# INTRODUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES

## *Cours 7. Résolution des équations d'état*

La solution des équations d'état permet de calculer la valeur de chaque état à tout moment dans le temps, c´est donc la réponse du système.

Cette solution obéit à la solution classique des équations différentielles, dans un contexte multivariable.

REPONSE DES SYSTEMES, pour EQUATIONS DIFFERENTIELLES MONOVARIABLES.

La réponse d'un système correspond à la solution de l'équation différentielle du modèle, qui pour les systèmes linéaires invariants dans le temps peu se diviser en deux parties :

- La solution en régime transitoire, ou solution homogène (réponse libre) : qui représente la transition d'un état initial a un état final du système, et ce calcule pour une entrée égale a zéro.
- La solution en régime permanent, ou solution particulière (réponse forcée) : qui représente la réponse du système pour un temps infini, et qui se calcule pour une entrée spécifique.

**Réponses des systèmes de premier ordre.**

Modèle mathématique de la forme:

$$\tau Dy + y = u$$

Avec:

$y$ : Sortie ; $u$ : entrée ; $\tau$ : constante de temps.

<u>Solution en Régime Transitoire</u>

On considère une entrée nulle:

$$\tau Dy + y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$\tau D + 1 = 0$$

Ou sa seule racine est :

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

La réponse libre est de la forme :

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Ou $C$ est un paramètre qui dépend des conditions initiales.

Solution en Régime Permanent

Celle si dépend du type d'entrée.

Pour une **entrée en forme d'échelon**, valeur constante à changement brusque appliqué a un moment donné, pour tout $t > 0$ l'entrée $u = H$, ou $H$ est une constante, l'équation du système prend la forme:

$$\tau Dy + y = H$$

Pour calculer la réponse forcée, on suppose une réponse de la forme

$$y_{Es} = A$$

Ou $A$ est une constante.

On obtient la dérivé : $Dy_{Eas} = 0$

On substitue la solution supposée et sa dérivé dans l'équation, et on obtient :

$$A = H$$
$$y_E = H$$

Réponse du Système

La réponse complète du système, avec une **entrée en forme d'échelon**, est la somme des deux réponses, vu que le système est linéaire et donc satisfait le principe de superposition :

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} + H$$

Le coefficient $C$ se détermine avec les valeurs de conditions initiales, su on suppose que pour $t = 0 \rightarrow y_0 = 0$ :

On a :

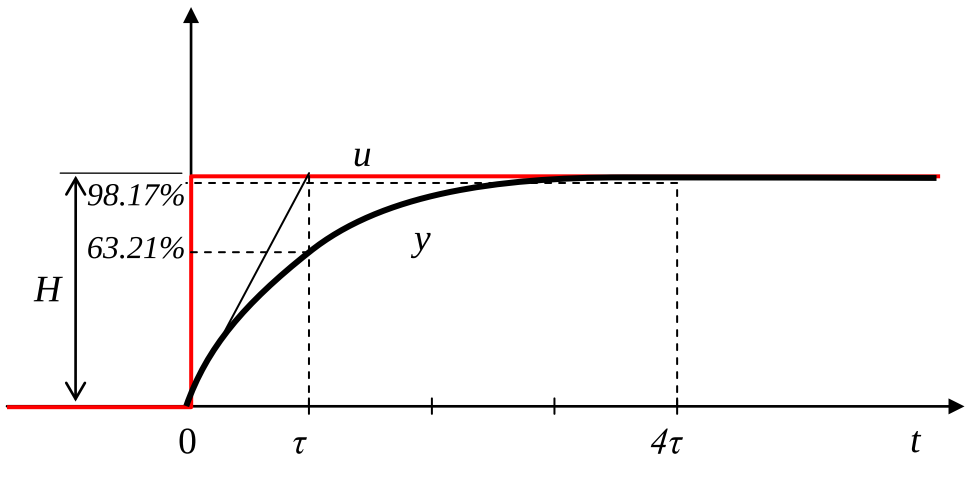
$$0 = Ce^{-0/\tau} + H$$

$$C = -H$$

La réponse du système est de la forme :

$$y = -He^{-t/\tau} + H$$

Cette solution est représente graphiquement sur la figure :




Ou pour $t = \tau \rightarrow u = 63{,}21\%H$

Pour une **entrée en forme de rampe**, valeur constante à changement brusque appliqué a un moment donné, pour tout $t > 0$ l'entrée $u = Ht$, ou $H$ est une constante, l'équation du système prend la forme:

$$\tau Dy + y = Ht$$

Pour calculer la réponse forcée, on suppose une réponse de la forme

$$Y_{Es} = A + Bt$$

Ou $A$ et $B$ sont des constantes.

