Tema 4

FORMAS DIFERENCIALES E INTEGRALES DE LAS LEYES FUNDAMENTALES

Introducción

La mecánica de fluidos al igual que las otras disciplinas físicas se basa en una serie de leyes fundamentales.
Estas leyes son de hecho una adaptación de las leyes fundamentales de sistemas físicos.
Un sistema se define como: "Un conjunto arbitrario de materia de identidad fija".
La dificultad principal que existe, para aplicar las leyes fundamentales de los sistemas físicos a un fluido, es la de seguir a una misma masa de fluido en todo momento. Además por lo general en la mecánica de fluidos interesa más el efecto que causa el movimiento de un fluido en un volumen o dispositivo determinado que lo que puede ocurrir a una masa dada.
Es por ello la conveniencia de plantear las ecuaciones para un volumen de control y no para un sistema.
La determinación de las ecuaciones para un volumen de control se hace a partir de las ecuaciones o las leyes fundamentales para un sistema que se enuncian a continuación.

Leyes fundamentales para un sistema

Conservación de la masa

Esta establece que para un sistema la masa (M) es constante. Esto se puede expresar matemáticamente como sigue:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = 0$$

Donde:

$$M_{sistema} = \int_{masa} dm = \int_{\forall} \rho d\forall$$

Conservación de la cantidad de movimiento

También conocida como segunda Ley de Newton. Esta establece para un sistema que se mueve respecto a un marco inercial de referencia que:
"La suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual a la rapidez de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal".
Esto lo podemos expresar matemáticamente como sigue:

$$\sum \vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sistema}$$

Donde:

$\vec{F}$: Fuerzas que actúan sobre el sistema

$\vec{P}$: Cantidad de movimiento lineal. Este viene dado por:

$$\vec{P}_{sistema} = \int_{masa} \vec{V} dm = \int_{\forall} \vec{V} \rho d\forall$$

Conservación de la cantidad de movimiento angular

También conocida como momento de la cantidad de movimiento.
Este concepto es similar al anterior pero referido a sistema en rotación. Este establece que:
"La rapidez con que cambia el momento angular del sistema es igual a la suma de todos los momentos de torsión que actúan sobre él".
Esto se puede expresar matemáticamente como sigue:

$$\sum \vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{sistema}$$

Donde:

$\vec{T}$: Momento de torsión.

$\vec{H}$: Momento angular. Este viene dado por:

$$\vec{H}_{sistema} \int_{masa} \vec{r} \times \vec{V} dm = \int_{V\!\!\!/} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV\!\!\!/$$

El momento de torsión resultante se puede producir por la acción de fuerzas superficiales, fuerzas volumétricas y torsores puntuales (flechas), es decir:

$$\sum \vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{masa} \vec{r} \times \vec{g} dm + \vec{T}_{flecha}$$

Primera ley de la termodinámica

Esta constituye una expresión de conservación de la energía para un sistema, y establece que: “El cambio de calor mas el cambio del trabajo es igual al diferencial de energía en el sistema”.
Esto se expresa matemáticamente como:

$$\delta Q + \delta W = dE$$

Donde:

Q: calor
W: trabajo
E: energía

Esta expresión se puede escribir teniendo en cuenta la rapidez de cambio respecto al tiempo como:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{sistema}$$

Donde la energía total del sistema esta dada por:

$$E = \int_{masa} e dm = \int_{V\!\!\!/} e \rho dV\!\!\!/$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Donde:

u: Energía interna
V: velocidad, produce energía cinética
z: cota, produce energía potencial
$\dot{Q}$: flujo de calor, y se toma como positivo cuando el calor se agrega al sistema desde sus alrededores
$\dot{W}$: rapidez de trabajo desarrollado, se toma como positivo cuando los alrededores realizan trabajo sobre el sistema.

Segunda ley de la termodinámica

Esta ley se puede enunciar para un sistema de la siguiente forma:
“Si la cantidad de calor δQ, se transmite a un sistema que se encuentra a la temperatura T, la segunda ley de termodinámica establece que el cambio de la entropía dS, del sistema esta dado por:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

O expresado el cambio de entropía respecto al tiempo:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{1}{T}\dot{Q}$$

Donde la entropía del sistema esta dada por:

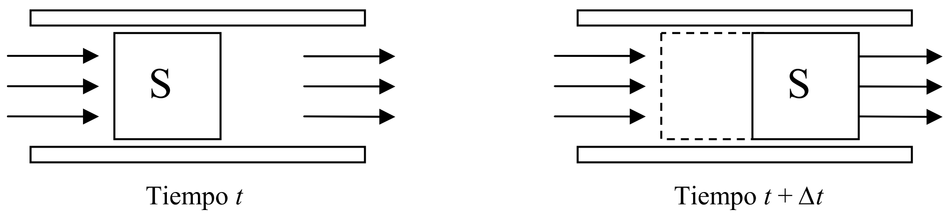
$$S = \int_{masa} s\,dm = \int_{\forall} s\rho\, d\forall$$

Forma Integral de las leyes fundamentales para un volumen de control

A continuación se presentaran la deducción de las leyes fundamentales de la forma integral para un volumen de control a partir de las leyes fundamentales para un sistema.

Conservación de la masa

La diferencia fundamental que existe entre un sistema y un volumen de control es que en un sistema la cantidad de materia es fija y por lo tanto la masa no varía, es constante, mientras que en un volumen de control existe una cantidad de materia que sale y otra que entra.



Si evaluamos esta situación y consideramos el hecho que la cantidad de materia que entra no necesariamente es igual a la que sale, entonces podremos tener un incremento o disminución de la masa o el volumen de control.
Por lo tanto podemos expresar la ley de la conservación de la masa para un volumen de control de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}\text{gasto másico}\\ \text{que entra}\\ \text{al VC}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{gasto másico}\\ \text{que sale}\\ \text{del VC}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Rapidez de cambio}\\ \text{de la masa dentro}\\ \text{del VC}\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}\text{gasto neto}\\ \text{a travez de}\\ \text{la SC}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Rapidez de cambio}\\ \text{de la masa dentro}\\ \text{del VC}\end{bmatrix} = 0$$

Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall = 0$$

Donde:

$\vec{V}$: velocidad respecto a la superficie de control

$\vec{A}$: área de la superficie de control

$\rho \vec{V} d\vec{A}$: es positivo para flujo hacia fuera, negativo para flujo hacia adentro y cero si el flujo es tangente.

La ecuación anterior se puede simplificar en algunos casos especiales.
Si el flujo es incompresible: $\rho = \text{ctte}$

$$\rho \int_{SC} \vec{V} d\vec{A} + \rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} d\forall = 0$$

Como el volumen de control es fijo entonces:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} d\forall = \rho \frac{\partial}{\partial t}\forall = 0$$

Por lo tanto, siendo ρ una constante, la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$\int_{SC}\vec{V}d\vec{A}=0 \text{ Flujo incompresible}$$

La cual se puede integrar para velocidades promedio en entradas y salidas al volumen de control, obteniendo:

$$\sum Q=\sum \overline{V}A=0$$

La segunda forma de simplificar la ecuación es suponiendo el flujo estacionario. En este caso por definición ninguna de las variables varía con el tiempo, esto implica que el cambio de la masa en el volumen de control a través del tiempo debe ser cero, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall=0$$

Por lo tanto la ecuación para la conservación de la masa se puede escribir como:

$$\int_{SC}\rho\vec{V}d\vec{A}=0 \text{ Flujo estacionario}$$

La cual se puede integrar para velocidades promedio en entradas y salidas al volumen de control, obteniendo:

$$\sum \dot{m}=\sum \rho\overline{V}A=0$$

Generalización

De la transformación de leyes de un sistema a un volumen de control

Si observamos las ecuaciones para un sistema, podemos observar que todas las propiedades estudiadas son función de la masa, por lo tanto podemos hacer una generalización de la ecuación de la conservación de la masa de la siguiente forma: Vamos a utilizar el símbolo *N* para representar cualquier propiedad extensiva del sistema y *n* para cualquier propiedad intensiva.

