# Régulation HOE

## *Informations pratiques.*

ENSEIGNANT :

Jean-François DULHOSTE.

- Professeur Titulaire. Dept. Sciences Thermiques. Ecole d´Ingénieurs Génie Mécanique. Université des Andes. Mérida, Venezuela.
- Enseignant-Chercheur Invité. Grenoble INP. ENSE$^3$.Gipsa-lab. Période Septembre à Décembre 2010.
- Email : djean@ula.ve
- Page web : http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean
- Bureau B257 (Site Ampere)
- Sujets de Recherche :
    - Commande de systèmes hydrauliques à surface libre et sous pression.
    - Mesure de débit par capteurs de pression.

# *Objet du Cours*

**Régulation dans l'approche état**.

Le cours s´organise donc en quatre partie principales :

- Modélisation, représentation d'état.
- Analyse (stabilité, contrôlabilité, observabilité)
- Commande
- Observation

Cours théoriques et pratiques sur Matlab

# BIBLIOGRAPHIE

[1] **P. De Laminart**, *Automatique – Commande des Systemes linéaires*, hermes, 1996.

[2] **B. D´Andrea-Novel et M. Cohen de Lara**, *Commande Linéaire des Systemes Dynamiques*. Masson, 1994.

[3] **R. Dorf and R. Bishop**, *Modern Control Systems*, Prentice Hall, USA, 2008.

[4] **K.J. Astrom and B. Wittenmark**, *Computer-Controlled Systems, Information and systems sciences series.* Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition, 1997.

[5] **I G.C. Goodwin, S.F. Graebe**, **and M.E. Salgado**, *Control System Design*, Prentice Hall, New Jersey, 2001.

[6] **I G. Franklin, J. Powell, A. Emami-Naeini**, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 2005

[7] **A. Rachid & D. Mehdi**. *Réalisation, Réduction et Commande des Systèmes Linéaires*. Scientifik A. 1993.

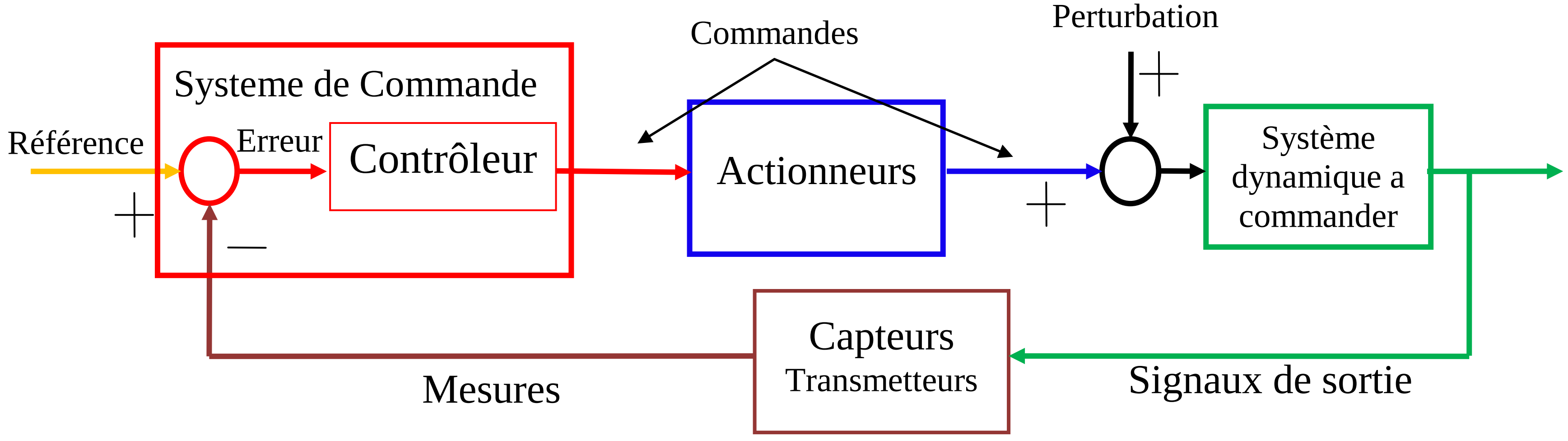
[8] **C. Foulard, J.M. Flaus, M. Jacomino**. *Automatique pour les classes Preparatoires*. Cours et exercices corrigés. Hermes Paris 1997.

[9] **D. Arzelier.** *Représentation et analyse des systèmes linéaires. Notes de cours*. LAAS-CNRS. http://www.laas.fr/˜arzelier.

# *Introduction a la Commande*

DEFINITION 1 : Automatique
Ensemble des disciplines scientifiques et techniques utilisées pour la conception de systèmes de commande en vue du contrôle des processus naturels et artificiels.

THEORIE DE LA COMMANDE DES SYSTEMES DYNAMIQUES :
- <u>Commande passive</u> : Changements structurels pour changer la dynamique.
- <u>Commande en boucle ouverte</u> : Connaissance du système permet de générer les entrées.
- <u>Commande active (boucle fermée)</u> : Utilisation des actionneurs et capteurs pour générer les commandes (l'information circule dans une boucle).



# Modélisation de systèmes physiques

**Modèle** : expression des lois de la physique.
**Modèle mathématique dynamique** : Expressions mathématiques qui représentent le comportement dynamique du système. Ces expressions permettent de déterminer analytiquement (ou numériquement) la réponse (sortie) d´un système quand l'entrée est soumise a une variation dans le temps (excitation), elle représente donc la réponse transitoire du système.
**Modèle mathématique statique** : les sorties présentes ne dépendent que des entrées présentes.

AVEC LA MODELISATION IL EST POSSIBLE :

1- Définir le système étudié et ses composants élémentaires
2- Formuler le modèle mathématique idéal et dresser la liste des hypothèses à retenir
3- Ecrire les lois de la physique régissant le processus
4- Définir le modèle dédié à l'Automatique

LES DIFFERENTS MODELES :

- Equations différentielles, ou aux dérivées partielles.
- Fonctions de transfert (représentation externe).
- **Equations d´état (représentation interne).**
- Représentations graphiques.

## LA QUALITE DU MODELE

Il existe un compromis entre l'utilité et la précision/complexité du modèle.

- Un modèle complexe est plus difficile de construire et à utiliser, mais en général sera plus précis.
- Un modèle simple, sera plus facile à construire et utiliser, mais moins précis.

## LES MODELES LINEAIRES.

Les systèmes physiques réels sont pour la plus part non linéaires. Cependant il est possible dans beaucoup de cas, utiliser un modèle linéaire pour les représenter convenablement, au moins sur une partie utile du domaine de fonctionnement.

Un système est linéaire si il satisfait le principe de superposition : si à la somme de deux excitations correspond la somme des deux réponses correspondantes :

Si $s = f(e)$ alors pour $e = a + b \rightarrow s = f(a) + f(b)$

Cela peut s´étendre a plusieurs entrées.

Les modèles mathématiques des systèmes physiques se représentent donc par des équations différentielles pour des systèmes à paramètres concentrées ou aux dérivées partielles pour des systèmes à paramètres distribués. Elles peuvent êtres linéaires ou non linéaires suivant le système et la gamme de fonctionnement sur le quel on veut l'étudier.

Ces équations peuvent prendre des formes différentes suivant les méthodes d’analyse tels que la fonction de transfert, les équations d´état ou des diagrammes. Toutes les formes de représentation sont analogues avec quelques différences d´usage.

Pour un système linéaire invariant dans le temps (LTI), le modèle de base correspond à une équation différentielle ordinaire, qui peu s’exprimer classiquement comme il suit :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{du}{dt} + b_n u \qquad n \geq m$$

Qui peut être exprimé aussi avec l’operateur mathématique $D$ :

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = b_0 D^m u + b_1 D^{m-1} u + \cdots + b_{n-1} D u + b_n u$$

Ou en utilisant des points pour représenter les dérivées :

$$a_0 \overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{m}{u} + b_1 \overset{m-1}{u} + \cdots + n_{m-2} \ddot{u} + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

D’autres représentations se présentent aussi :

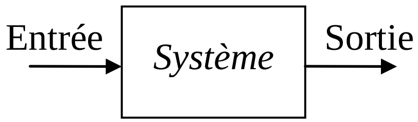
- Fonction ou matrice de transfert → l’automatique classique (représentation externe)
- Espace d´état → l’automatique moderne (représentation interne)

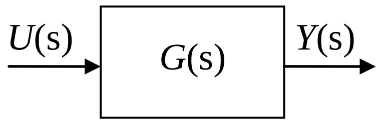
Les différences entre l´automatique moderne et classique peuvent se résumer a :

| **Automatique classique** | **Automatique moderne** |
|---|---|
| Systèmes linéaires | Systèmes linéaires et non linéaires |
| Systèmes invariant dans le temps (LTI) | Variant ou invariant dans le temps |
| Une entrée une sortie (SISO) | Multiples entrées et sorties (MIMO) |
| Opération dans le domaine de la fréquence | Opération dans le domaine du temps. |

LA REPRESENTATION EXTERNE.

La représentation externe est une représentation que permet d´utiliser seulement les informations entrées - sorties d´un système, pour définir le modèle mathématique. Les équations différentielles sont une représentation externe, mais la plus utilisée en automatique est la fonction de transfert ou matrice de transfert qui est une extension aux systèmes multivariables de la première. Il existe aussi d´autres représentations telles que la réponse impulsionnelle.



# Représentation interne, équations d'état

L'automatique moderne, a partir de laquelle c´est développé la représentation d´état pour la commande, apparait a partir des années 60 pour permettre la commande de systèmes complexes, tels que les applications spatiales Apolo et Polaris, les quelles possèdent multiples entrées et sorties (MIMO), et des critères de fonctionnement de plus en plus sévères. Son développement et application a grandit avec l´usage des ordinateurs.

Déjà utilisée dans d'autres disciplines : Mécanique ou la Thermodynamique.
Exemple, le comportement macroscopique d'un gaz peut être décrit et prédit à l'aide d'un nombre fini de variables physiques : le volume $V$ du gaz, la pression $p$ et la température $T$ de ce gaz. L'ensemble $(p, V, T)$ constitue l'état thermodynamique macroscopique du gaz.
Il évolue au cours du temps suivant les conditions de l'environnement extérieur au système (apport de chaleur par exemple) et peut donc être caractérisé par son comportement dynamique.

Ainsi, l'état dynamique d'un système peut être caractérisé par un ensemble de variables internes appelées variables d'état. Cet ensemble résume complètement la configuration dynamique courante du système. Pour cela, il doit contenir un nombre minimal de variables d'état nécessaires et suffisantes pour décrire les dynamiques du système.

Le choix de cet ensemble minimal n'est pas unique, mais doit comporter un nombre toujours identique de variables d'état indépendantes. Cela signifie que les valeurs initiales de chacune des variables d'état constituant l'ensemble peuvent être fixées de manière arbitraire.

L'état initial d'un système doit ainsi constituer sa mémoire : étant donné l'état d'un système à un instant donné, la connaissance du passé ne donne pas d'information additionnelle sur le futur comportement du système. Il faut donc définir aussi des fonctions (équations d'état) pour faire la prédiction du futur, les fonctions couramment utilisées sont celle résultant d'une intégration.

DEFINITION

**Etat**

L´état d´un système est un ensemble de variables $(x(t))$ telles que leurs valeurs a un instant $t = t_0$, avec les signaux d'entré $(u(t))$ pour tout temps $t \geq t_0$, et les équations qui décrivent les dynamiques $[f(x, u, t), g(x, u, t)]$, peuvent prédire les valeurs futures des états $(x(t))$ et sorties $y(t)$ du système, pour tout temps $t \geq t_0$.

Remarque : Les états ne représentent pas nécessairement des variables physiques du système.

VARIABLES DANS LA REPRESENTATION D'ETAT

La représentation d'état utilise trois types de variables, organisés en forme de vecteurs :

- Etats : $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$
- Entrées : $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$
- Sorties : $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$

$n$, $m$ et $r$, représentent respectivement le nombre de variables d'état, de sortie et d'entrée.

EQUATIONS DANS LA REPRESENTATION D'ETAT

Les équations utilisés pour la représentation d'état sont les produites para des fonctions d'intégration, et peuvent varier suivant le type de système. Ainsi pour un :

**Système Non Linéaire**

$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ Equation d'état
$y(t) = g(x, u, t)$ Equation de sortie

**Système Linéaire**

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ Equation d'état
$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ Equation de sortie

Avec :

$A(t)$ matrice d'état o dynamique
$B(t)$ matrice d'entrée ou de commande
$C(t)$ matrice de sortie ou de mesure
$D(t)$ matrice de transmission directe

Dans le cas ou les fonctions ou vecteurs de fonctions $f$ et $g$, ou les matrices $A$, $B$, $C$ et $D$, sont fonction du temps, le système prend le nom de système a temps variant, dans le cas contraire il prend le nom de système a temps invariant, pour le cas des systèmes linéaires ils se nomment Linéaire a Temps Invariant (LTI).

Dans le cas des **systèmes LTI**, les équations sont simplifiées :

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ Equation d'état
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ Equation de sortie

**Représentation d'état de systèmes dynamiques**

Il est possible d'obtenir des représentations d'état, en forme matricielle, pour un système SISO a partir d'une seule équation différentielle ou pour un système MIMO, a partir de plusieurs de ces équations représentant les relations entre les variables.

**Représentation d'état à partir d'une équation différentielle ordinaire (SISO typiquement)**

Cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n$ sans dérivées des termes d'entrée:

$$\overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

On suppose les conditions initiales $y(0), \dot{y}(0), \ldots y^{n-1}(0)$ et l'entrée $u(t)$ pour un temps $t \geq 0$ connues, il est donc possible de choisir les variables d'état telles quelles puissent définir complètement le futur du système, on peu donc choisir :

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad \cdots x_n = \overset{n-1}{y}$$

L'équation différentielle peu donc s'écrire sous la forme de plusieurs équations d'état, et une équation de sortie:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots a_1 x_n + u \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

Ou en forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Avec:

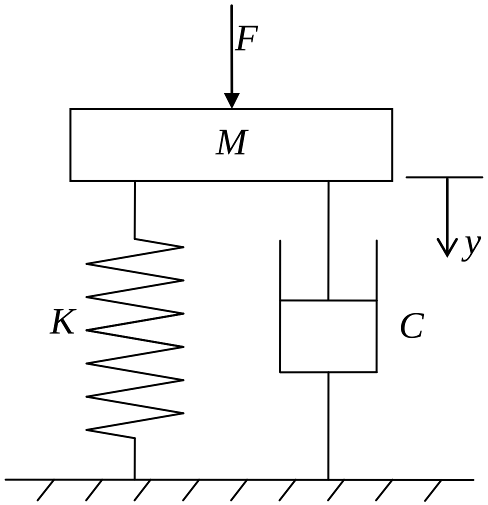
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

**Remarque** : La représentation d'état d'un système n'est pas unique, car celle-ci dépend de la sélection des variables d'état, cependant pour toutes les représentations d'état pour un même système auront le même nombre de variables d'état.