On obtient la dérivée : $Dy_{Es} = B$

On substitue la solution supposée et sa dérivée dans l'équation, et on obtient :

$$\tau B + A + Bt = Ht$$

On obtient deux équations, une pour les coefficients de t et une autre pour les indépendants :

$$B = H$$

$$\tau B + A = 0 \Leftrightarrow A = -\tau H$$

Donc la réponse forcée sera :

$$y_E = -\tau H + Ht$$

Réponse du Système

La réponse complète du système, avec une **entrée en forme de rampe**, est la somme des deux réponses, vu que le système est linéaire et donc satisfait le principe de superposition :

$$y = y_T + y_E$$
$$y = Ce^{-t/\tau} - \tau H + Ht$$

Le coefficient $C$ se détermine avec les valeurs de conditions initiales, su on suppose que pour $t = 0 \rightarrow y_0 = 0$ :

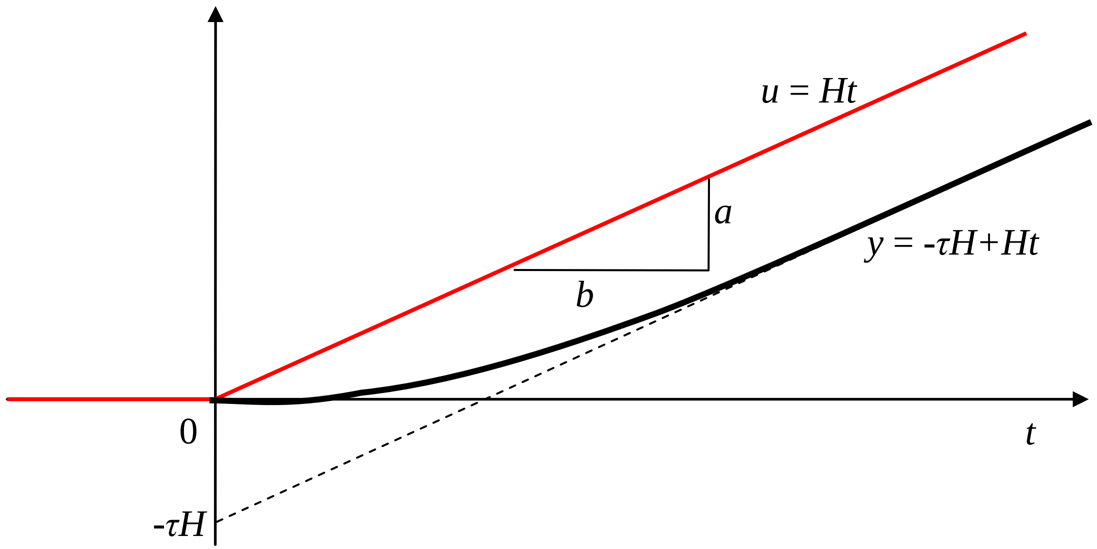
On a :

$$0 = Ce^{-0/\tau} - \tau H + H0$$
$$C = \tau H$$

La réponse du système est de la forme :

$$y = \tau He^{-t/\tau} - \tau H + Ht$$

Cette solution est représente graphiquement sur la figure :



Pour une **entrée en forme sinusoïdale**, valeur constante à changement brusque appliqué a un moment donné, pour tout $t > 0$ l'entrée $u = H \sin \omega t$ ou $H$ est une constante, l'équation du système prend la forme:

$$\tau Dy + y = H \sin \omega t$$

Pour calculer la réponse forcée, on suppose une réponse de la forme

$$Y_{Es} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Ou $A$ et $B$ sont des constantes.
On obtient la dérivée : $Dy_{Es} = A\omega \cos \omega t + \mathrm{B}\omega \sin \omega t$

On substitue la solution supposée et sa dérivée dans l'équation, et on obtient :

$$\tau\left(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t\right) + A \sin \omega t + B \cos \omega t = H \sin \omega t$$

On obtient deux équations, une pour les coefficients de sin et une autre pour les coefficients de cos, et on obtient:

$$A = \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}; \qquad B = \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}$$

Donc la réponse forcée sera :

$$y_E = \frac{H}{1+\tau^2\omega^2} \sin \omega t + \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2} \cos \omega t$$

