INTRODUCTION AUX SYSTEMES LINEAIRES

Cours 9. Commandabilité, observabilité, représentations minimales

La commandabilité et l'observabilité sont deux concepts développés pour la représentation d'état des systèmes qui permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Cependant leur concept peut être utilisé dans d'autres représentations.

COMMANDABILITE

La commandabilité est une caractéristique d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique si une ou plusieurs de ces dynamiques peuvent être modifiées par les entrées.

Définition

> Un état x_i est commandable en t_0 s'il est possible de d´eterminer $u(t)/[t_0\ t_f\ ]$ conduisant tout état initial $x_i(t_0)$ vers 0 en $t_0 \leq t_1 \leq t_f$.

Si cette propriété est vraie $\forall\, t_0$ et $\forall\, i = 1,\cdot\cdot\cdot n$ alors le système est complètement commandable.

Remarques

- Si un système n'est pas complètement commandable alors pour certaines conditions initiales il n'existe pas d'entrée de commande pouvant ramener le système à l'origine.

- La commandabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état.

Critère De Commandabilité (Kalman)

C'est un critère qui permet de définir la commandabilité d'un système LTI avec l'information des matrices A et B.
Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, $\mathcal{C}$ est de rang n,

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rang}([B \ \vdots \ AB \ \vdots \cdots \vdots \ A^{n-1}B]) = n$$

Remarque. La commandabilité d'un système de matrices caractéristiques (A,B) sera appelée commandabilité de la paire (A,B).

Rappel. Le rang d'une matrice A est: le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants, et peu se calculer par la taille du plus grand mineur non nul de A.

Exemple. pour le système mécanique étudié dans les cours précédents:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t)$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{M} \\ \dfrac{1}{M} & -\dfrac{C}{M^2} \end{bmatrix}$$

Comme :

$$\det \mathcal{C} = -\frac{1}{M^2} \neq 0 \;\Rightarrow \mathrm{rang}(\mathcal{C}) = 2$$

et $n = 2$, donc la représentation d'état est commandable.

Exemple 2 : pour le système thermique, étudié dans les cours précédents, avec :

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_C}-\frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V}-\frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pour simplifier le calcul on suppose que : $R_1=R_2=R_3=1; C_c=C_V=C_{Hg}=1$

On obtient les matrices :

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix};\ AB=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Comme : $\det\mathcal{C}=1\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(\mathcal{C})=3$ donc la représentation d'état du système est commandable.

Exemple 3 : Pour le système représenté par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour construire la matrice de commandabilité :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système est de rang 2 car les deux dernières lignes sont identiques, donc le système est : **non commandable**.

Remarque : il n'est pas nécessaire de construire la matrice $\mathcal{C}$ au delà de la taille $n \times n$.

OBSERVABILITE

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

Définition

Un état x_i est observable en t_0 s'il est possible de déterminer $x_i(t_0)$ connaissant $y(t)$ /$[t_0\ t_f]$.

Si cette propriété est vraie $\forall\ t_0$ et $\forall\ i\ =\ 1,\cdot\cdot\cdot,n$ alors le système est complètement observable.

Remarques : La notion d'observabilité est cruciale pour les systèmes où il est impossible de mesurer tout le vecteur d'état, et doit être estimé à partir des données fournies par la sortie.

Critère D'observabilité (Kalman)

La notion d' observabilité et fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C.

Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état, et de mesure

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

où $A \in R^{n\times n}$, $C \in R^{r\times n}$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité, $\mathcal{O}$ est de rang n :

$$\operatorname{rang}(\mathcal{O}) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

Exemple : pour le système mécanique étudié dans les cours précédents, avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$ le rang de $\mathcal{O} = 2$ donc le système est observable.

Exemple 2 : pour le système thermique, étudié dans les cours précédents, avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient les matrices :

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$ le rang de $\mathcal{O} = 3$ donc le système est observable.