Exemple :
Pour le système mécanique de la figure, dont l'équation qui représente sa dynamique est :

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F$$




Avec : $u = F$

Il est possible de définir les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}$$

On substitue ces variables d'état dans l'équation :

$$M\dot{x}_2 + Cx_2 + Kx_1 = u \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{u - (Cx_2 + Kx_1)}{M}$$

Une représentation d'état du système est :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{C}{M}x_2 + \frac{1}{M}u$$

$$y = x_1$$

En forme matricielle :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Avec : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n$ sans dérivées des termes d'entrée:

$$\overset{n}{y}+a_1\overset{n-1}{y}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_0\overset{n}{u}+b_1\overset{n-1}{u}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u$$

On suppose les conditions initiales $y(0), \dot{y}(0), \ldots y^{n-1}(0)$ et l'entrée $u(t)$ pour un temps $t \geq 0$ connues, il est donc possible de choisir les variables d'état tels quelles puissent définir complètement le futur du système. Il est nécessaire dans ce cas d'annuler les dérives de l'entrée. On peu donc choisir :

$$\begin{aligned}
x_1 &= y-\beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u = \dot{x}_1-\beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u = \dot{x}_2-\beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{n-1}{y}-\beta_0\overset{n-1}{u}-\beta_1\overset{n-2}{u}-\cdots-\beta_{n-2}\dot{u}-\beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1}-\beta_{n-1}u
\end{aligned}$$

$\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_n$ sont des coefficients a déterminer avec les expressions:

$$\beta_0=b_0;\quad \beta_1=b_1-a_1\beta_0;\quad \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0;\quad \beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\mathrm{B}_0$$

$$\vdots$$

$$\beta_n=b_n-a_1\beta_{n-1}-\cdots-a_{n-1}\beta_1-a_n\beta_0$$

Avec ce choix de variables d'état on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \\
y &= x_1 + \beta_0 u
\end{aligned}$$

Ou en forme matricielle:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx
\end{aligned}$$

Avec:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \beta_0 = b_0$$

Exemple : Obtenir une représentation d'état pour l'équation différentielle:

$$\dddot{y} + 18\ddot{y} + 192\dot{y} + 640y = 160\dot{u} + 640u$$

On définit les états suivants :

$$x_1 = y - \beta_0 u$$
$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$
$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

Avec :

$$\beta_0 = b_0 = 0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 640 - 18(160) = -2240$$

La représentation d'état est:

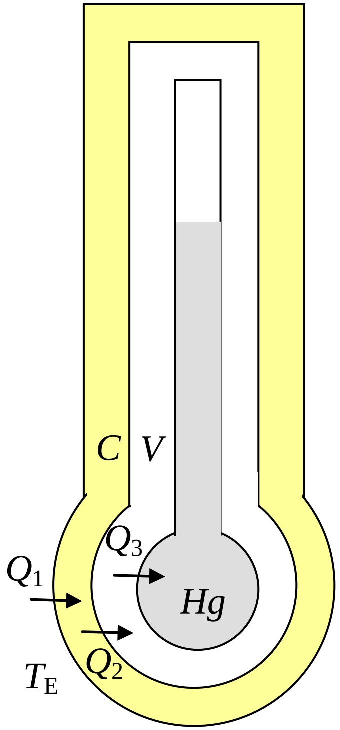
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## Représentation d'état à partir de plusieurs équations différentielles du système

Il est aussi possible de d'obtenir une représentation d'état directement des équations différentielles de chaque élément d'un système, ou des équations intermédiaires.

Exemple 1 : Pour le système thermique qui représente le Thermomètre de mercure avec coque en cuivre.




Les deux surfaces et le mercure absorbent de la chaleur:

Hg: Mercure THg, CHg ; V: Verre TV, CV ; C: Cuivre TC, CC

Entre chaque élément on a une résistance de contact: R1, R2, R3.

Les équations de base (simplification linéaire) sont :

1) $Q_1 - Q_2 = C_C DT_C$ ; 2) $Q_2 - Q_3 = C_V DT_V$ ;

3) $Q_3 = C_{Hg} DT_{Hg}$ 4) $Q_1 = \dfrac{T_E - T_C}{R_1}$ ;

5) $Q_2 = \dfrac{T_C - T_V}{R_2}$ ; 6) $Q_3 = \dfrac{T_V - T_{Hg}}{R_3}$

6 équations 7 variables ($T_E, T_C, T_V, T_{Hg}, Q_1, Q_2, Q_3$)

On veut obtenir une représentation d'état que représente le système avec la relation entrée sortie

$$T_{Hg} = f(T_E)$$

Pour cela on peut réduire le modèle du système de six à trois équations, et avec seulement les températures comme variables :

7) $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_C D\right)T_C = \frac{T_V}{R_2}+\frac{T_E}{R_1}$ 8) $\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+C_V D\right)T_V = \frac{T_C}{R_2}+\frac{T_{Hg}}{R_3}$ 9) $T_V = R_3\left(\frac{1}{R_3}+C_{Hg} D\right)T_{Hg}$

L'entrée est : $u = T_E$ et la sortie : $y = T_{Hg}$ .

On peut choisir comme états : $x_1 = T_C; \quad x_2 = T_V; \quad x_3 = T_{Hg}$

Avec ces définitions on réécrit les équations du système :

$$\frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_2}x_1 + C_C\dot{x}_1 = \frac{x_2}{R_2}+\frac{u}{R_1}$$

$$\frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_3}x_2 + C_V\dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_2}+\frac{x_3}{R_3}$$

$$x_3 + R_3 C_{Hg}\dot{x}_3 = x_2$$

On obtient une représentation d'état du système :

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C_C}x_1 - \frac{1}{R_2C_C}x_1 + \frac{1}{R_2C_C}x_2 + \frac{1}{R_1C_C}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_2C_V}x_1 - \frac{1}{R_2C_V}x_2 - \frac{1}{R_3C_V}x_2 + \frac{1}{R_3C_V}x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_2 - \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_3$$

$$y = x_3$$

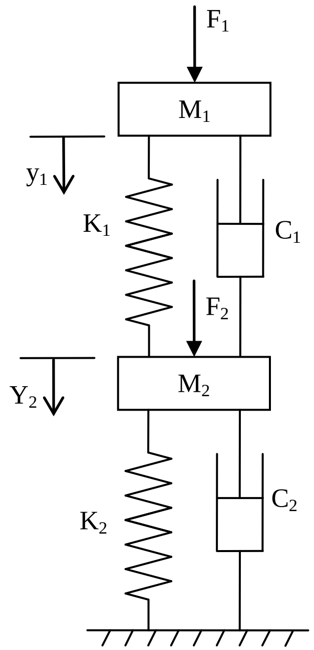
Ou en forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_C} - \frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V} - \frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 : Soit le système mécanique MIMO avec deux entrées ($F_1$ et $F_2$) et deux sorties ($y_1$ et $y_2$):




Les équations du système sont :

$$F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1D(y_1 - y_2) = M_1D^2y_1$$
$$F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1D(y_1 - y_2) - K_2y_2 - C_2Dy_2 = M_2D^2y_2$$

Dans ce cas on a :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \; ; \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

On choisi comme états :

$$x = [y_1 \quad Dy_1 \quad y_2 \quad Dy_2]^T$$

On substitue sur les équations originelles et on obtient :

$$u_1 - K_1x_1 + K_1x_3 - C_1x_2 + C_1x_4 = M_1\dot{x}_2$$
$$u_2 + K_1x_1 - K_1x_3 + C_1x_2 - C_1x_4 - K_2x_3 - C_2x_4 = M_2\dot{x}_4$$

On obtient la représentation d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K_1}{M_1}x_1 - \frac{C_1}{M_1}x_2 + \frac{K_1}{M_1}x_3 + \frac{C_1}{M_1}x_4 + \frac{u_1}{M_1}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_1}{M_2}x_1 + \frac{C_1}{M_2}x_2 - \frac{(K_1 + K_2)}{M_2}x_3 - \frac{(C_1 + C_2)}{M_2}x_4 + \frac{u_2}{M_2}$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

Ou en forme matricielle:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{C_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & \frac{C_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{M_2} & \frac{C_1}{M_2} & -\frac{K_1+K_2}{M_2} & -\frac{C_1+C_2}{M_2} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} ; \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

RELATION FONCTION DE TRANSFERT ET REPRESENTATION D'ETAT

Il est possible d'obtenir la fonction de transfert d'un système en partant directement de la représentation d'état en appliquant une formulation simple.

Soit le système multivariable dont la représentation d'état est donné ci-dessous :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t) + Du(t)$$

Ou : $x\epsilon\mathbb{R}^n, u\epsilon\mathbb{R}^m, y\epsilon\mathbb{R}^n r$

Du fait de la linéarité de l'opérateur de Laplace, il est possible d'obtenir les transformés du système suivantes :

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Ou : $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]; U(s) = \mathcal{L}[u(t)]; Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

Comme la fonction de transfert est définie comme la relation entre la transformée de Laplace de la Sortie et la transformée de Laplace de l'entrée, quand les conditions initiales sont égales a zero :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Avec les condition initiales $x(0)$ égales a zéro, et en réorganisant l'équation on obtient :

$$sX(s)-AX(s)=BU(s)$$

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$

Ou : $I$ est la matrice identité.

Si on multiplie les deux cotés de l'équation par $(sI-A)^{-1}$ on obtient:

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

Qui substitué dans l'équation de sortie donne :

$$Y(s)=\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)U(s)$$

Donc :

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Exemple : pour le système mécanique étudié dans les cours précédents:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t)$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est possible d'obtenir la fonction de transfert, en utilisant la formulation étudié plus haut :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} + 0$$

La solution nous montre que :

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{M} & s + \frac{C}{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}} \begin{bmatrix} s + \frac{C}{M} & 1 \\ -\frac{K}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\begin{bmatrix} s+\frac{C}{M} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\frac{1}{M}$$

La fonction de transfert est donc :

$$G(s)=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$$

Rappel : Le système mécanique étudié était:

$$MD^2y+CDy+Ky=F$$

Ou $y$ (déplacements) est la sortie, et $F$ (force) est l´entrée (appelée de façon courante $u$).
La transformée de Laplace de chaque membre de l équation (avec les C.I.=0) est :

$$Ms^2Y(s)+CsY(s)+KY(s)=F(s)$$

La fonction de transfert est: $$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$$

NON UNICITE DE LA REPRESENTATION D'ETAT

Pour un même système il est possible d'obtenir différentes représentations d'état, tandis que les représentations externes, matrice de transfert ou équations différentielle est unique. Dans le cas de systèmes LTI par exemple, un même système peut être représenté par des matrices A différentes.

Exemple : Pour le système représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

Il est possible d'obtenir une représentation d'état en prenant les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad x_3 = \ddot{y}$$

Et on obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u \end{aligned}$$

Sous sa forme matricielle : Avec :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Prenons maintenant le système linéaire représenté par les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On peu obtenir la fonction de transfert de ce système avec la relation :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{(s+1)} - \frac{6}{(s+2)} + \frac{3}{(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Cette représentation d'état correspond au même système que le précédent, sa forme est appelé la Forme canonique de Jordan, car la matrice $A$ possède seulement des éléments dans la diagonale, ces éléments son les Valeurs Propres ($\lambda$) de la Matrice $A$, et les pôles du système, ou racines de l'équation caractéristique.

Cette caractéristique de la représentation d'état permet de mettre en forme les représentations des systèmes de manière à avoir des représentations plus simples à manipuler.

Changement de variable linéaire : o peu démontrer que pour toute représentation d'état d'un système quelconque il est possible de déterminer un nouvel ensemble de variables d'état, a partir d'un changement de variable linéaire, de la forme :

$$z = Px$$

Avec $P$ une matrice quelconque de la même dimension que $A$.

Dans ce changement de variable la nouvelle représentation obtenues est définie par :

$$P\dot{z} = APz + Bu \qquad \dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$
$$y = CPz \qquad y = CPz$$

Avec $P^{-1}$ la matrice inverse de $P$.

Exemple: on définir un nouvel ensemble pour le système de l'exemple précédent avec:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Notre nouvelle représentation d'état sera définie par :

$$\dot{z} = A_z z + B_z u$$
$$y = C_z z$$

Avec :

$$A_z = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -17 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 13 \end{bmatrix}; \quad B_z = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C_z = CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile d'observer que pour cette nouvelle représentation d'état correspond au même système linéaire, car sa fonction de transfert est :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -17 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 13 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

De fait dans la plus part des cas il est suffisant de vérifier l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{bmatrix} \lambda + 17 & 8 & 12 \\ 2 & \lambda + 2 & 0 \\ -20 & -10 & \lambda + 13 \end{bmatrix} \\ &= \left( (\lambda+17)(\lambda+2)(\lambda+13) - 240 \right) - \left( -240(\lambda+2) + 16(\lambda+13) \right) \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \end{aligned}$$

DIAGONALISATION DE MATRICES

Un cas particulier de changement de variable linéaire est appelé la diagonalisation de matrices, car on obtient une matrice $A$ avec des éléments sur la diagonale et de zéros sur le reste des éléments de la matrice. On obtient une forme canonique de Jordan.

Pour ce faire, dans le cas des représentations d'état comme le montre la matrice $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Il est possible d'obtenir une matrice $A$ diagonale en utilisant comme matrice $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1{}^2 & \lambda_2{}^2 & \lambda_3{}^2 & \cdots & \lambda_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1{}^{n-1} & \lambda_2{}^{n-1} & \lambda_3{}^{n-1} & \cdots & \lambda_n{}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Exemple : prenons à nouveau l'exemple précédent :

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

On a vu que les valeurs propres de cette matrice étaient : $\lambda_1=-1;\ \lambda_2=-2;\ \lambda_3=-3$

Donc pour obtenir une représentation avec une matrice diagonale il suffit de faire un changement de variable avec la matrice :

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\quad \text{Ou:}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

On obtient:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}=A_J$$

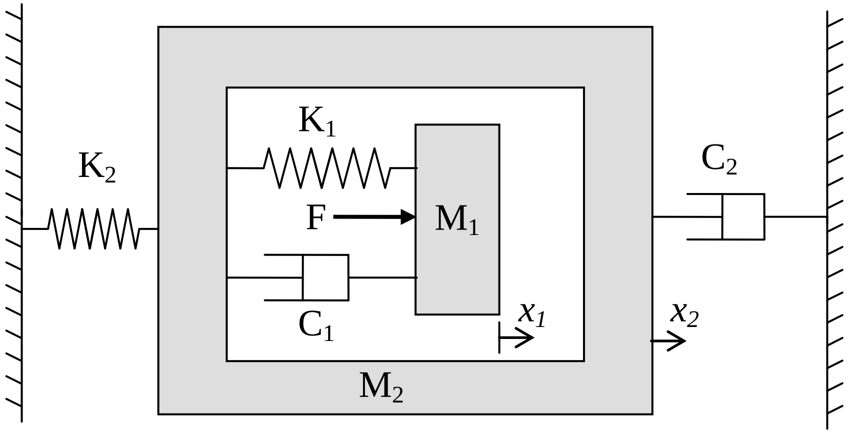
$$B_J=P^{-1}B=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -6\\ 3\end{bmatrix};\quad C_J=CP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

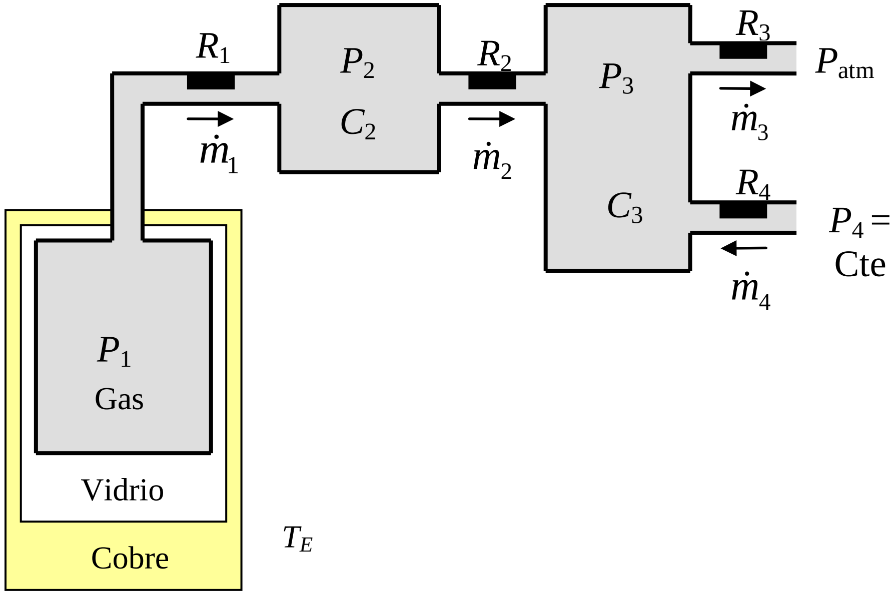
# EXERCICES.

## A. Obtenir le modèle mathématique en représentation d'état pour les systèmes suivants :

### 1. Système mécanique

$x_2 = f(F)$ et $x_1 = f(F)$




### 2. Système thermo-pneumatique

$\dot{m}_3 = f(T_E, P_4)$

Remarque: équation de relation des deux systèmes:

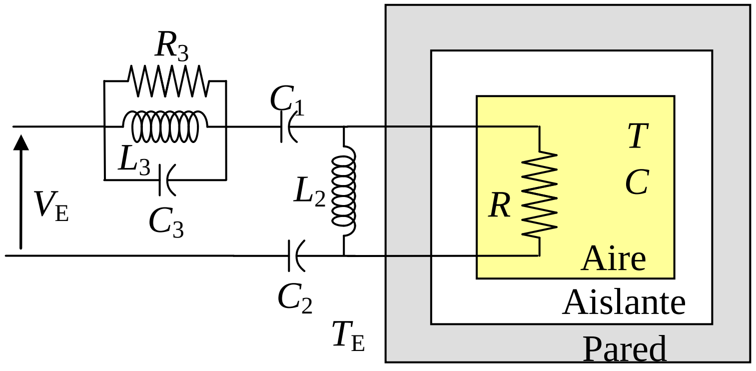
$$Pv = mRT$$

$$P = \rho RT$$

Avec: $\rho R =$ constant

## 3. Système thermo-électrique

$$T = f\left(V_E, T_E\right)$$

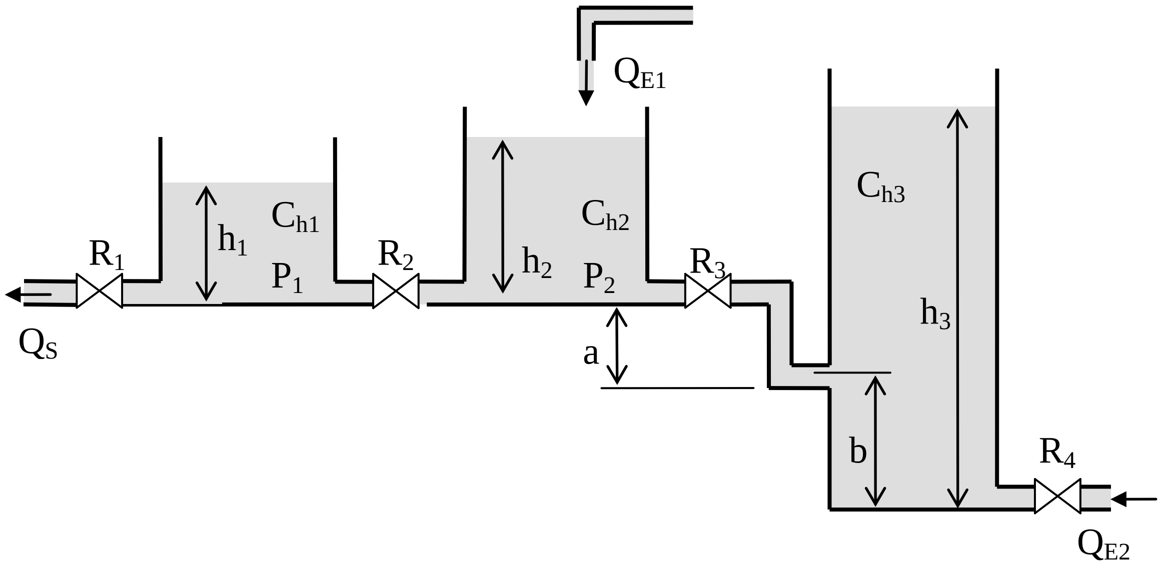



Remarque: équation de relation des deux systèmes:

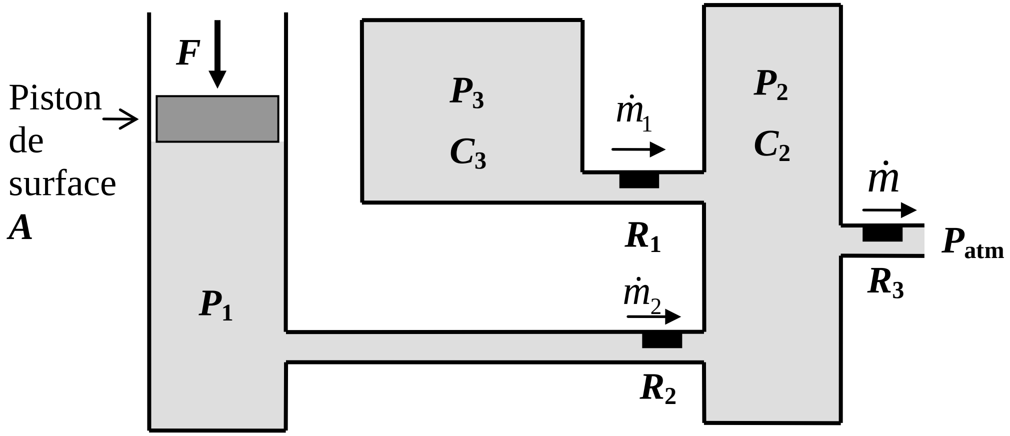
$$Q_R = VI = I^2 R = V^2 / R$$

## 4. Système hydraulique

$$Q_S = f\left(Q_{E1}, Q_{E2}\right)$$



## 5. Système pneumatique avec piston

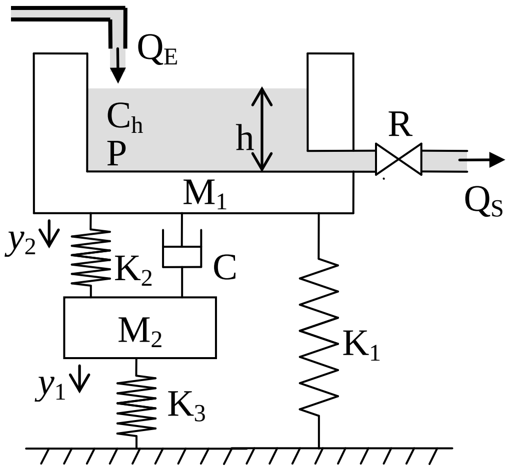



$$\dot{m} = f(F)$$

Remarque: équation de relation du système pneumatique et piston:

$$P = F/A$$

## 6. Système Mécanique- Hydraulique




$$y_1 = f(Q_E)$$

Remarque: équation de relation des deux systèmes:
$C_h$ = surface du réservoir

# Exercices

B. Pour les systèmes suivant déterminer la fonction de transfert, l'équation différentielle et obtenir une représentation canonique de Jordan :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$