<u>Réponse du Système</u>

La réponse complète du système, avec une **entrée en forme sinusoïdale**, est la somme des deux réponses, vu que le système est linéaire et donc satisfait le principe de superposition :

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} + \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega t + \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega t$$

Le coefficient $C$ se détermine avec les valeurs de conditions initiales, su on suppose que pour $t = 0 \rightarrow y_0 = 0$ :

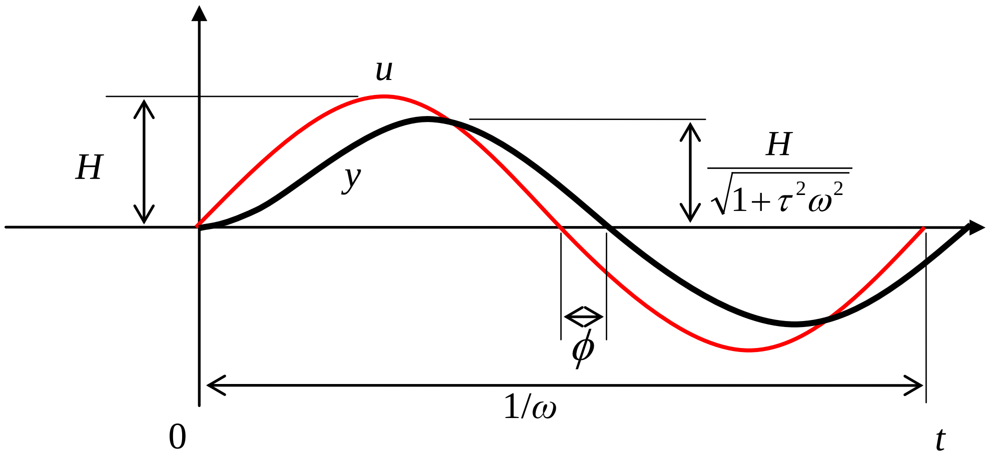
On a :

$$0 = Ce^{-0/\tau} + \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega 0 + \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega 0 \quad ; \quad C = \frac{\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}$$

La réponse du système est de la forme :

$$y = \frac{\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}e^{-t/\tau} + \frac{H}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin(\omega t + \phi)$$

Avec : $\phi = \tan^{-1}(\tau\omega)$



**Réponses des systèmes de deuxième ordre.**
Modèle mathématique de la forme:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n{}^2 y = \omega_n{}^2 u$$

Avec :

$y$ : Sortie ; $u$ : Entrée ; $\xi$ : Coefficient d'amortissement ; $\omega_n$ : Fréquence naturelle

Solution en Régime Transitoire

On considère une entrée nulle:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n{}^2 y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n{}^2 = 0$$

Les deux racines sont :

$$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Il existe donc 4 possibles formes de la réponse libre, suivant la valeur du coefficient $\xi$ :

Si $\xi > 1$ : deux racines réelles positives, solution de la forme :

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$ : deux racines réelles égales, solution de la forme :

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$ : deux racines complexes conjuguées, solution de la forme :

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$$

Si $\xi = 0$ : deux racines imaginaires pures (sans partie réelle), solution de la forme :

$$y_T = C_1 \sin\omega_n t - C_2 \cos\omega_n t$$

Avec $C_1$ et $C_2$ des coefficients dépendants des conditions initiales.

## Solution en Régime Permanent

Pour une **entrée en forme d'échelon**, valeur constante à changement brusque appliqué a un moment donné, pour tout $t > 0$ l'entrée $u = H$, ou $H$ est une constante, l'équation du système prend la forme:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n{}^2 y = \omega_n{}^2 H$$

Pour calculer la réponse forcée, on suppose une réponse de la forme

$$y_{Es} = A$$

Ou $A$ est une constante.

On obtient la première et la deuxième dérivé : $Dy_{Es} = 0$ ; $D^2 y_{Es} = 0$

On substitue la solution supposée et es dérivées dans l'équation, et on obtient :

$$\omega_n{}^2 A = \omega_n{}^2 H$$

$$y_E = H$$

Réponse du Système

La réponse complète du système, avec une **entrée en forme d'échelon**, est la somme des deux réponses, vu que le système est linéaire et donc satisfait le principe de superposition :

$$y = y_T + y_E$$

Avec $y_T$ qui peut prendre les quatre formes possibles, et les coefficients calculées avec les conditions initiales égales a zéro $t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0; \quad Dy_0 = 0$ :