De esta forma para todas las propiedades en estudio podemos escribir la ecuación de la forma siguiente:

$$N_{sistema}=\int_{masa}n\,dm=\int_{\forall}n\rho d\forall$$

Observamos que esta ecuación representa a todas las leyes fundamentales para un sistema si consideramos que para:

- La conservación de la masa:
  $$N=M;\quad n=1$$
- La segunda ley de Newton:
  $$N=\vec{P};\quad n=\vec{V}$$
- La conservación del momento de la cantidad de movimiento:
  $$N=\vec{H};\quad n=\vec{r}\times\vec{V}$$
- La primera ley de la termodinámica:
  $$N=\dot{E};\quad n=e$$
- La segunda ley de la termodinámica:
  $$N=S;\quad n=s$$

Observando la transformación de la ecuación de conservación de la masa podemos escribir una forma generalizada de esta como:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{sist}}_{\text{sistema}}\quad\rightarrow\quad\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}n\rho d\forall+\int_{SC}n\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{\text{volumen de control}}$$

La expresión anterior puede ser utilizada como expresión general para determinar las ecuaciones para un volumen de control a partir de las ecuaciones para u sistema. El significado físico de cada uno de los términos es el siguiente:

$\left.\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{sist}$: Rapidez con que cambia cualquier propiedad extensiva *N* del sistema

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}n\rho d\forall$: Rapidez con que cambia cualquier propiedad extensiva *N* en el volumen de control

$\int_{SC} n\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$: Flujo neto de cualquier propiedad extensiva N a través de la superficie de control.

Conservación de la cantidad de movimiento

También conocida como segunda Ley de Newton.
Partiendo de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento para un sistema:

$$\sum\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sistema} \text{, Donde: } \vec{P}_{sistema} = \int_{masa}\vec{V}dm = \int_{V\!\!\!/}\vec{V}\rho dV\!\!\!/$$

Obtendremos las expresiones para un volumen de control, esto bajo tres condiciones diferentes:

Para un volumen de control inercial

$$N = \vec{P}; \quad n = \vec{V}$$

Por lo tanto la relación entre el sistema y el volumen de control esta dada por:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)_{sist}}_{\text{sistema}} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{\text{volumen de control}}$$

Como en el instante de tiempo en que se realiza el estudio el sistema y el volumen de control coinciden, entonces:

$$\vec{F}_{Sist} = \vec{F}_{VC} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$$

Donde:

$\vec{F}_S$: Fuerzas superficiales

$\vec{F}_B$: Fuerzas volumétricas

Tendremos que la ecuación para la conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control será:

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Esta ecuación establece que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control inercial es igual a la rapidez con que cambia la cantidad de movimiento dentro del volumen de control más el flujo neto de cantidad de movimiento que atraviesa la superficie de control.
La ecuación de cantidad de movimiento es una ecuación vectorial y por lo tanto esta se puede expresar en función de sus componentes:

$$\sum\vec{F}_x = \vec{F}_{Sx} + \vec{F}_{Bx} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}u\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC}u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\sum\vec{F}_y = \vec{F}_{Sy} + \vec{F}_{By} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}v\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC}v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\sum\vec{F}_z = \vec{F}_{Sz} + \vec{F}_{Bz} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}w\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC}w\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Donde *u, v, w* son las componentes de la velocidad.
Al igual que en el caso de la conservación de la masa la ecuación se puede simplificar en ciertas condiciones.
Si el flujo es estacionario, el cambio de la propiedad en el volumen de control es cero, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\rho dV\!\!\!/ = 0$$

Por lo tanto la ecuación se simplifica como:

$$\sum\vec{F} = \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Si el volumen de control tiene entradas y salidas en las cuales se puede suponer el flujo uniforme y estable, entonces la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se puede expresar como:

$$\sum \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i A_i \vec{V}_i \left(\vec{V}_i \cdot \hat{n}\right)$$

Donde:

N: es el número de entradas y salidas de flujo

$\hat{n}$: vector unitario del área en las entradas y salidas.

En una entrada $\vec{V} \cdot \hat{n} = -V$ porque el vector unitario apunta hacia fuera.

En una salida $\vec{V} \cdot \hat{n} = V$ porque el vector unitario apunta hacia adentro.

Si el sistema tiene una sola entrada y una sola salida:

$$\sum \vec{F} = \rho_2 A_2 V_2 \vec{V}_2 - \rho_1 A_1 V_1 \vec{V}_1$$

Y como por continuidad:

$$\dot{m} = \rho Q = \rho_2 A_2 V_2 = \rho_1 A_1 V_1$$

Esta se puede escribir en su forma simplificada:

$$\sum \vec{F} = \rho Q \left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$$

Nótese que la ecuación de momentum es una ecuación vectorial.

Para un volumen de control que se mueve con velocidad constante

Cuando el volumen de control se mueve con velocidad constante, no tiene aceleración, y por lo se trata también de un volumen de control inercial, al cual se le puede aplicar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento tal como fue escrita en el aparte anterior siempre y cuando se cumpla lo siguiente:

- Todas las velocidades se miden respecto al volumen de control.
- Todas las derivadas respecto al tiempo se miden respecto al volumen de control.

Es decir deben utilizarse **velocidades relativas** al volumen de control.

Para un volumen de control con aceleración rectilínea

Al igual que cuando el volumen de control se mueve con velocidad constante, el primer punto a considerar es que todas las velocidades deben medirse respecto al volumen de control, es decir velocidades relativas.

Vamos a partir de la ecuación de cantidad de movimiento para un sistema:

$$\sum \vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sistema} = \frac{d}{dt}\int_{masa} \vec{V} dm = \int_{masa} \frac{d\vec{V}}{dt} dm = \int_{masa} \vec{a} dm$$

Podemos expresar la aceleración $\vec{a}$ del sistema como sigue:

$$\vec{a} = \vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf}$$

Donde:

$\vec{a}$: Aceleración rectilínea del sistema respecto al marco de referencia inercial

$\vec{a}_{xyz}$: Aceleración rectilínea del sistema respecto a un marco de referencia no inercial.

$\vec{a}_{rf}$: Aceleración rectilínea del sistema de referencia no inercial *xyz* respecto al sistema inercial.

Por lo cual se puede escribir la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$\sum \vec{F} = \int_{masa} \left(\vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf}\right) dm$$

$$\sum \vec{F} - \int_{masa} \vec{a}_{rf} dm = \int_{masa} \vec{a}_{xyz} dm$$

Donde $\vec{a}_{xyz} = \dfrac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}$, por lo tanto:

$$\sum \vec{F} - \int_{masa} \vec{a}_{rf} dm = \int_{masa} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} dm$$

O lo que es lo mismo:

$$\sum \vec{F} - \int_{V\!\!\!/} \vec{a}_{rf}\rho dV\!\!\!/ = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{sistema}$$

Donde:

$$\vec{P}_{xyz} = \int_{V\!\!\!/} \vec{V}_{xyz}\rho dV\!\!\!/$$

Utilizando la generalización antes expresada, para la transformación de una ecuación de sistema a una para volumen de control tendremos:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial \vec{P}_{xyz}}{\partial t}\right)_{sist}}_{\text{sistema}} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho \vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}}_{\text{volumen de control}}$$

Y dado a que en un instante t_0 el sistema coincide con el volumen de control entonces:

$$\sum \vec{F}_{sist} - \int_{V\!\!\!/(sist)} \vec{a}_{rf}\rho dV\!\!\!/ = \sum \vec{F}_{VC} - \int_{VC} \vec{a}_{rf}\rho dV\!\!\!/$$

Luego la expresión para la conservación de la cantidad de movimiento para un volumen de control con aceleración rectilínea será:

$$\sum \vec{F} - \int_{VC} \vec{a}_{rf}\rho dV\!\!\!/ = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho \vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Donde:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$$

Y las fuerzas volumétricas pueden expresarse como:

$$\vec{F}_B = \int_{VC} \vec{B}\rho dV\!\!\!/$$

Obsérvese que la ecuación encontrada corresponde a una ecuación vectorial, y por lo tanto puede escribirse mediante las ecuaciones escalares de sus componentes.

Conservación de la cantidad de movimiento angular

También conocida como momento de la cantidad de movimiento.