NOTION DE DUALITE

Les notions d'observabilité et de commandabilité sont deux notions duales. Pour le montrer nous considérons les deux systèmes (S) et (S^*) définis par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \qquad & \dot{x}^* &= A^T x^*(t) + C^T u^*(t) \\ y &= Cx(t) & y^* &= B^T x^*(t) \end{aligned}$$

(S^*) est appelé système dual ou adjoint de (S).

Il est possible de démontrer que (S) est commandable si et seulement si (S^*) est observable et que (S) est observable si et seulement si (S^*) est commandable.

En effet, (S^*) est observable si et seulement si :

$$[\, B^T \vdots\; B^T A^T \vdots\; B^T (A^T)^2 \vdots \ldots \vdots\, B^T (A^T)^{n-1} \,]^T$$

est de rang n c'est-à-dire si et seulement si

$$[\, B \vdots\; AB \vdots\; A^2 B \vdots \ldots \vdots\; A^{n-1} B \,]^T$$

soit encore si et seulement si (S) est commandable.

THEORIE DE LA REALISATION

On appelle réalisation d' une matrice de transfert donnée $G(s) \in \mathbb{C}^{r\times m}$, toute représentation d'état LTI (A, B, C, D) telle que :

$$G(s) = C(s1 - A)^{-1}B + D$$

La réalisation (A, B, C, D) d'ordre minimal $n\,(x \in R^n)$ est dite réalisation minimale ou réalisation irréductible.

L'exemple suivant, montre que le problème de réalisation est très étroitement lié aux notions de commandabilité et d'observabilité. Soit :

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Les quatre représentations d'état suivantes sont des réalisations de $G(s)$.

- Non observable et non commandable :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [0 \quad 1]$$

- Observable et non commandable :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [0 \quad 1]$$

- Commandable et non observable :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = [1 \quad 1]$$

- Observable et commandable :

$$A_4 = [-2] \quad B_4 = [1] \quad C_4 = [1]$$

On observe que la réalisation 4 est minimale alors que les trois premières ne le sont pas.

L'exemple montre d'une les part que représentations d'état de l'exemple ne sont pas équivalentes et d'autre part que la simplification entre un pôle et un zéro est directement lié aux propriétés d'observabilité et de commandabilité de la réalisation.

Enfin, on en déduit le résultat suivant.
Une réalisation d'état (A, B, C, D) de $G(s)$ est minimale (irréductible) si et seulement si elle est commandable et observable. Dans ce cas, on utilise la notation :

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

LES FORMES CANONIQUES D'ETAT

Le fait de disposer de différentes représentations d'état pour un même système, car le vecteur d'état n'est pas unique, est un avantage qui va permettre d'utiliser des formes particulières de la représentation d'état appelées les formes canoniques.

On distingue trois grands types de formes canoniques :

- La forme diagonale ou quasi-diagonale de Jordan.
- La forme compagne de commande.
- La forme compagne d'observation.

Forme Modale ou Diagonale de Jordan.

Dans le cas où le transfert d'ordre n, strictement propre, possède des pôles $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ réels distincts (matrice $A \in R^{n\times n}$ a n valeurs propres distinctes), il est possible de décomposer la fonction de transfert en éléments simples :

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \left[c_0 + \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)} = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

Il est possible d'obtenir une réalisation, avec la matrice A sous la forme diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad c_n] \quad D = [c_0]$$

Dans le cas ou les pôles soient imaginaires, il est possible de faire la transformation suivante pour obtenir la matrice A réelle :

$$\begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Forme Quasi diagonale de Jordan

Dans le cas ou un transfert possède de pôles répétés $(1/(s-\lambda)^{n'})$, celui-ci est irréductible a un schéma parallèle car la décomposition en éléments simples est :

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n}=\left[\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^{n'}}+\cdots+\frac{c_{n'}}{(s-\lambda_1)^{n'}}+\frac{c_{n'+1}}{s-\lambda_{n'+1}}+\cdots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^{n'}\prod_{i=n'+1}^{n}(s-\lambda_i)}=\sum_{i=1}^{n'}\frac{c_i}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{i=n'+1}^{n}\frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

Il est possible d'obtenir une réalisation, avec la matrice A sous la forme dite Quasi diagonale de Jordan:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 1 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & & \vdots\\ & & & \lambda_{n'+1} & & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \lambda_n\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & & \cdots & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

Forme compagne pour la commande

Dans le cas où le transfert d'ordre n, strictement propre :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Il est possible d'obtenir une représentation dite Compagne pour la Commande de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad b_1]$$

Pour obtenir cette représentation on va multiplier et diviser la fonction de transfert par une variable intermédiaire Z(s) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n) Z(s)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Z(s)}$$

Cette opération ne modifie pas les relations dans le système. On en déduit deux relations :

$$Y(s) = (b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n) Z(s)$$
$$U(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Z(s)$$

La transformé inverse de Laplace des deux relations est :

$$y = b_1 D^{n-1} z + \cdots + b_n z$$
$$u = D^n z + a_1 D^{n-1} z + \cdots + a_n z$$

Si on choisi les variables d'état comme :

$$x_1 = z$$
$$x_2 = Dz$$

$$x_n = D^{n-1} z$$

Avec ses variables d'état on obtient les équations d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_4 = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u$$

Et l'équation de sortie :

$$y = b_1 x_n + \cdots + b_n x_1$$

Forme compagne d'observation

Dans le cas où le transfert d'ordre n, strictement propre :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}$$

Il est possible d'obtenir une représentation dite Compagne d'observation de la forme :

$$A=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & & 0\\ -a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ 0\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Pour cela on écrit l'équation différentielle que provient de la fonction de transfert :

$$D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny=b_1D^{n-1}u+\cdots+b_{n-1}Du+b_nu$$

Qui peur se réorganiser de la forme :

$$D^ny+(a_1D^{n-1}y-b_1D^{n-1}u)+\cdots+(a_{n-1}Dy-b_{n-1}Du)=b_nu-a_ny$$

Si on choisi comme variables d'état :

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1 + a_1 y - b_1 u$$
$$\vdots$$
$$x_n = \dot{x}_{n-1} + a_{n-1} y - b_{n-1} u$$

On obtient un une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - x_2 + b_1 u$$
$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - x_3 + b_2 u$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} = -a_{n-1} y - x_n + b_{n-1} u$$
$$\dot{x}_n = D^n y + (a_1 D^{n-1} y - b_1 D^{n-1} u) + \cdots + (a_{n-1} D y - b_{n-1} D u) = -a_n x_1 + b_n u$$

Et l'équation de sortie :

$$y = x_1$$

Il est aussi possible d'obtenir la forme canonique ou de passer d'une forme a une autre avec un changement de variable linéaire.

Exemple : Pour le système représenté par l'équation différentielle suivante :

$$D^3y + 6D^2y + 11Dy + 6y = 6u$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+3}$$

Avec : $c_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$,

donc :

$$c_1 = \left.\frac{6(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = 3;\ c_2 = \left.\frac{6(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-2} = -6;\ c_3 = \left.\frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-3} = 3$$

La représentation d'état sous la forme canonique de Jordan est :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état sous la forme Compagne de Commande est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état sous la forme Compagne d'Observation est :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercices :

Obtenir des réalisations pour les fonctions de transfert suivantes, déterminer leur commandabilité et observabilité et présenter les réalisations sous les formes canoniques étudies.

1. $G(s) = \frac{s^2-s-2}{s^3+10s^2+29s+20}$

2. $G(s) = \frac{s^3+10s^2+29s+20}{s^4+8s^3+23s^2+28s+12}$

3. $G(s) = \frac{s+1}{s^4-5s^2+4}$

4. $G(s) = \frac{s+1}{s^3+11s^2+36s+36}$

5. $G(s) = \frac{s^2-s-2}{s^4-5s^2+4}$

6. $G(s) = \frac{s+1}{s^4+8s^3+23s^2+28s+12}$

Devoir : lire chapitre 3 de [9]