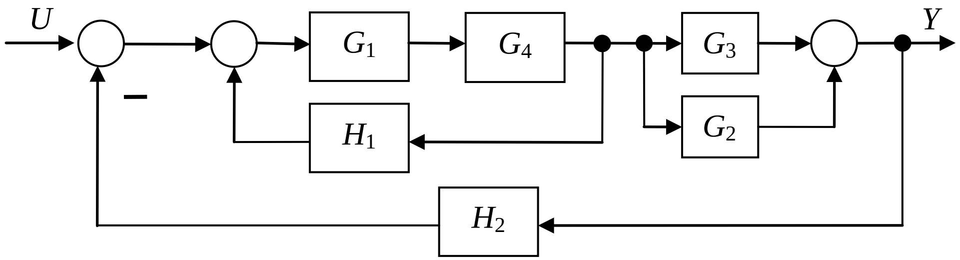
	Schéma de départ	Schéma équivalent	Equation
1			$V = G_1U;\quad Y = G_2V$ $Y = (G_1G_2)U$
2			$V = G_1U;\quad W = G_2U$ $Y = V \pm W$ $Y = (G_1 + G_2)U$
3			$Z = G_2Y;\quad Y = G_1X$ $X = U - Z$ $Y = \frac{G_1}{1+G_1G_2}U$
4			$Z = G_2Y;\quad Y = G_1X$ $X = U + Z$ $Y = \frac{G_1}{1-G_1G_2}U$
5			$X = G_1U;\ Z = G_1V$ $Y = G_1(U + V)$

	Schéma de départ	Schéma équivalent	Equation
6			$X = G_1U$ $Y = G_1U + V$
7			$Y = G_1U$ $U = \frac{1}{G_1}Y$
8			$Y = G_1U$
9			$X = U + V; \quad Z = U + W$ $Y = X + W = Z + V$ $Y = U + V + W = U + W + V$
10			

11			$Y = U + V$
12			$Y = U + V$ $U = Y - V$

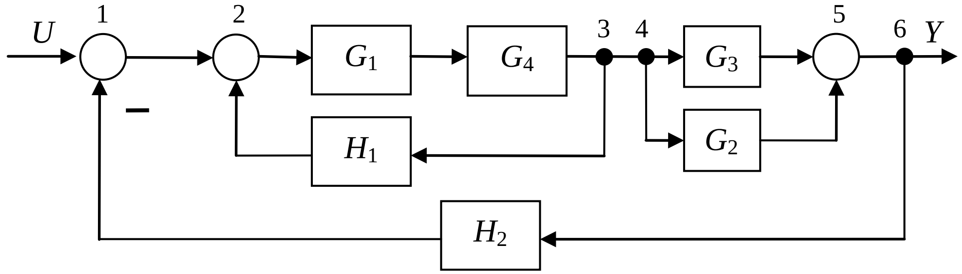
Simplification d'un schéma fonctionnel

L'objectif est de réduire un schéma a la version la plus simple possible :

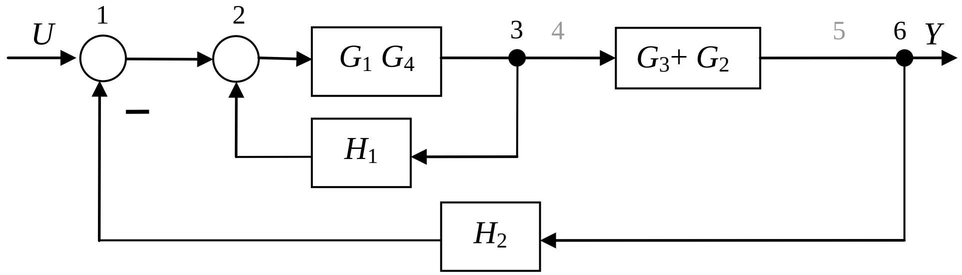


On procède comme il suit:

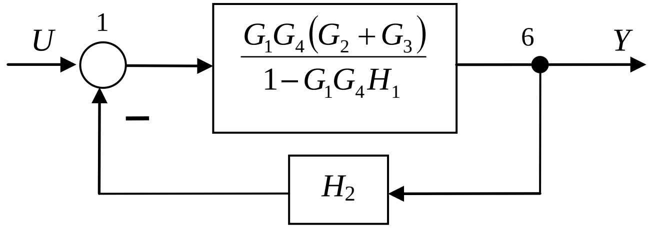
1. Enumérer les points de ramification et blocks d'addition:



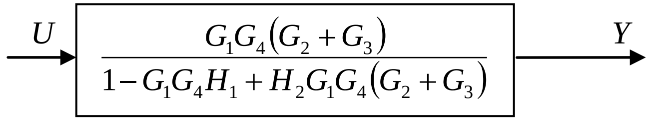
2. Réduire de l'intérieur vers l'extérieur, exemple entre 2 et 3, et entre 4 et 5:



3. Transforme a la forme d'asservissement a contre réaction:



4. Obtient la représentation en boucle ouverte

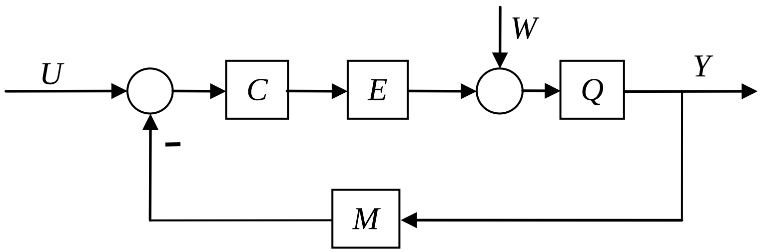


Schémas de plusieurs entrées

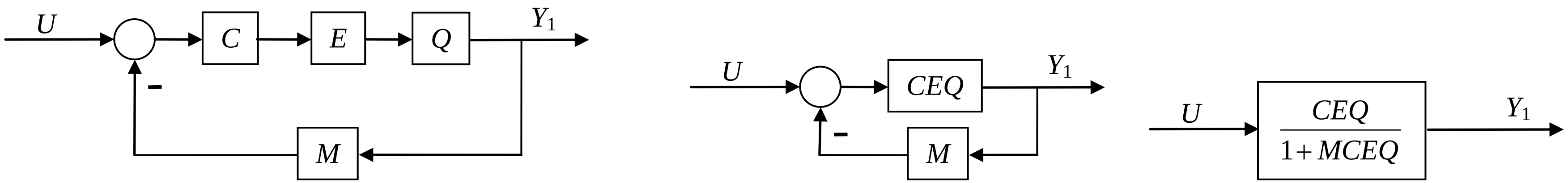
On réduit de schéma de façon indépendante pour chaque entrée:

1. Egaler toutes les entrées a zéro a l'exception d'une.
2. Transformer le schéma jusqu'à boucle ouverte
3. Calculer la réponse du a cette entrée
4. Répéter 1, 2 y 3 pour chaque entrée.
5. La sortie est la somme de chaque sortie individuelle.

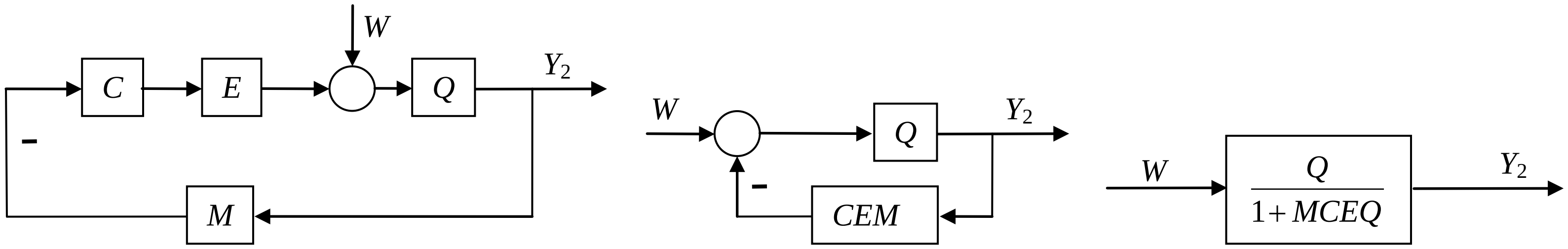
Exemple:



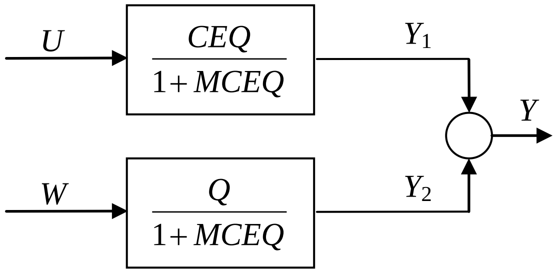
$W = 0$ on réduit le schéma:

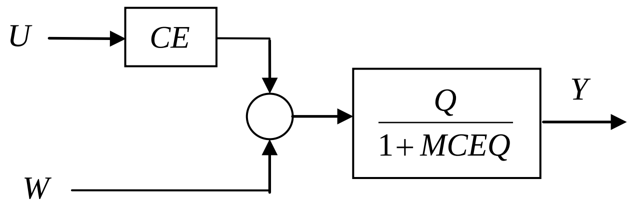


$U = 0$ on réduit le schéma :



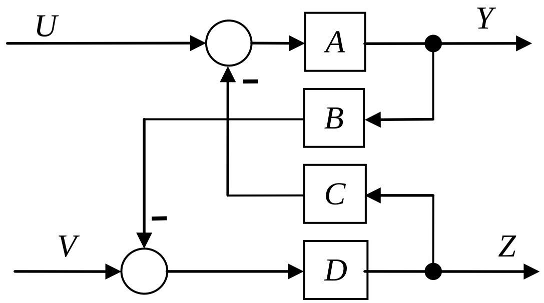
Le schéma réduit est le résultant de la somme des deux sorties obtenus :



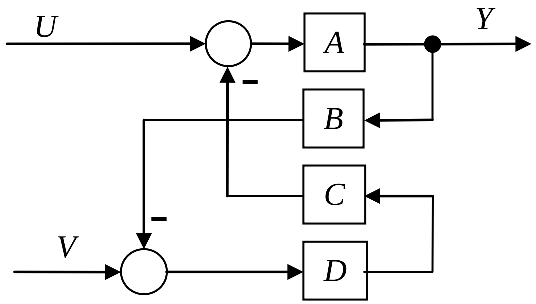


Entrées et sorties multiples

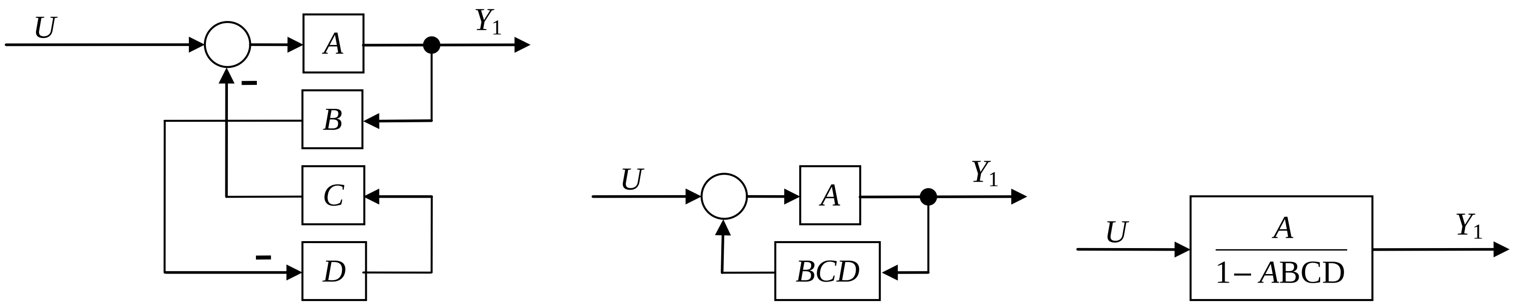
Dans ce cas on détermine chaque sortie de manière indépendante, en ignorant les autres :
Exemple:



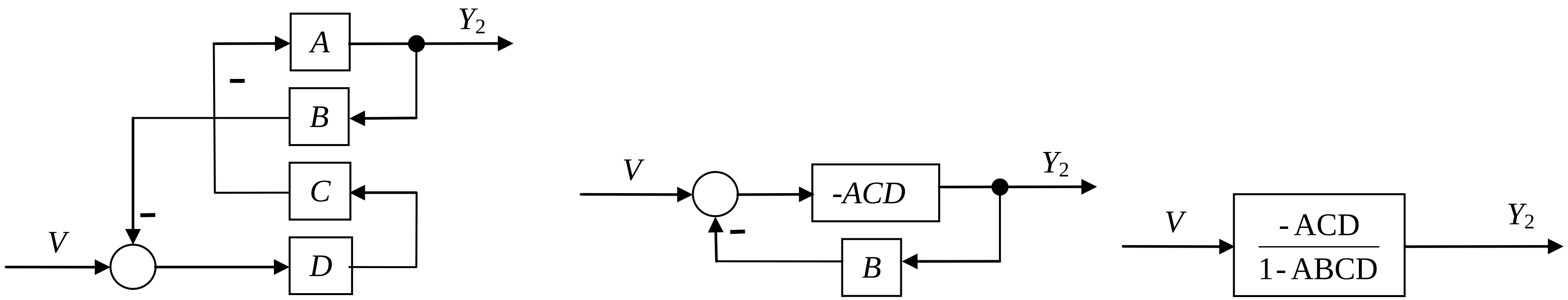
Calculer Y sans considérer Z:



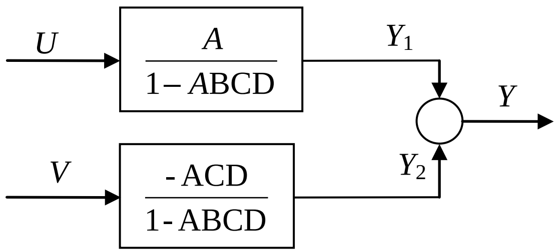
V =0, déterminer la fonction de transfert entre *U* y Y_1:



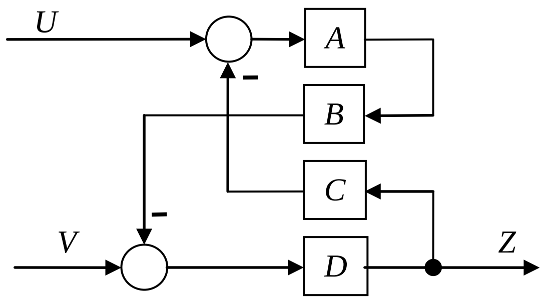
U =0, déterminer la fonction de transfert entre *V* y Y_2:



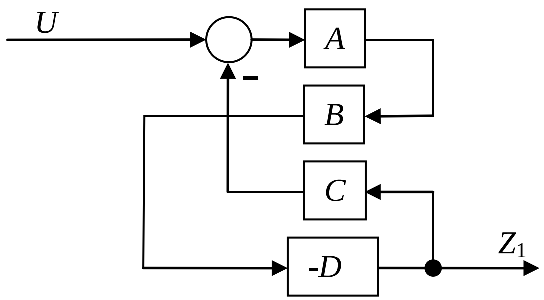
Pour *Y* le schéma réduit est:

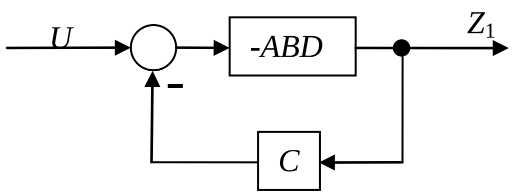


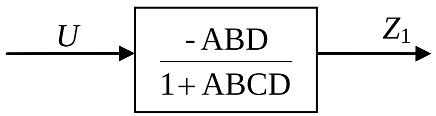
Calculer Z sans considérer Y :



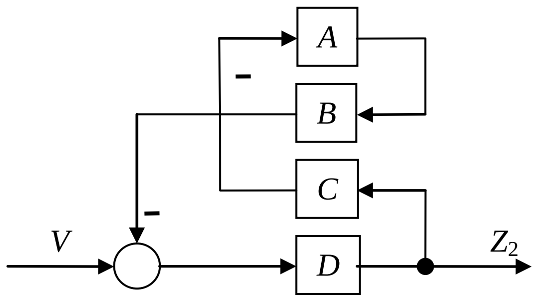
$V=0$, déterminer la fonction de transfert entre U y Z_1:

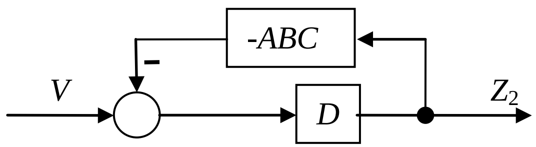




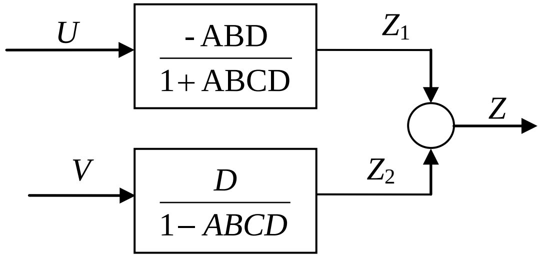


$U=0$, déterminer la fonction de transfert entre V y Z_2:





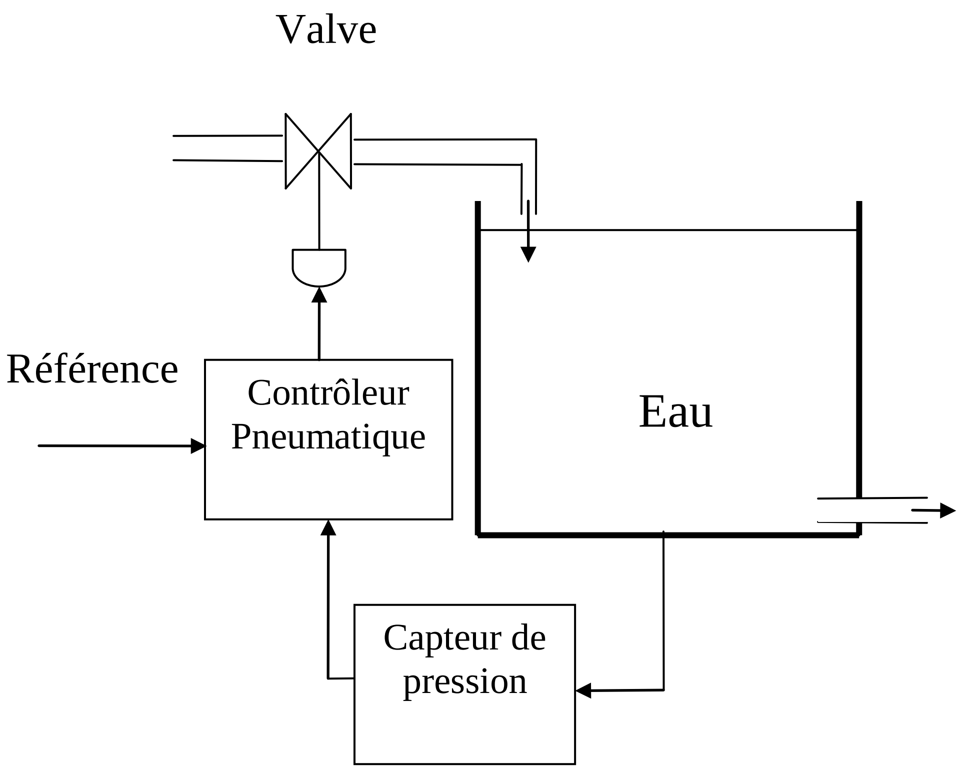
Pour Z le schéma réduit est :



Construction d'un schéma a partir des fonctions de transfert des éléments

Permet de représenter un système physique réel.
Deux cas de figure :

- Premier : On connait les composants, les connexions entre eux et leurs fonctions de transfert indépendantes. On construit donc le schéma suivant l'organisation des éléments et on écrit chaque fonction de transfert des éléments dans le block correspondant.
- Deuxième : On dispose de plusieurs fonctions de transfert sans connaitre a priori leur relation. On construit un schéma préliminaire, on identifie les principaux composants et postérieurement on dessine le schéma convenablement.



Exemple. Pour le système de commande des niveau suivant :

Les fonctions de transfert des composants :
Capteur de pression

$$G(s) = \gamma_{H2O} K_T$$

Contrôleur pneumatique :

$$G(s) = K_P$$

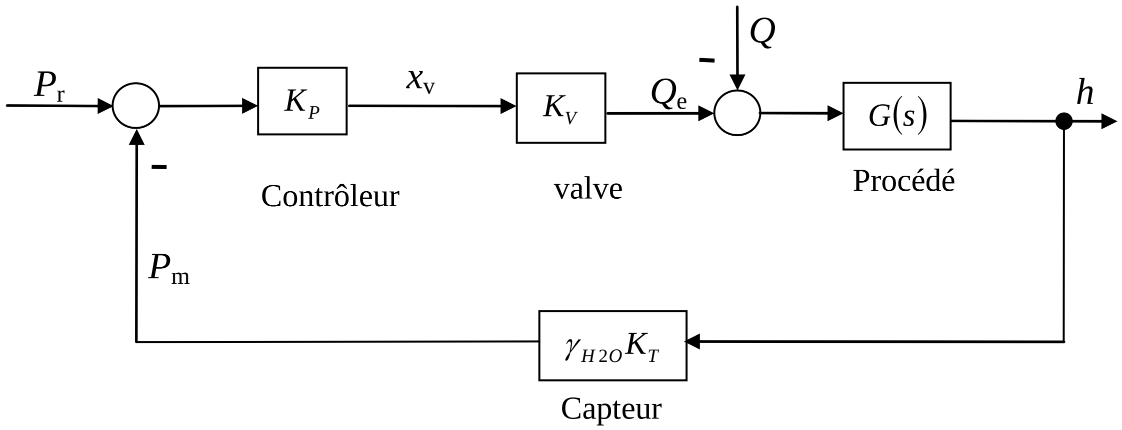
Valve :

$$G(s) = K_V$$

Obtenir:

- Schéma fonctionnel complet.
- Fonction de transfert boucle fermé.
- Représentation d’état.

On identifie les composants, et les inscrit dans le diagramme fonctionnel d’un système à boucle fermé.



Avec :

Q_e: débit d'entrée Q_s: débit de sortie h: niveau
P_m: pression mesuré au fond du reservoir x_v: position de la valve.
P_r: pression de référence, désirée pour le réservoir

Fonction de transfert du procédé : Système hydraulique, entrée (Q_e-Q_s), sortie (h).

Équations : $Q_e - Q_s = CDP$ (1) ; $P = \gamma_{H2O}h$ (2)

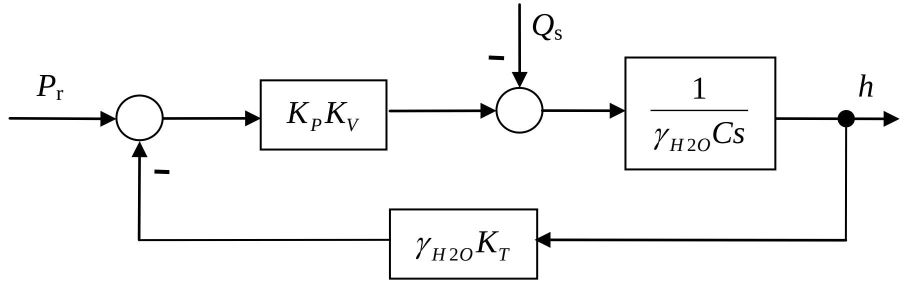
$Q_e - Q_s = CDP$ (1) $P = \gamma_{H2O}h$ (2)

Equation dynamique du système: $Q_e - Q_s = \gamma_{H2O}CDh$

Fonction de transfert:

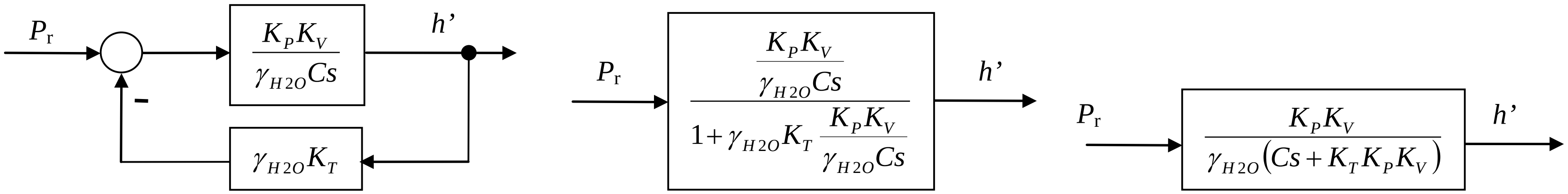
$$\frac{h(s)}{(Q_e - Q_s)(s)} = \frac{1}{\gamma_{H2O}Cs}$$

Schéma:



Réduit le schéma pour les deux entrées (P_r, Q_s) et une sortie (h).

$Qs = 0$:



$Pr = 0$:

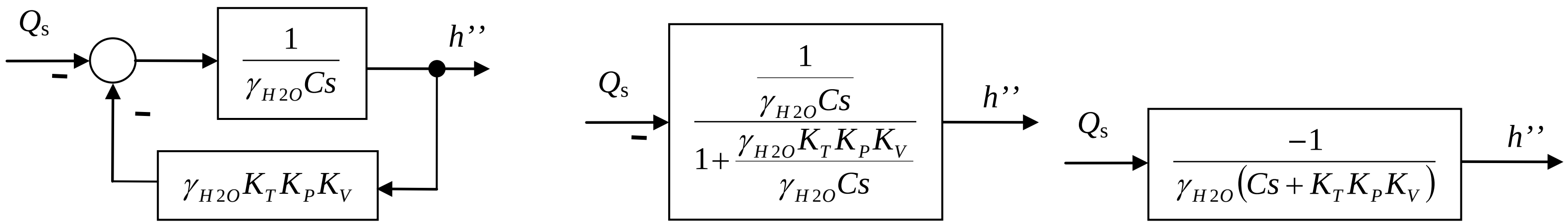
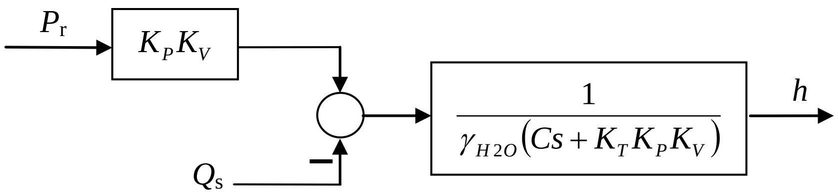


Schéma simplifié :



Fonction de transfert:

$$h = \frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O}(Cs + K_T K_P K_V)} P_r - \frac{1}{\gamma_{H2O}(Cs + K_T K_P K_V)} Q_s$$

Equation différentielle:

$$\gamma_{H2O} CDh + \gamma_{H2O} K_T K_P K_V h = K_P K_V P_r - Q_s$$

Représentation d'état, avec $x = h$; $u_1 = P_r$; $u_2 = Q_s$

$$\dot{x} = \frac{-\gamma_{H2O} K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} x + \frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} u_1 - \frac{1}{\gamma_{H2O} C} u_2$$

$$y = x$$

Ou en forme vectorielle: Avec :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \frac{-\gamma_{H2O} K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O} C}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} & \frac{-1}{\gamma_{H2O} C} \end{bmatrix}; \quad C = 1$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2:

Las équations qui suivent représentent un système :

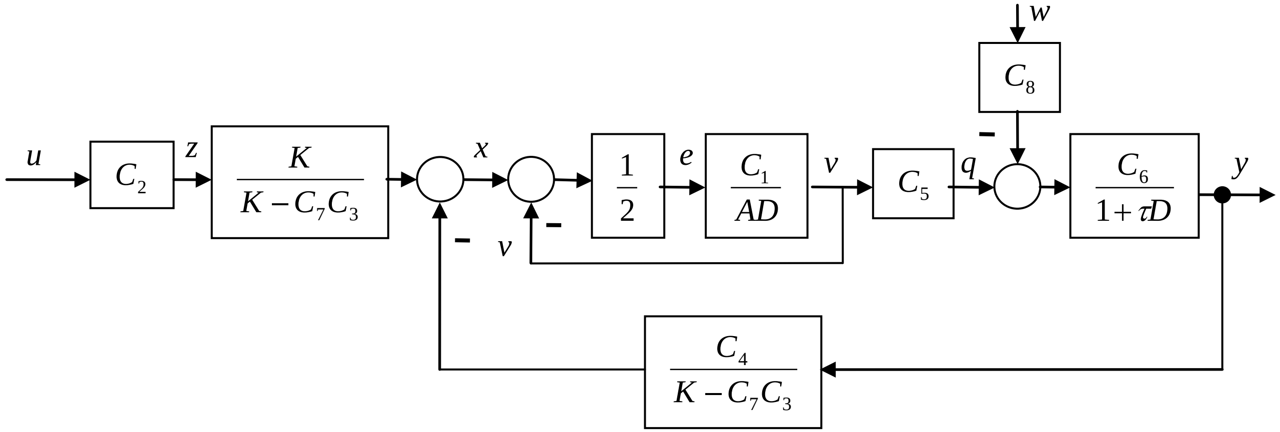
$$e = \frac{x-v}{2}; \quad v = \frac{C_1}{AD}e; \quad z = C_2 u; \quad x = \frac{Kz - C_4 y}{K - C_7 C_3}; \quad q = C_5 v; \quad y = \frac{C_6}{1+\tau D}\left(q - C_8 w\right)$$

Avec:

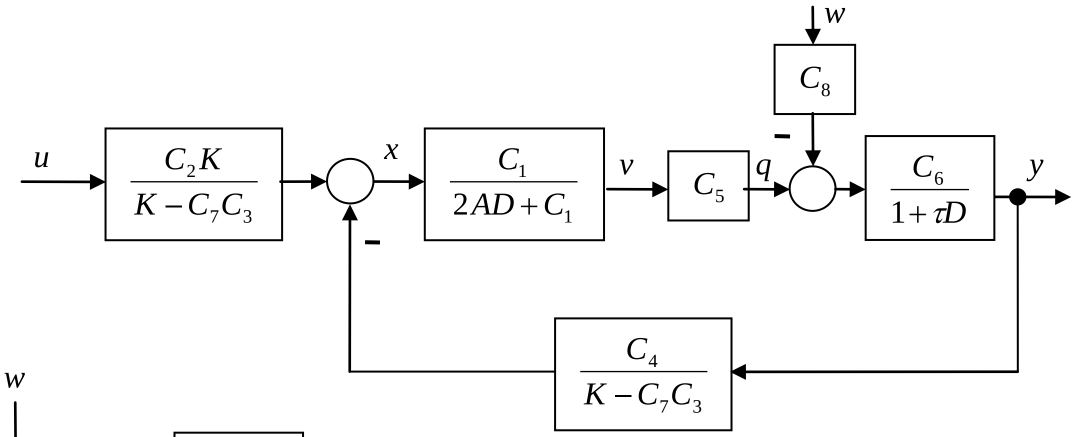
- e, q, v, w, x, z: signaux
- y: sortie
- u: entrée (référence)
- D: Opérateur mathématique
- A, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, K: constantes

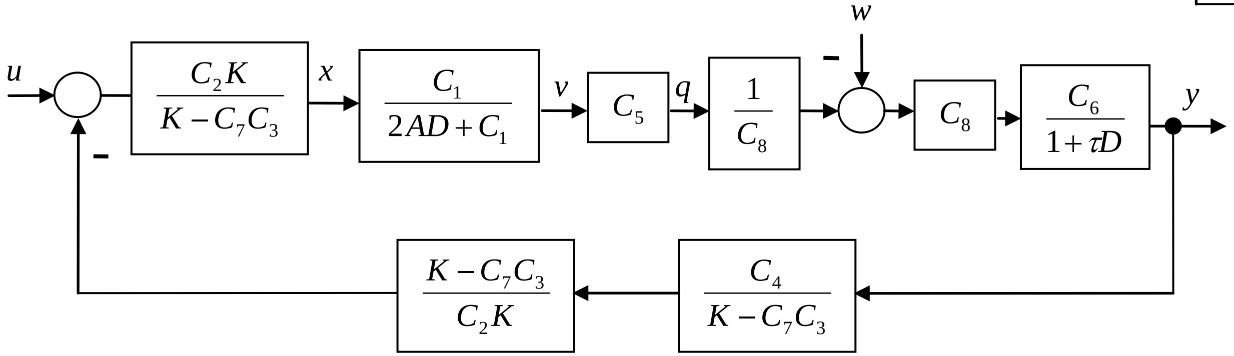
Déterminer la représentation de la fonction de transfert en boucle ouverte:

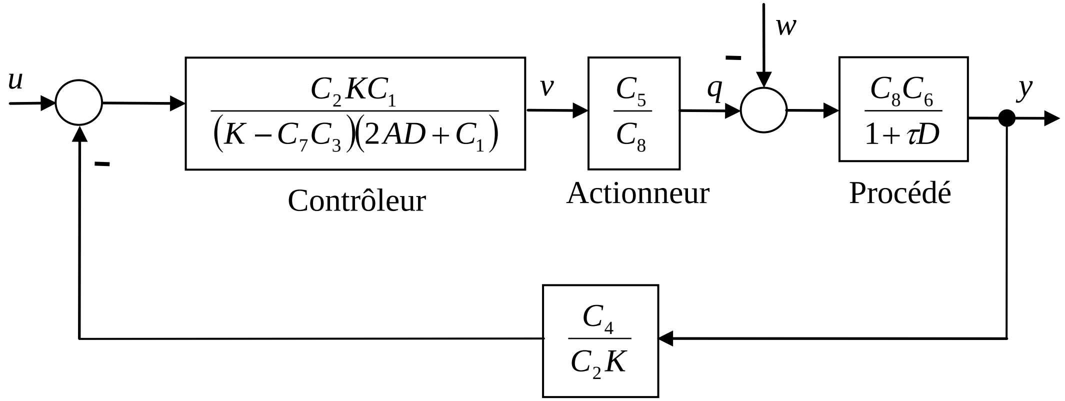
On dessine un schéma préliminaires, en commensant dans ce cas par u a gauche :



On réduit et simplifie le schéma:







On obtient finalement le diagramme réduit en boucle ouverte.