Régulation HOE

Cours 3. Analyse des Systèmes en Représentation d'État

Résolution des équations d'état

La solution des équations d'état permet de calculer la valeur de chaque état à tout moment dans le temps, c´est donc la réponse du système.

Cette solution obéit à la solution classique des équations différentielles, dans un contexte multivariable.

REPONSE DES SYSTEMES, pour EQUATIONS DIFFERENTIELLES MONOVARIABLES.

La réponse d'un système correspond à la solution de l'équation différentielle du modèle, qui pour les systèmes linéaires invariants dans le temps peu se diviser en deux parties :

- La solution en régime transitoire, ou solution homogène (réponse libre) : qui représente la transition d'un état initial a un état final du système, et se calcule pour une entrée égale a zéro.
- La solution en régime permanent, ou solution particulière (réponse forcée) : qui représente la réponse du système pour un temps infini, et qui se calcule pour une entrée spécifique.

Réponses des systèmes de premier ordre.

Modèle mathématique de la forme:

$$\tau Dy + y = u$$

Avec:

y : Sortie ; u : entrée ; τ : constante de temps.

<u>Solution en Régime Transitoire</u>

On considère une entrée nulle:

$$\tau Dy + y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$\tau D + 1 = 0$$

Ou sa seule racine est :

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

La réponse libre est de la forme :

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Ou C est un paramètre qui dépend des conditions initiales.

Solution en Régime Permanent

Celle si dépend du type d'entrée.

Pour une **entrée en forme d'échelon**, valeur constante à changement brusque appliqué a un moment donné, pour tout $t > 0$ l'entrée $u = H$, ou H est une constante, l'équation du système prend la forme:

$$\tau Dy + y = H$$

Pour calculer la réponse forcée, on suppose une réponse de la forme

$$y_{Es} = A$$

Ou A est une constante.

On obtient la dérivé : $Dy_{Eas} = 0$

On substitue la solution supposée et sa dérivé dans l'équation, et on obtient :

$$A = H$$

$$y_E = H$$

Réponse du Système

La réponse complète du système, avec une **entrée en forme d'échelon**, est la somme des deux réponses, vu que le système est linéaire et donc satisfait le principe de superposition :

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} + H$$

Le coefficient C se détermine avec les valeurs de conditions initiales, su on suppose que pour $t = 0 \rightarrow y_0 = 0$:

On a :

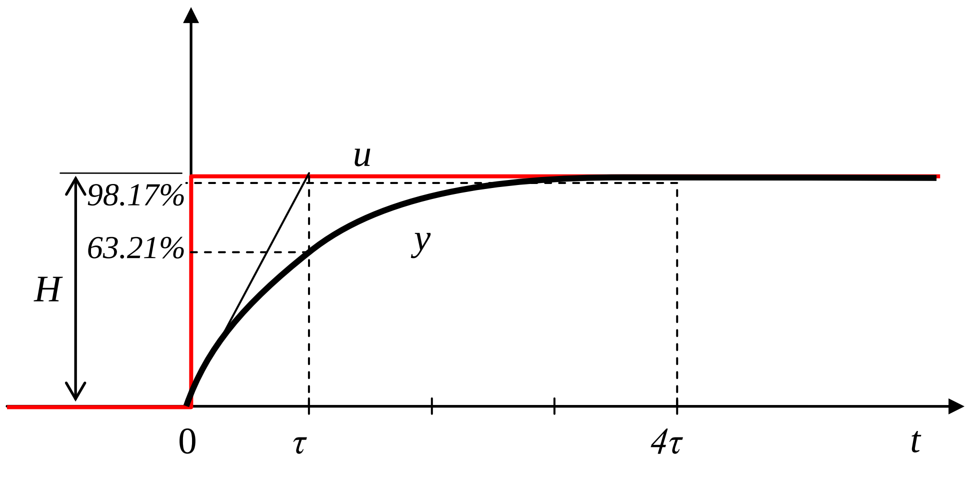
$$0 = Ce^{-0/\tau} + H$$

$$C = -H$$

La réponse du système est de la forme :

$$y = -He^{-t/\tau} + H$$

Cette solution est représente graphiquement sur la figure :



Ou pour $t = \tau \rightarrow u = 63{,}21\%H$

Réponses des systèmes de deuxième ordre.

Modèle mathématique de la forme:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n{}^2 y = \omega_n{}^2 u$$

Avec :

y : Sortie ; u : Entrée ; ξ : Coefficient d'amortissement ; ω_n : Fréquence naturelle

Solution en Régime Transitoire

On considère une entrée nulle:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n{}^2 y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n{}^2 = 0$$

Les deux racines sont :

$$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Il existe donc 4 possibles formes de la réponse libre, suivant la valeur du coefficient ξ :

Si $\xi > 1$: deux racines réelles positives, solution de la forme :

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$: deux racines réelles égales, solution de la forme :

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$: deux racines complexes conjuguées, solution de la forme :

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$$

Si $\xi = 0$: deux racines imaginaires pures (sans partie réelle), solution de la forme :

$$y_T = C_1 \sin\omega_n t - C_2 \cos\omega_n t$$

Avec C_1 et C_2 des coefficients dépendants des conditions initiales.

Solution en Régime Permanent

Pour une **entrée en forme d'échelon**, valeur constante à changement brusque appliqué a un moment donné, pour tout $t > 0$ l'entrée $u = H$, ou H est une constante, l'équation du système prend la forme:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n{}^2 y = \omega_n{}^2 H$$

Pour calculer la réponse forcée, on suppose une réponse de la forme

$$y_{Es} = A$$

Ou A est une constante.