La ecuación para un sistema se puede expresar matemáticamente como sigue:

$$\sum \vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{sistema} \text{; Donde: } \vec{H}_{sistema}\int_{masa} \vec{r}\times\vec{V}dm = \int_{V\!\!\!/} \vec{r}\times\vec{V}\rho dV\!\!\!/$$

Y el momento de torsión resultante es:

$$\sum \vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{masa} \vec{r}\times\vec{g}dm + \vec{T}_{flecha}$$

Para un volumen de control inercial

Utilizando la expresión generalizada para obtener la ecuación de un volumen de control a partir de la ecuación de un sistema y con:

$$N = \vec{H}\ ; \quad n = \vec{r}\times\vec{V}$$

Obtenemos:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_{sist}}_{\text{sistema}} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}\rho dV\!\!\!/ + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}}_{\text{volumen de control}}$$

Siendo el momento torsor del sistema igual al del volumen de control cuando estos coinciden en un tiempo t_0.

$$\sum \vec{T}_{sist} = \sum \vec{T}_{VC} = \vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{masa} \vec{r}\times\vec{g}dm + \vec{T}_{flecha}$$

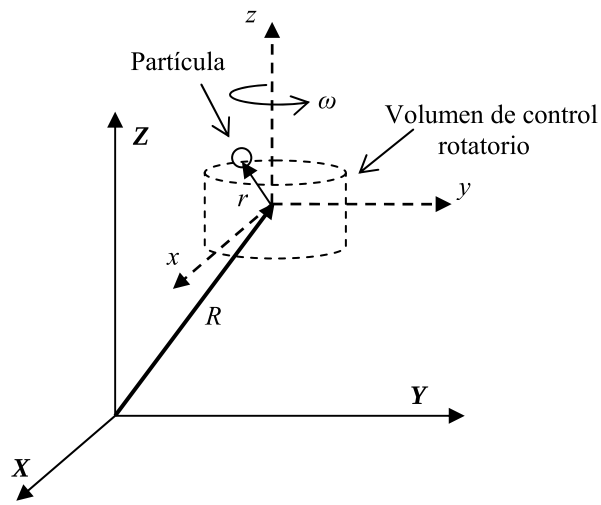
Por lo cual la ecuación para el momento de la cantidad de movimiento en un volumen de control inercial es:

$$\vec{r}\times\vec{F}_S+\int_{masa}\vec{r}\times\vec{g}dm+\vec{T}_{flecha}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{r}\times\vec{V}\rho d\forall+\int_{SC}\vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

El lado izquierdo de la ecuación representa la suma de todos lo momentos de torsión que actúan sobre el volumen de control. El lado derecho representa la rapidez con que cambia el momento angular dentro del volumen de control, más la rapidez con que fluye el momento angular a través de la superficie de control.

Para un volumen de control rotatorio

Consideremos las coordenadas del volumen de control rotatorio tal como se muestra en la figura.



Estudiemos primero la expresión para un sistema.

En este caso:

$$\vec{H}_{sistema}=\int_{masa}\left(\vec{R}+\vec{r}\right)\times\vec{V}dm=\int_{\forall}\left(\vec{R}+\vec{r}\right)\times\vec{V}\rho d\forall$$

Si consideramos que $\vec{R}=0$, es decir que el sistema gira en torno al origen de coordenadas, de nuestros ejes de referencia, nos queda:

$$\vec{H}_{sistema}=\int_{masa}\vec{r}\times\vec{V}dm=\int_{\forall}\vec{r}\times\vec{V}\rho d\forall$$

Por lo tanto:

$$\sum\vec{T}_{sist}=\frac{d}{dt}\int_{masa}\vec{r}\times\vec{V}dm$$

Siendo la masa del sistema constante:

$$\sum\vec{T}_{sist}=\int_{masa}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)dm=\int_{masa}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{V}+\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right)dm$$

Donde:

$$\vec{V}=\vec{V}_{rf}+\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si el sistema posee solo rotación $V_{rf}=0$, entonces el primer término de la ecuación queda:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=0$$

Por lo tanto la ecuación se reduce a:

$$\sum\vec{T}_{sist}=\int_{masa}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right)dm=\int_{masa}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)dm$$

Por otro lado se debe tener cuidado al calcular el término $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ya que al ser un sistema rotatorio cambiará tanto la posición como la orientación de sus vectores unitarios *i, j, k*, por lo tanto:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(xi+yj+zk\right)=i\frac{dx}{dt}+x\frac{di}{dt}+j\frac{dy}{dt}+y\frac{dj}{dt}+k\frac{dz}{dt}+z\frac{dk}{dt}$$

Donde:

$$\vec{V}_{xyz} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$: Velocidad relativa al sistema.

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt}$$: Velocidad de rotación.

Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Siendo la velocidad absoluta del sistema:

$$\vec{V} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Luego:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} + \frac{d\vec{V}_{rf}}{dt}$$

Donde en forma similar al término $\frac{d\vec{r}}{dt}$, el término $\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}$, por ser medido respecto al mismo marco de referencia, se expresa como:

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} = \vec{a}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}$$

$$\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Y

$$\frac{d\vec{V}_{rf}}{dt} = \vec{a}_{rf}$$

Sustituyendo todo lo anterior en la expresión de la aceleración obtenemos:

$$\vec{a} = \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{a}_{rf}$$

El significado físico de cada término es:

$\vec{a}$: Aceleración rectilínea de la partícula respecto a un marco de referencia fijo.

$\vec{a}_{rf}$: Aceleración rectilínea absoluta de un marco de referencia que se mueve respecto a un marco de referencia fijo. Si $\vec{V}_{rf} = 0$ por ser rotación pura: $\vec{V} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{r}$ y $\vec{a}_{rf} = 0$.

$\vec{a}_{xyz}$: Aceleración rectilínea de la partícula respecto a un marco de referencia móvil.

$2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}$: Aceleración de Coriolis debido al movimiento de la partícula dentro del marco de referencia móvil.

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$: Aceleración centrípeta debida a la rotación del marco de referencia.

$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$: Aceleración tangencial debido a la aceleración angular del marco de referencia.

Sustituyendo la expresión de la aceleración en la ecuación de momento de la cantidad de movimiento tendremos:

$$\sum\vec{T}_{sist} = \int_{masa}\left(\vec{r}\times\left(\vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right)\right)dm$$

La cual se puede transformar separando el término $\vec{a}_{xyz}$ en:

$$\sum\vec{T}_{sist} - \int_{masa}\left(\vec{r}\times\left(2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right)\right)dm = \int_{masa}\left(\vec{r}\times\vec{a}_{xyz}\right)dm$$

$$= \int_{masa}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\right)dm = \frac{d}{dt}\int_{masa}\left(\vec{r}\times d\vec{V}_{xyz}\right)dm = \left.\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt}\right)_{sist}$$

Con la expresión para obtener la ecuación de momento de cantidad de movimiento de un volumen de control a partir de la ecuación de un sistema:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)_{sist}}_{\text{sistema}} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{\text{volumen de control}}$$

Y:

$$\sum \vec{T}_{sist} = \sum \vec{T}_{VC} = \vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{masa} \vec{r}\times\vec{g}dm + \vec{T}_{flecha}$$

Tendremos que la ecuación resultante para el momento de la cantidad de movimiento en un sistema de control rotatorio es:

$$\vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{VC} \vec{r}\times\vec{g}\rho d\forall + \vec{T}_{flecha} - \int_{masa}\left(\vec{r}\times\left(2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right)\right)\rho d\forall$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Primera ley de la termodinámica

Esta constituye una expresión de conservación de la energía para un sistema.
Para un sistema es:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{sistema} \text{; con: } E = \int_{masa} edm = \int_{\forall} e\rho d\forall \text{ y } e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Utilizando la expresión generalizada para obtener la ecuación de un volumen de control a partir de la de un sistema y con $N = \dot{E}; \quad n = e$, tenemos:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial \dot{E}}{\partial t}\right)_{sist}}_{\text{sistema}} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{\text{volumen de control}}$$

Como el sistema y el volumen de control coinciden en un tiempo t_0.

$$\left(\dot{Q} + \dot{W}\right)_{sistema} = \left(\dot{Q} + \dot{W}\right)_{VC}$$

Por lo tanto:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Al igual que para las otras leyes si el flujo es estacionario:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall = 0$$

Por lo que la ecuación nos quedaría en este caso como:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \int_{SC} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

El término del trabajo requiere en este caso un estudio particular.
Este tendrá signo positivo cuando el volumen de control efectúa trabajo sobre sus alrededores y está compuesto por:

$$\dot{W} = \dot{W}_S + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{corte} + \dot{W}_{otros}$$

Estudiaremos por separado cada uno de estos términos:

1. Trabajo del eje ($\dot{W}_S$)

Representa la rapidez de transferencia de trabajo del eje a través de la superficie de control

2. Trabajo efectuado por esfuerzos normales a la superficie de control ($\dot{W}_{normal}$)

Para generar trabajo se requiere que una fuerza produzca un desplazamiento por lo tanto al moverse una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de in desplazamiento infinitesimal $d\vec{s}$ el trabajo efectuado será:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Para obtener la rapidez con que una fuerza efectúa trabajo lo dividimos entre Δt, evaluando el límite cuando este tiende a cero:

$$\dot{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Siendo las fuerzas efectuadas por esfuerzos normales iguales a:

$$d\vec{F} = \sigma_{nn} d\vec{A}$$

Como el trabajo externo a la superficie de control es positivo entonces:

$$\dot{W}_{normal} = \int_{SC} \sigma_{nn} d\vec{A} \cdot \vec{V} = \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

3. Trabajo efectuado por esfuerzos de corte en la superficie de control ($\dot{W}_{corte}$)

En forma similar a los esfuerzos normales podemos decir que:

$$d\vec{F} = \vec{\tau} d\vec{A}$$

Luego, como el trabajo es externo al volumen de control se tiene:

$$\dot{W}_{corte} = \int_{SC} \vec{\tau} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Este término se puede a su vez separar en tres términos a saber:

$$\dot{W}_{corte} = \int_{A(ejes)} \vec{\tau} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A(\sup salida)} \vec{\tau} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A(accesos)} \vec{\tau} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

El primer término representa a $\dot{W}_{eje}$, que ya fue considerado.

En las superficies sólida $\vec{V} = 0$, por lo cual el segundo término es cero.
Finalmente:

$$\dot{W}_{corte} = \int_{A(accesos)} \vec{\tau} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

4. Trabajos de otro tipo ($\dot{W}_{otro}$)

Se trata en este caso de trabajos que efectúan otro tipo de fuerzas, como por ejemplo las electromagnéticas que por lo general no intervienen en la mecánica de fluidos pero que se incluyen para tener una formulación general.

Finalmente podemos escribir el termino de trabajo como:

$$\dot{W} = \dot{W}_S + \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{corte} + \dot{W}_{otros}$$

La ecuación de la primera ley para un volumen de control será entonces:

$$\dot{Q} + \dot{W}_S + \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{corte} + \dot{W}_{otros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Reorganizando los términos tendremos que:

$$\dot{Q} + \dot{W}_S + \dot{W}_{corte} + \dot{W}_{otros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Siendo $\rho = \frac{1}{v}$ podemos escribir:

$$\int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{SC} \sigma_{nn} \rho v \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Luego la ecuación de la primera ley se puede expresar como:

$$\dot{Q}+\dot{W}_S+\dot{W}_{corte}+\dot{W}_{otros}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall+\int_{SC}(e-\sigma_{nn}v)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Como en la mayor parte de los casos de interés en ingeniería $\sigma_{nn}=-P$, la ecuación de la primera ley se transforma en:

$$\dot{Q}+\dot{W}_S+\dot{W}_{corte}+\dot{W}_{otros}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall+\int_{SC}(e+Pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Y sustituyendo el término de energía interna tenemos:

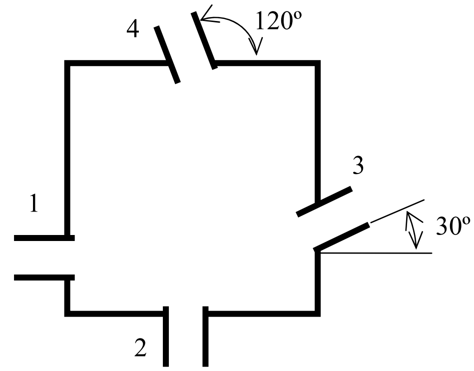
$$\dot{Q}+\dot{W}_S+\dot{W}_{corte}+\dot{W}_{otros}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho d\forall+\int_{SC}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz+Pv\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Ecuación que para un flujo estable, propiedades uniformes, una sola entrada y una sola salida al volumen de control se transforma en la ecuación de Bernoulli generalizada que se dedujo en el tema 3:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+h_W-h_P=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

Ejercicios

Ejercicio 1



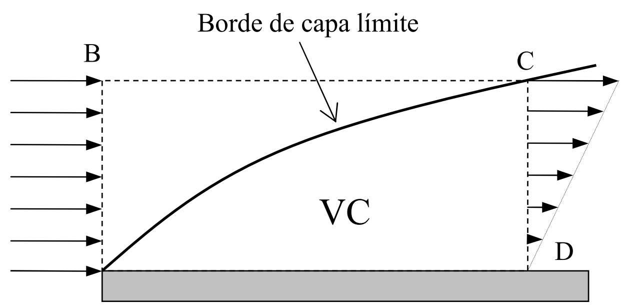
Considere el flujo estacionario de agua a través del dispositivo mostrado en la figura. Las áreas son A_1 = 0.2 pie ^{2}, A_2 = 0.5 pie ^{2} y $A_3 = A_4$ = 0.4 pie ^{2}. El flujo de masa que sale a través de la sección 3 está dado como 3.88 slug/s. El gasto volumétrico que entra a través de la sección 4 está dado como 1 pie^3/s y la velocidad del fluido en la sección 1 es 10 pies/s. Si se supone que las propiedades son uniformes en cada una de las secciones por donde entra y sale flujo, determinar la velocidad promedio del fluido en a sección 2.
P_{agua} = 1.94 slug/pie^3

Ejercicio 2

Un tanque cuyo volumen es 0.05 m^3 contiene aire a la presión de 800 KPa (absoluta) y 15 ºC. En el instante t = 0, el aire se escapa del tanque a través de una válvula cuya área de la sección transversal es 65 mm^2. La velocidad del aire a través de la válvula es 311 m/s y su densidad es 6.13 Kg/m^3. Las propiedades en el resto del tanque pueden suponerse uniformes. Determinar el cambio instantáneo de la densidad en el tanque para el instante t = 0.

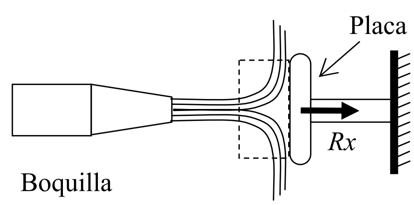
Ejercicio 3

El aire en contacto directo con una frontera sólida estacionaria tiene velocidad cero, es decir, no existe deslizamiento en la frontera. De este modo, el flujo sobre la placa plana se adhiere a la superficie y forma una capa límite, como se ilustra en la figura. Si el flujo antes de llegar a la placa es uniforme y su velocidad es $V = V_0$ = 30 m/s. Suponiendo que la distribución de velocidades en la sección CD puede aproximarse a una línea recta ($V_C = V_0$, V_D = 0), siendo el espesor de la capa límite en esa sección de 5 mm y el ancho de la placa de 0.6 mm, calcule el gasto másico a través de la superficie BC del volumen de control ABCD.
P_{aire} = 1.24 Kg/m^3.



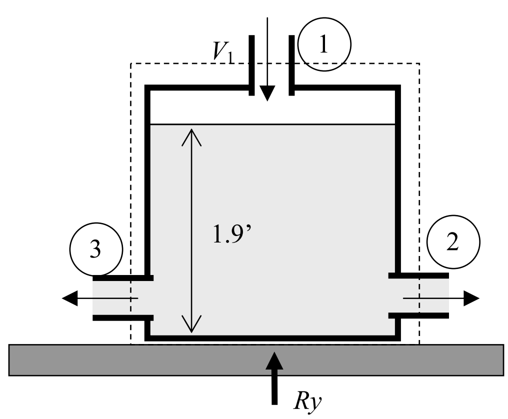
Ejercicio 4

Un chorro de agua incide sobre una placa plana como se indica en la figura. La velocidad del agua a la salida de la boquilla es de 15 m/s relativa a la boquilla, y el área de la boquilla es de 0.01 m^2. Si se supone que le agua incide perpendicularmente sobre la placa, calcular la fuerza horizontal que actúa sobre esta.



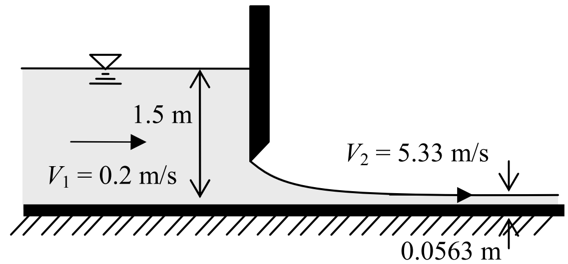
Ejercicio 5

Un recipiente metálico de 2 pies de altura con una sección transversal interna de 1 pie^2 de área pesa 5 lbf cuando se encuentra vacío. El recipiente se coloca sobre una báscula permitiéndose que el agua salga por dos aberturas por los lados del tanque mientras se llena por la parte superior, como se muestra en la figura. La altura del agua en el tanque es de 1.9 pies en condiciones de estado estacionario. La presión es atmosférica en todas las aberturas. Determinar la lectura de la báscula.
V_1 = 20 pie/s; A_1 = 0.1 pie^2; $A_2 = A_3$ = 0.1 pie^2.



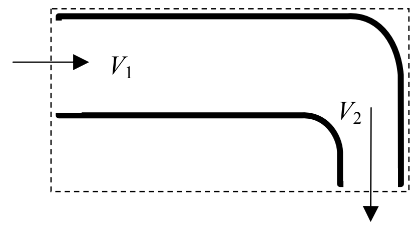
Ejercicio 6

El agua de un canal descubierto fluye por debajo de la compuerta de descarga o esclusa, como se muestra en la figura. El flujo es incompresible y uniforme en las secciones 1 y 2. Puede suponerse que en estas secciones la distribución de presiones es hidrostática porque las líneas de corriente del flujo son esencialmente rectilíneas en dichas secciones. Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre la compuerta de 1 m de ancho.



Ejercicio 7

A través del codo reductor de 90º mostrado en el diagrama fluye agua en estado estacionario. La presión absoluta a la entrada del codo es 21 KPa y el área de la sección transversal es 0.01 m^2. El área de la sección transversal a la salida es 0.0025 m^2 y la velocidad es de 16 m/s. La presión de descarga es la atmosférica. Determine la fuerza necesaria para mantener el codo en su lugar.

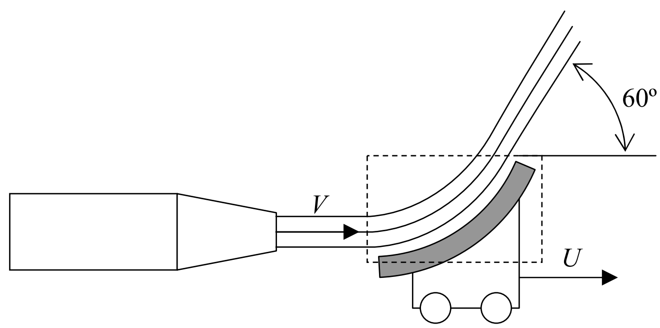


Ejercicio 8

Una banda transportadora horizontal que se mueve a una velocidad de 3 pies/s, recibe arena de una tolva. La arena cae verticalmente desde una tolva con velocidad de 5 pies/s y con un gasto de 500 lbm/s (la densidad de la arena se puede suponer como 2700 lbm/yd^3). Inicialmente la banda transportadora se encuentra vacía pero comienza a llenarse con arena que cae. Si se desprecia la fricción entre el sistema de transmisión y los rodillos, determinar la fuerza de tensión necesaria para jalar la banda transportadora cuando esta se encuentra llena.

Ejercicio 9

El diagrama muestra un alabe con ángulo de 60º. El alabe se mueve con velocidad constante U = 10 m/s y recibe un chorro de agua que sale de una boquilla estacionaria con velocidad V = 30 m/s. Determinar la fuerza que ejerce el agua sobre el alabe móvil.



Ejercicio 10

Un alabe con un ángulo de 60º (similar al de la figura del problema anterior) se encuentra montado en un carrito. El carrito y el alabe tienen una masa de 75 Kg y ruedan sobre un plano horizontal. El rozamiento puede considerarse insignificante así como la resistencia al avance que ofrece el aire. El alabe recibe un chorro de agua que sale con velocidad 35 m/s desde una boquilla estacionaria horizontal. Esta tiene un área de salida de 0.003 m^2. Determinar la velocidad del carrito como una función del tiempo y graficar los resultados que se obtienen.

Ejercicio 11

Un pequeño cohete cuya masa inicial es 400Kg se lanza verticalmente hacia arriba. Debido a la combustión el cohete consume combustible con una rapidez de 5 Kg/s y lanza un chorro de gas a la presión atmosférica con una velocidad de 1500 m/s relativa al cohete. Determine la aceleración inicial del cohete y su velocidad después de 10 segundos de iniciarse el lanzamiento. Desprecie la resistencia al avance debida al aire.

Ejercicio 12

Un cuerpo pequeño se mueve bajo la acción de un chorro. El cuerpo va montado en un brazo y gira respecto a un eje vertical con un radio de 1 m medido desde el centro fijo. El cuerpo tiene una masa de 2 Kg; la velocidad del chorro es 200m/s, la densidad del gas 1.5 Kg/m^3 y el área de salida es 75 mm^2. En un instante determinado el cuerpo se mueve a una velocidad de 50 m/s y el arrastre ocasionado por el aire es 10N. Se puede despreciar el rozamiento y la masa del brazo de giro. Determinar la aceleración angular del cuerpo en ese instante.

Ejercicio 13

Un ventilador de flujo axial opera a 1200 r.p.m. El diámetro hasta la punta del álabe es 1.1 y el diámetro del núcleo del rodete es 0.8 m. Los ángulos de entrada y salida de los álabes son 30º y 60º respectivamente. El sistema de álabes fijos directores imprimen al flujo absoluto de entrada en la primera etapa, un ángulo de 30º. El fluido es aire en condiciones estándar y se puede conde considerar incompresible. No existe cambio en la componente axial de la velocidad conforme el fluido pasa por el rotor. Se puede suponer que el flujo relativo entra y sale del rotor con un ángulo correspondiente al de los álabes.

Para estas condiciones ideales, dibujar el polígono de velocidades a la entrada del rotor, determinar el gasto volumétrico que pasa por el ventilador y delinear la forma que tienen los álabes del rotor.

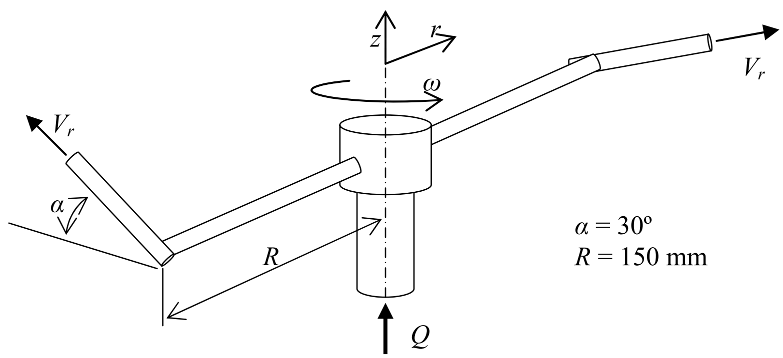
Con los datos así obtenidos, dibujar el polígono de velocidades a la salida del rotor y calcular el momento torsor y la potencia necesaria para operar el ventilador.

Ejercicio 14

Una bomba de flujo mixto maneja 150 gal/min de agua; la velocidad de entrada al impulsor es axial y uniforme. El diámetro del impulsor a la entrada es de 1" y a la salida es de 4". El flujo sale del impulsor a una velocidad de 10 pies/s respecto a los álabes radiales. La velocidad del impulsor es 3450 rpm. Determinar el ancho del impulsor a la salida (b), el momento torsor de entrada del impulsor, y la potencia suministrada en HP.

Ejercicio 15

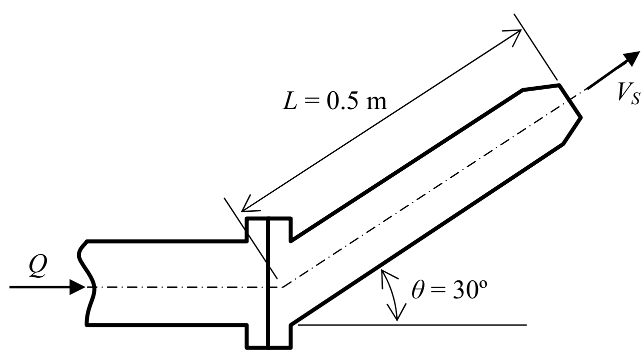
En El dibujo se muestra un pequeño irrigador de césped. A una presión manométrica de entrada de 20 KPa, el flujo total del volumen del agua a través del irrigador, que gira a 30 r.p.m. (ω), es de 7.5 l/min (Q). El diámetro de cada chorro es de 4 mm. Calcule la velocidad relativa del chorro en cada tobera del irrigador. Evalúe el momento de torsión de fricción en el pivote del irrigador.



Ejercicio 16

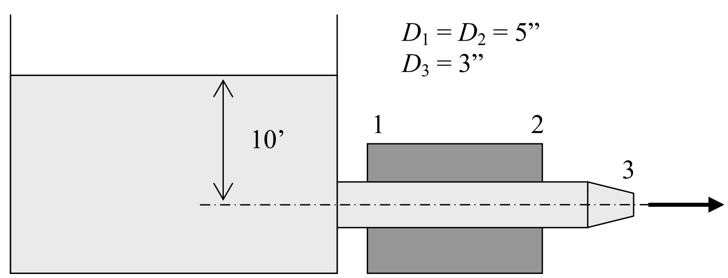
A través de la tobera giratoria mostrada en la figura, se hace pasar agua con un gasto de 0.15 m^3/s (Q). El conjunto gira a 30 r.p.m. (ω). La masa del brazo giratorio y de la tobera son despreciables comparados con el agua en su interior. Determinar el momento de torsión necesario para accionar el dispositivo y los momentos torsores de reacción en la brida.

El diámetro del tubo a la entrada de la tobera es de 0.1 m (D) y el diámetro de salida de la boquilla es de 0.05 m (d).



Ejercicio 17

A través del sistema mostrado en la figura fluye agua en estado estacionario que proviene de un gran depósito abierto. La descarga en la sección 3 es a presión atmosférica. Se coloca un calentador alrededor del tubo que calienta el flujo a razón de 100BTU/lbm. Se supone que el flujo es estacionario, sin rozamiento e incompresible. Determine el incremento de temperatura del fluido entre las secciones 1 y 2.

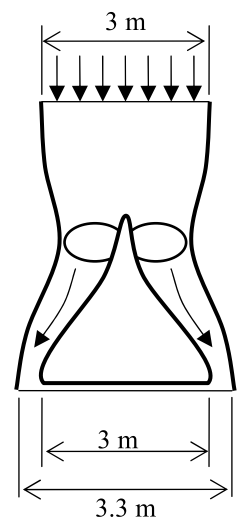


Ejercicio 18

Aire a 14.7 psia y 70 ºF entra a velocidad despreciable a una máquina, y se descarga en la sección de salida a 50 psia y 100 ºF mediante una tubería de sección transversal de 1 pie^2. El gasto másico es de 20 lbm/s. La potencia suministrada a la máquina es 600Hp. Determinar la rapidez de transferencia de calor.

Ejercicio 19

Un tanque de volumen 0.1 m^3 se conecta a una línea de alta presión; tanto la línea como el tanque se encuentran inicialmente a una temperatura uniforme de 20ºC. La presión manométrica inicial en el tanque es 100 KPa. La presión absoluta en la línea es 2 MPa; la línea es suficientemente grande como para que su temperatura y su presión se puedan suponer constantes. La temperatura del tanque se detecta mediante un termopar de respuesta rápida. En el instante inmediatamente después que se abre la válvula, la temperatura del tanque aumenta con una rapidez de 0.05 ºC/s. Determinar el gasto instantáneo del aire que entra al tanque (desprecie la transferencia de calor).



Ejercicio 20

Se tiene un vehículo tipo helicóptero, mostrado en la figura, cuya masa es de 2000 Kg. La presión del aire es atmosférica tanto a la entrada como a la salida y se puede suponer que el flujo es estacionario y unidimensional.

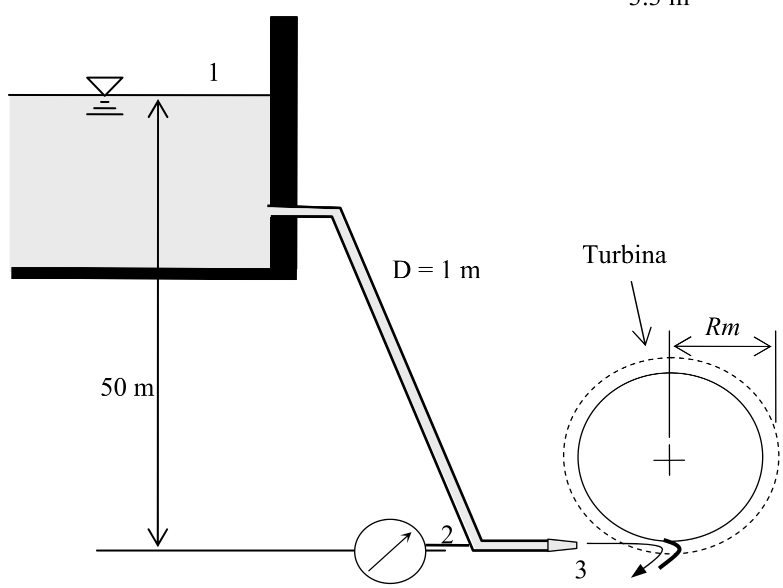
Calcule la velocidad del aire a la salida del vehículo y la potencia mínima que debe transmitir la propela al flujo, para una posición suspendida en el aire (sin movimiento).

Considere el aire como incompresible en condiciones estándar. Desprecie las pérdidas por fricción y la diferencia de cota.

Ejercicio 21

En el circuito hidráulico mostrado en la figura, se tiene un desnivel entre el nivel libre de la represa y la salida de la boquilla de 50 m. En el punto 2 se coloca un manómetro que mide una presión de 300 KPa, sabiendo que el diámetro del tubo es de 1 m. El chorro sale de la tobera cuyo diámetro es igual al necesario para que la presión en 3 sea la atmosférica obteniéndose así máxima velocidad. Este chorro incide sobre una turbina Pelton hecha de muchos álabes montados sobre un rotor, como se muestra en la figura. Una rueda Pelton constituye una turbina hidráulica muy apropiada en situaciones donde se tiene una carga (altura piezométrica) alta y un gasto volumétrico bajo. El radio medio de la rueda es de de 0.5 m, con lo cual se hace girar la rueda a una velocidad de 300 r.p.m. siendo el ángulo de desvío de los álabes de 165º.

Calcular la potencia desarrollada por la turbina.

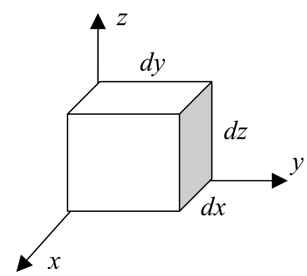


Ejercicio 22

Considere una rueda Pelton con un ángulo de desviación del álabe de 165º y un solo chorro, similar al mostrado en la figura del problema anterior. Determine la relación *U/V* necesaria para obtener la máxima potencia que puede producir la rueda. Donde $U = \omega R_m$ es la velocidad del álabe y *V* la velocidad del chorro.

Forma Diferencial de las Leyes Fundamentales

Cuando se quieren conocer las propiedades de un fluido con un cierto nivel de detalle, en todos los puntos del volumen o elemento a estudiar, las ecuaciones integrales no suelen ser suficientes. Esto debido principalmente al hecho que para la resolución de las ecuaciones integrales se supone por lo general una cierta distribución de las propiedades del integrando, como lo es en el caso más común suponer que se tienen propiedades uniformes.
En muchos casos estas suposiciones no son válidas, como por ejemplo si se quiere conocer la distribución de presiones alrededor de un alabe o ala de avión.
Cuando se quiere calcular alguna propiedad de un fluido bajo esta condición entonces se requiere el uso de ecuaciones fundamentales en su forma diferencial, las cuales toma la forma de **ecuaciones diferenciales parciales en espacio y tiempo**.
Estas ecuaciones permiten obtener ya sea los valores del integrando de las ecuaciones integrales o directamente los valores de la propiedad a estudiar.
La deducción de las ecuaciones fundamentales en su forma integral puede hacerse de varias formas, una de ellas es la aplicación de las leyes fundamentales a un volumen de control de tamaño infinitesimal, como el mostrado en la figura.



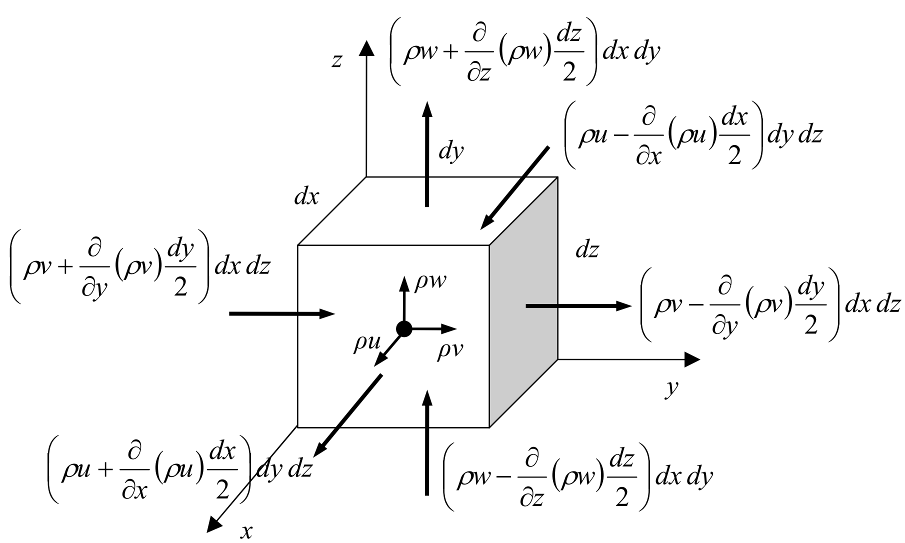
Para completar la formulación de las leyes fundamentales, se debe añadir a las ecuaciones diferenciales parciales ciertas condiciones. Una que va a definir el estado en que se encontraba el sistema en el momento inicial denominadas **condiciones iniciales**. Y otras que definen lo que ocurre en los bordes del sistema denominadas **condiciones de borde o de frontera**.

Conservación de la masa

Para la deducción de la ecuación de continuidad diferencial vamos a considerar el flujo de masa a través de cada una de las caras del volumen de control infinitesimal, que se puede expresar matemáticamente para todo el elemento como:

$$\dot{m}_{entra} + \dot{m}_{sale} = \frac{\partial}{\partial t} m_{elemento}$$

Para escribir esta expresión consideramos que en el centro del elemento diferencial existe un movimiento del fluido que podemos expresar con $\rho\vec{V}$ o en términos de sus componentes ρu, ρv y ρw, y que en el movimiento del fluido existe una variación de manera tal que a través de las caras del elemento pasará mas o menos fluido. Para más precisión definimos el cambio de moviendo de una cara a otra sobre la misma componente como, para la componente x por ejemplo: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx$. Tal como se muestra en la figura.



De esta manera la ecuación de continuidad se puede escribir para todas las direcciones de flujo y a través de las seis caras del elemento diferencial como:

$$\left[\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz-\left[\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz+\left[\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dx\,dz-\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dx\,dz$$

$$\left[\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy-\left[\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,dx\,dy\,dz\right)$$

Si dividimos esta ecuación por $dxdydz$ obtenemos:

$$\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}-\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}+\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}-\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}+\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}-\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Realizando las cancelaciones y sumatorias obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Como tanto la densidad como la velocidad se consideran variables entonces la ecuación se escribe como:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

Esta ecuación se puede escribir de una forma más simple utilizando la derivada sustancial:

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

Y del gradiente de velocidad:

$$\nabla\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

Obteniendo de esta manera una expresión vectorial:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

En el caso de un flujo incompresible la variación de la densidad es nula, luego la ecuación de conservación se escribiría como:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

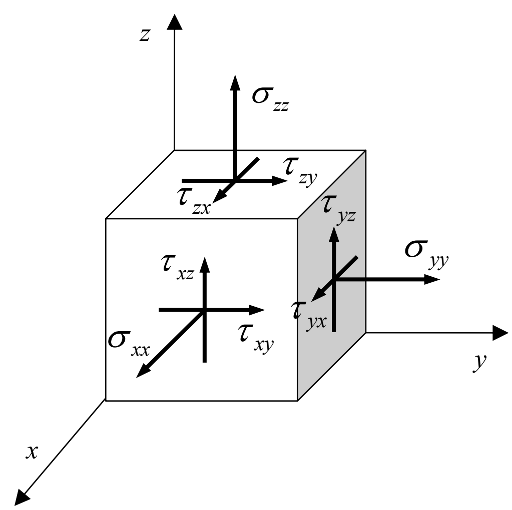
O en forma vectorial:

$$\nabla\vec{V}=0$$

Conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento nos permite determinar los campos de velocidades y de presiones en un fluido en movimiento. Para ello debemos utilizar las componentes de esfuerzo en el fluido que nos permiten determinar las fuerzas requeridas en la ecuación de momentum.

En un punto dado del fluido actúan nueve componentes de esfuerzo, correspondientes al tensor de esfuerzos τ_{ij}. Estos nueve esfuerzos se ilustran en la figura siguiente, considerando un elemento infinitesimal de fluido, abstracción cúbica de un punto, siendo los esfuerzos considerados en el centro de este elemento diferencial.



Se tendrán entonces tres componentes de esfuerzos normales σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz}, y que corresponden a esfuerzos que actúan perpendicularmente a una cara. Y tendremos seis componentes de esfuerzos cortantes τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz} y τ_{zy}, que corresponden a los esfuerzos que actúan tangencialmente a las caras del elemento diferencial.

Al igual que para la deducción de la ecuación de continuidad, debemos considerar que estas componentes de esfuerzos son función de x, y, z, y t. Por lo tanto existirá una variación infinitesimal si consideramos estos esfuerzos en las caras del elemento diferencial y no en su centro. Tendremos así por ejemplo que el esfuerzo normal en la dirección x en la cara que se observa de frente será:

$$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Y en la cara posterior será:

$$\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

Esta misma formulación se aplicara a cada uno de los componentes del esfuerzo.

La segunda ley de newton, en la dirección x para este elemento diferencial de fluido se escribe como:

$$\sum F_x = ma_x$$

Donde la fuerza será el esfuerzo por el área, por lo cual la ecuación para la segunda ley de Newton se escribe:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

$$-\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy + \rho g_x dxdydz = \rho dxdydz\frac{Du}{Dt}$$

Donde g_x es la componente del vector gravedad en la dirección x, y Du/Dt es la aceleración de la partícula de fluido.

Dividiendo la ecuación por el volumen $dxdydz$ obtenemos:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\frac{dydz}{dxdydz} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\frac{dxdz}{dxdydz} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\frac{dxdy}{dxdydz}$$

$$-\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\frac{dydz}{dxdydz} - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\frac{dxdz}{dxdydz} - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\frac{dxdy}{dxdydz} + \rho g_x = \rho\frac{Du}{Dt}$$

Simplificando tenemos:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

De forma análoga para las componentes y y z, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

Adicionalmente es posible demostrar, tomando momento alrededor de ejes que pasan por el centro del elemento, que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ y } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Por lo cual se deduce que el tensor de esfuerzos posee realmente solo componentes de esfuerzos independientes.

Este tensor de esfuerzos se escribe usualmente de la siguiente forma:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler son una simplificación de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento en donde se supone que los esfuerzos cortantes son nulos. Dicho de otra manera se supone un fluido ideal. Bajo esta suposición el único esfuerzo al cual estará sometido el fluido es la presión, y el tensor de esfuerzos será:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Si introducimos estas componentes de esfuerzos en las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento obtendremos:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$
$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$
$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

Si suponemos adicionalmente que la coordenada z es vertical tendremos $g_x = g_y = 0$, y $g_z = -g$. Entonces estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$$

O en forma vectorial:

$$\rho \frac{D}{Dt})(ui + vj + wk) = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} i + \frac{\partial P}{\partial y} j + \frac{\partial P}{\partial z} k\right) - \rho g k$$
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P - \rho g k$$

Esta última es la forma como comúnmente se conoce a la ecuación de Euler.

Con estas tres ecuaciones más la ecuación de continuidad se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (*u, v, w* y *P*) con las cuales se pueden determinar los campos de velocidades y presiones en un flujo incompresible no viscoso.

Nótese que si se integra la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente, suponiendo el flujo estable e incompresible obtendremos la ecuación de Bernoulli.

Ecuaciones de Navier-Stokes

Cuando el fluido de trabajo puede considerarse Newtoniano (relación lineal entre los componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad) e isotropico (propiedades del fluido independientes de la dirección), entonces es posible relacionar las componentes del esfuerzo y los gradientes de velocidad usando solo dos propiedades del fluido: la viscosidad μ y el segundo coeficiente de viscosidad λ.

Las relaciones entre el esfuerzo y el gradiente de velocidad, conocidas como ecuaciones constitutivas se pueden expresar como:

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\vec{V} \qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\vec{V} \qquad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\vec{V} \qquad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Para la generalidad de los gases y con exactitud para los gases monoatómicos el segundo coeficiente de la viscosidad se puede relacionar con la viscosidad de la siguiente forma:

$$\lambda = -\tfrac{2}{3}\mu$$

Esta condición es conocida como **hipótesis de Stokes.** Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos es igual a la presión:

$$-\tfrac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) = P$$

Con las ecuaciones constitutivas se puede demostrar que esta relación se cumple para un gas y también para un líquido cuando la divergencia de la velocidad es cero ($\nabla\cdot\vec{V} = 0$).

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de momentum, y utilizando la hipótesis de Stokes, obtenemos:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)}{\partial z} + \rho g_x$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \tfrac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \tfrac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Aquí se ha supuesto que el fluido es homogéneo, es decir que las propiedades son independientes de la posición.
Cuando el flujo es incompresible la ecuación de continuidad permite reducir las ecuaciones anteriores y obtener así la ecuaciones de **Navier-Stokes:**

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Con estas tres ecuaciones y la ecuación de continuidad se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (*u, v, w, P*), y se pueden entonces obtener los campos de velocidades y presión.
Estas ecuaciones se pueden expresar en forma vectorial como:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla P+\rho g+\mu\nabla^2\vec{V}$$

Donde:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{Du}{Dt}i+\frac{Dv}{Dt}j+\frac{Dw}{Dt}k$$

$$\nabla P=\frac{\partial P}{\partial x}i+\frac{\partial P}{\partial y}j+\frac{\partial P}{\partial z}k$$

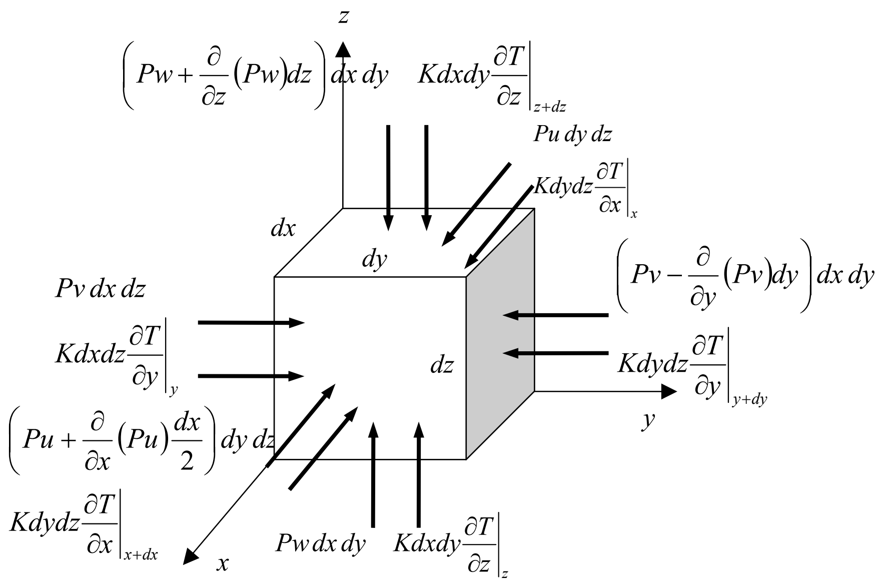
$$\nabla^2\vec{V}=\nabla^2 ui+\nabla^2 vj+\nabla^2 wk$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ denominado Laplaciano.

Primera ley de la termodinámica

Ecuación de la Energía

La ecuación de la energía en su forma diferencial es útil cuando se quiere determinar los gradientes de temperatura en un fluido, evidentemente estos gradientes no son importantes en todos los procesos que ocurren con fluidos.
A continuación se deducirá esta ecuación suponiendo efectos viscosos insignificantes, supuesto que simplifica la deducción y es aceptable para muchos flujos reales.
Se considera un elemento de fluido diferencial como el mostrado en la figura.



La tasa de transferencia de calor a través de un área A esta dada por la ley de Fourrier de transferencia de calor:

$$\dot{Q} = -KA\frac{\partial T}{\partial n}$$

Donde *n* es la dirección normal al área y *K* es la conductividad térmica, que se supone constante.

La tasa de trabajo por otro lado es igual a la magnitud de la fuerza multiplicada por la velocidad en la dirección de la fuerza:

$$\dot{W} = PAV$$

La primera ley de la termodinámica aplicada a una partícula de fluido es:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{DE}{Dt}$$

Donde se usa la derivada sustancial *D/Dt* porque se esta siguiendo una partícula de fluido en el instante que se muestra.

Para la partícula de elemento infinitesimal de la figura esto es:

$$Kdydz\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(Pu)dxdydz + Kdxdz\left(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(Pv)dxdydz$$

$$+ Kdxdy\left(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+dz} - \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(Pw)dxdydz = \rho dxdydz\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + gz + \tilde{u}\right)$$

Don de *E* corresponde a la energía cinética, potencial e interna ($\tilde{u}$). Como la masa de una partícula de fluido es constante entonces *ρdxdydz* queda fuera del operador diferencial. Si dividimos por *dxdydz* obtnenmos:

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(Pu) - \frac{\partial}{\partial y}(Pv) - \frac{\partial}{\partial z}(Pw) = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + gz + \tilde{u}\right)$$

Esta ecuación puede reacomodarse como:

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - u\frac{\partial P}{\partial x} - v\frac{\partial P}{\partial y} - w\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= \rho u\frac{Du}{Dt} + \rho v\frac{Dv}{Dt} + \rho w\frac{Dw}{Dt} + \rho g\frac{Dz}{Dt} + \rho\frac{D\tilde{u}}{Dt}$$

Las ecuaciones de Euler son aplicables a este flujo no viscoso; por lo tanto los últimos términos de la izquierda son iguales a los primeros cuatro términos de la derecha si reconocemos que:

$$\frac{Dz}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y}}_{\to 0} + w\frac{\partial z}{\partial z} = w$$

Finalmente la ecuación de la energía simplificada adopta la forma:

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho\frac{D\tilde{u}}{Dt}$$

La cual se puede expresar en forma vectorial como:

$$\rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} = K\nabla^2 T - P\nabla\cdot\vec{V}$$

En donde la energía interna se puede escribir en términos de entalpía como:

$$\tilde{u} = h - \frac{P}{\rho}$$

Con esta expresión y la ayuda de la ecuación de continuidad la ecuación de la energía se convierte en:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = K\nabla^2 T + \frac{DP}{Dt}$$

En el caso de líquidos esta ecuación se transforma en:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha\nabla^2 T$$

Para esto se toma en cuenta que en un líquido $\nabla\cdot\vec{V} = 0$ y que $\tilde{u} = C_v T$ donde C_v es el calor específico. Y se ha introducido la difusividad térmica α que se define como:

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_v}$$