$\xi > 1$

$$y_T = \left( -H - \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + H$$

$\xi = 1$

$$y_T = -He^{-\xi\omega_n t} - \xi\omega_n Hte^{-\xi\omega_n t} + H$$

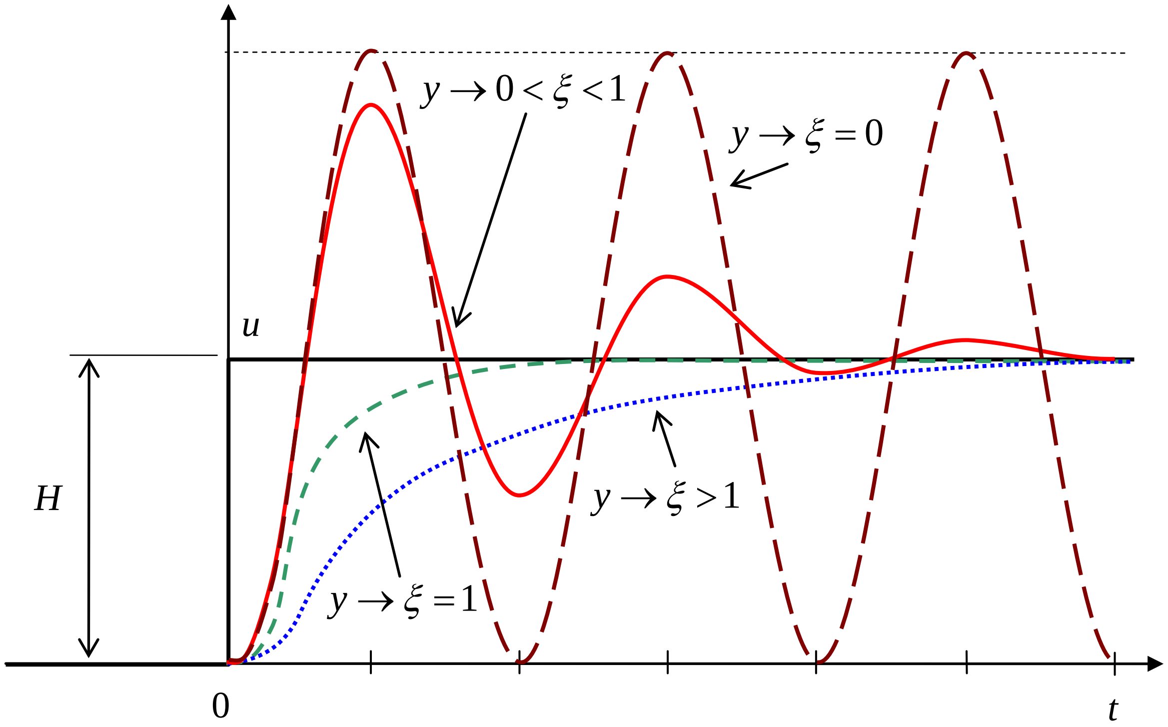
$0 < \xi < 1$

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left( H\sin\left(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\right)t + \frac{\xi\omega_n H}{\left(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\right)}\cos\left(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\right)t \right) + H$$

$\xi = 0$

$$y_T = -H\cos\omega_n t + H$$

La représentation de cette réponse est présentée sur la figure:




$\xi > 1$: Réponse sur-amortie.

$\xi = 1$: Réponse avec amortissement critique.

$0 < \xi < 1$: Réponse sub-amortie.

$\xi = 0$: Réponse sans amortissement.

# SOLUTION DES EQUATIONS EN REPRESENTATION D'ETAT.

Nous nous intéressons plus particulièrement à la solution de l'équation différentielle d'état (l'équation dynamique) :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Car une fois obtenu sa solution, le calcul de la sortie du système revient simplement a une opération algébrique.

La réponse du système de se type sera composé de deux partie : la réponse libre et la réponse forcée.

**Réponse Libre :** Dans le cas général où le modèle est temps-variant, il est nécessaire de définir la matrice de transition d'état qui intervient dans la solution de l'équation d'état.

Matrice de transition : La solution de l'équation d'état homogène (non commandée):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

où $A(t)$ est continue par rapport à $t$, est donnée par la réponse libre d'un système, qui est la réponse du système à ses seules conditions initiales :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \qquad \forall t \geq t_0$$

Où $\Phi(t,t0)$ est la matrice de transition, solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\Phi}\,(t,t_0) \;=\; A(t)\Phi(t,t_0) \qquad \forall\, t \;\geq\; t_0$$

La matrice de transition possède les propriétés suivantes.

- $\Phi(t_2,t_2)\Phi(t_1,t_0) \;=\; \Phi(t_2,t_0)$
- $\Phi(t,t_0)$ est inversible pour tout $t$ et tout $t0$
- $\Phi^{-1}(t,t_0) \;=\; \Phi(t_0,t) \qquad \forall\, t,t_0$

Dans le cas général d'un système temps-variant, la matrice de transition est rarement accessible littéralement, elle doit être souvent obtenue par intégration numérique. Pour les systèmes LTI, la matrice de transition peut être calculée de manière explicite.

La **réponse forcée** d'un système est la réponse du système au seul signal d'entrée et pour des conditions initiales nulles. Dans le cas d'un système représenté par son modèle d'état, elle est donnée par :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

A partir de la donnée de la matrice de transition, il est possible de déterminer la solution de l'équation dynamique d'état qui correspond à la réponse complète du système par application du principe de superposition. C'est-à-dire la somme de la réponse libre plus la réponse forcée.

La solution de l'équation dynamique d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

et la sortie s'écrit alors :

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

CAS PARTICULIER DES SYSTEMES LTI. <u>Solution dans le domaine temporel.</u>
Soit le modèle LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

complètement caractérisé par le triplet $(A,B,C,D)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie.

On définie l'**ordre** ($n$) du modèle comme la dimension du vecteur d'état.

Si la matrice de transmission directe $D = 0$ alors le modèle est dit **strictement propre** dans un autre cas il est dit **propre**.

Le modèle LTI homogène (non commandé) de condition initiale $x(t_0) = x_0$,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

constitué par une matrice d'équations de premier ordre, a pour matrice de transition :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

où il est possible d'obtenir la solution par le développement en série de Taylor :

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^it^i}{i!}$$

Sa réponse libre est donc donnée par :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

Attention : A différence des scalaires ($a.b = b.a$) les opérations matricielles ne sont pas commutatives ($A.B \neq B.A$), donc :

$$e^{(a+b)t} \neq e^{at}+e^{bt}$$

**Theoème de Cayley-Hamilton.**

Permet de calculer l'exponentiel matriciel à partir d'un nombre fini d'opérations. Ce théorème exprime que toute matrice carrée $A$ est solution de son équation caractéristique. On note $QA(s)$ le polynôme caractéristique de $A$ : $QA(s) = det(sI - A)$. Si $A$ est une matrice carrée de taille $n$, $QA(s)$ est un polynôme de degré $n$.

$$QA(s) = det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Le théorème de Cayley-Hamilton assure que $A$ vérifie :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$$

En d'autres termes, $A_n$ s'exprime comme une combinaison linéaire de puissances inférieures de $A$ :

$$A_n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_0 I$$

Par conséquent, il est possible d'exprimer

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At} = \Phi(t)$$

en ne faisant intervenir que des puissances de A inférieures strictement à $n$, c'est-à-dire, qu'il existe un jeu de coefficients $(\alpha 0, \alpha 1 \ldots \alpha n - 1)$ tels que :

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I$$

La **réponse forcée** d'un système LTI est donnée par :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Le modèle LTI,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

A pour solution à l'Équation dynamique d'état :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Et la réponse du système est :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

CAS PARTICULIER DES SYSTEMES LTI. Solution dans le domaine de Laplace.

Il est aussi possible de déterminer la matrice de transition en passant par la transformée de Laplace du système.

Soit le modèle LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Si on considère les conditions initiales égales a zéro, ce qui est le cas pour les transformées de Laplace, la solution de l'équation d'état est de la forme :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Il est possible de démontrer que :

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{\Phi(t)\} = [sI - A]^{-1}$$

Il est donc possible d'obtenir la solution de l'équation d'état avec la transformée inverse de Laplace de $\Phi(s)$ :

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$$

Exemple : On veut obtenir la matrice de transition du système linéaire représenté par la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Il est donc possible d'obtenir :

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \left[ s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta s} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(\mathrm{s}^2 + 3\mathrm{s} + 2)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & -\dfrac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la transformée inverse il faut décomposer les éléments en fractions, par exemple pour le premier élément de la matrice $(A_{11})$ :

$$\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Avec : $K_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$, donc :

$$K_1 = \left.\frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$$
$$K_{21} = \left.\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-2} = -1$$

La matrice s'écrit :

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

La matrice de transition du système est :

$$\Phi(\mathrm{t}) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Pour des conditions initiales connues, par exemple $x_1(0) = x_2(0) = 1$, il est possible de déterminer la valeur des états en tout temps :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(\mathrm{t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$