On obtient la première et la deuxième dérivé : $Dy_{Es} = 0$; $D^2 y_{Es} = 0$

On substitue la solution supposée et es dérivées dans l'équation, et on obtient :

$$\omega_n{}^2 A = \omega_n{}^2 H$$

$$y_E = H$$

Réponse du Système

La réponse complète du système, avec une **entrée en forme d'échelon**, est la somme des deux réponses, vu que le système est linéaire et donc satisfait le principe de superposition :

$$y = y_T + y_E$$

Avec y_T qui peut prendre les quatre formes possibles, et les coefficients calculées avec les conditions initiales égales a zéro $t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0; \quad Dy_0 = 0$:

$\xi > 1$

$$y_T = \left(-H - \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + H$$

$\xi = 1$

$$y_T = -He^{-\xi\omega_n t} - \xi\omega_n Hte^{-\xi\omega_n t} + H$$

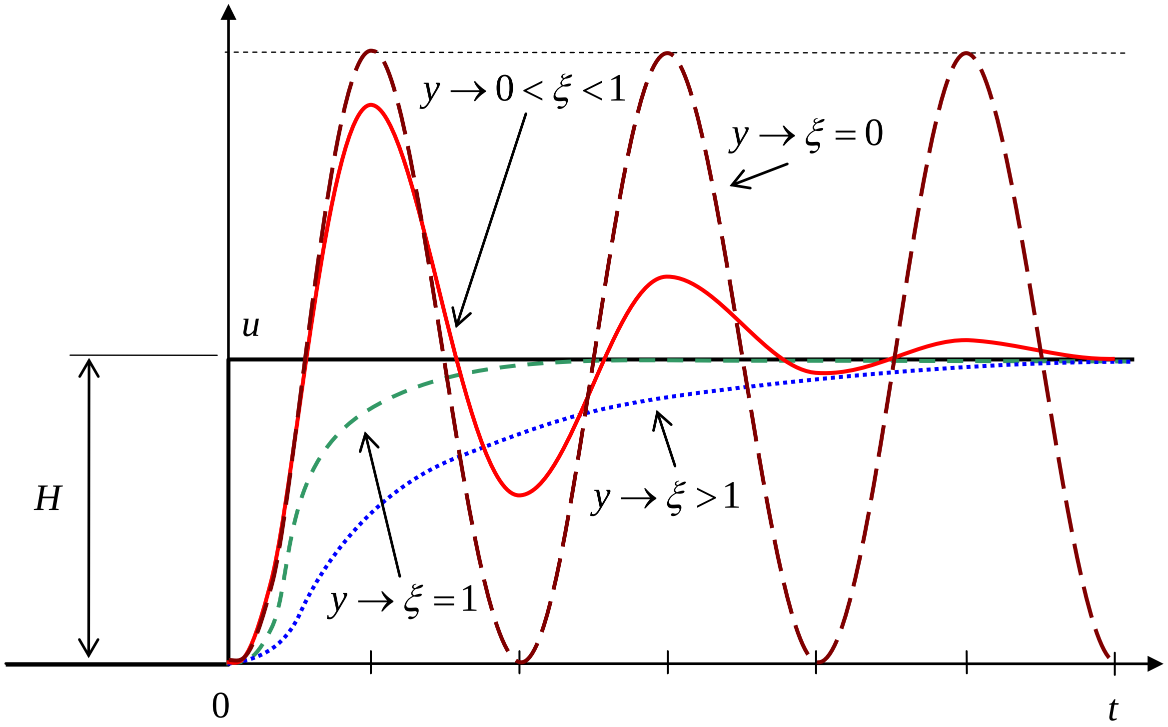
$0 < \xi < 1$

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(H \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t + \frac{\xi\omega_n H}{\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t \right) + H$$

$\xi = 0$

$$y_T = -H\cos\omega_n t + H$$

La représentation de cette réponse est présentée sur la figure:



$\xi > 1$: Réponse sur-amortie.

$\xi = 1$: Réponse avec amortissement critique.

$0 < \xi < 1$: Réponse sub-amortie.

$\xi = 0$: Réponse sans amortissement.

SOLUTION DES EQUATIONS EN REPRESENTATION D'ETAT.

Nous nous intéressons plus particulièrement à la solution de l'équation différentielle d'état (l'équation dynamique) :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Car une fois obtenu sa solution, le calcul de la sortie du système revient simplement a une opération algébrique.

La réponse du système de se type sera composé de deux partie : la réponse libre et la réponse forcée.

Réponse Libre : Dans le cas général où le modèle est temps-variant, il est nécessaire de définir la matrice de transition d'état qui intervient dans la solution de l'équation d'état.

Matrice de transition : La solution de l'équation d'état homogène (non commandée):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

où $A(t)$ est continue par rapport à t, est donnée par la réponse libre d'un système, qui est la réponse du système à ses seules conditions initiales :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \qquad \forall t \geq t_0$$

Où $\Phi(t, t0)$ est la matrice de transition, solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\Phi}\,(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \qquad \forall\, t \geq t_0$$

La matrice de transition possède les propriétés suivantes.

- $\Phi(t_2, t_2)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$
- $\Phi(t, t_0)$ est inversible pour tout t et tout $t0$
- $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \qquad \forall\, t, t_0$

Dans le cas général d'un système temps-variant, la matrice de transition est rarement accessible littéralement, elle doit être souvent obtenue par intégration numérique. Pour les systèmes LTI, la matrice de transition peut être calculée de manière explicite.

La **réponse forcée** d'un système est la réponse du système au seul signal d'entrée et pour des conditions initiales nulles. