INTRODUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES

Cours 6. Relations entre les diverses représentations

Les diverses représentations étudiées peuvent représenter les mêmes systèmes physiques, l'utilisation d'une ou autre dépend souvent des outils à utiliser postérieurement pour l'analyse du système ou le développement d'une commande.

Il arrive souvent aussi d'utiliser plusieurs représentations pour un même système pour pouvoir comprendre mieux les phénomènes en jeux.

Dans les cours précédents nous avons étudié trois formes mathématiques de représentations d'un modèle dynamique et une forme graphique. Dans le développement des explications nous avons vu sommes parti de la base des équations différentielles pour expliquer les autres représentations. Dans ce chapitre nous parlerons donc de la relation directe entre la fonction de transfert et la représentation graphique avec la représentation d'état, et nous soulignerons quelques propriétés de la représentation d'état qui peuvent sen déduire.

RELATION FONCTION DE TRANSFERT ET REPRESENTATION D'ETAT

Il est possible d'obtenir la fonction de transfert d'un système en partant directement de la représentation d'état en appliquant une formulation simple.

Soit le système multivariable dont la représentation d'état est donné ci-dessous :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t) + Du(t)$$

Ou : $x\epsilon\mathbb{R}^n, u\epsilon\mathbb{R}^m, y\epsilon\mathbb{R}^n r$

Du fait de la linéarité de l'opérateur de Laplace, il est possible d'obtenir les transformés du système suivantes :

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Ou : $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]; U(s) = \mathcal{L}[u(t)]; Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

Comme la fonction de transfert est définie comme la relation entre la transformée de Laplace de la Sortie et la transformée de Laplace de l'entrée, quand les conditions initiales sont égales a zero :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Avec les condition initiales $x(0)$ égales a zéro, et en réorganisant l'équation on obtient :

$$sX(s)-AX(s)=BU(s)$$

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$

Ou : I est la matrice identité.

Si on multiplie les deux cotés de l'équation par $(sI-A)^{-1}$ on obtient:

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

Qui substitué dans l'équation de sortie donne :

$$Y(s)=\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)U(s)$$

Donc :

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Exemple : pour le système mécanique étudié dans les cours précédents:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t)$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est possible d'obtenir la fonction de transfert, en utilisant la formulation étudié plus haut :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} + 0$$

La solution nous montre que :

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{K}{M} & s + \dfrac{C}{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \dfrac{C}{M}s + \dfrac{K}{M}} \begin{bmatrix} s + \dfrac{C}{M} & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\begin{bmatrix} s+\frac{C}{M} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\frac{1}{M}$$

La fonction de transfert est donc :

$$G(s)=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$$

Rappel : Le système mécanique étudié était:

$$MD^2y+CDy+Ky=F$$

Ou y (déplacements) est la sortie, et F (force) est l´entrée (appelée de façon courante u).
La transformée de Laplace de chaque membre de l équation (avec les C.I.=0) est :

$$Ms^2Y(s)+CsY(s)+KY(s)=F(s)$$

La fonction de transfert est: $G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$

NON UNICITE DE LA REPRESENTATION D'ETAT

Pour un même système il est possible d'obtenir différentes représentations d'état, tandis que les représentations externes, matrice de transfert ou équations différentielle est unique. Dans le cas de systèmes LTI par exemple, un même système peut être représenté par des matrices A différentes.

Exemple : Pour le système représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

Il est possible d'obtenir une représentation d'état en prenant les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad x_3 = \ddot{y}$$

Et on obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u \end{aligned}$$

Sous sa forme matricielle : Avec :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Prenons maintenant le système linéaire représenté par les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On peu obtenir la fonction de transfert de ce système avec la relation :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{(s+1)} - \frac{6}{(s+2)} + \frac{3}{(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Cette représentation d'état correspond au même système que le précédent, sa forme est appelé la *Forme canonique de Jordan* ou *Forme Modale*, car la matrice A possède seulement des éléments dans la diagonale, ces éléments son les Valeurs Propres (λ) de la Matrice A, et les pôles du système, ou racines de l'équation caractéristique.

Cette caractéristique de la représentation d'état permet de mettre en forme les représentations des systèmes de manière à avoir des représentations plus simples à manipuler.

Changement de variable linéaire : o peu démontrer que pour toute représentation d'état d'un système quelconque il est possible de déterminer un nouvel ensemble de variables d'état, a partir d'un changement de variable linéaire, de la forme :

$$z = Px$$

Avec P une matrice quelconque de la même dimension que A.

Dans ce changement de variable la nouvelle représentation obtenues est définie par :

$$\begin{aligned} P\dot{z} &= APz + Bu \qquad & \dot{z} &= P^{-1}APz + P^{-1}Bu \\ y &= CPz & y &= CPz \end{aligned}$$

Avec P^{-1} la matrice inverse de P.

Exemple: on définir un nouvel ensemble pour le système de l'exemple précédent avec:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Notre nouvelle représentation d'état sera définie par :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_z z + B_z u \\ y &= C_z z \end{aligned}$$

Avec :

$$A_z = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -17 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 13 \end{bmatrix}; \quad B_z = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C_z = CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile d'observer que pour cette nouvelle représentation d'état correspond au même système linéaire, car sa fonction de transfert est :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -17 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 13 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

De fait dans la plus part des cas il est suffisant de vérifier l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{bmatrix} \lambda + 17 & 8 & 12 \\ 2 & \lambda + 2 & 0 \\ -20 & -10 & \lambda + 13 \end{bmatrix} \\ &= ((\lambda + 17)(\lambda + 2)(\lambda + 13) - 240) - (-240(\lambda + 2) + 16(\lambda + 13)) \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

DIAGONALISATION DE MATRICES

Un cas particulier de changement de variable linéaire est appelé la diagonalisation de matrices, car on obtient une matrice *A* avec des éléments sur la diagonale et de zéros sur le reste des éléments de la matrice. On obtient une forme canonique de Jordan.

Pour ce faire, dans le cas des représentations d'état comme le montre la matrice *A* :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Il est possible d'obtenir une matrice *A* diagonale en utilisant comme matrice *P* :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1{}^2 & \lambda_2{}^2 & \lambda_3{}^2 & \cdots & \lambda_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1{}^{n-1} & \lambda_2{}^{n-1} & \lambda_3{}^{n-1} & \cdots & \lambda_n{}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Exemple : prenons à nouveau l'exemple précédent :

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$$

On a vu que les valeurs propres de cette matrice étaient : $\lambda_1=-1;\ \lambda_2=-2;\ \lambda_3=-3$

Donc pour obtenir une représentation avec une matrice diagonale il suffit de faire un changement de variable avec la matrice :

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

Ou:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}3&2.5&0.5\\-3&-4&-1\\1&1.5&0.5\end{bmatrix}$$

On obtient:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&2.5&0.5\\-3&-4&-1\\1&1.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=A_J$$

$$B_J=P^{-1}B=\begin{bmatrix}3&2.5&0.5\\-3&-4&-1\\1&1.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-6\\3\end{bmatrix};\quad C_J=CP=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$$

Exercices

Pour les systèmes suivant déterminer la fonction de transfert, l'équation différentielle et obtenir une représentation canonique de Jordan :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$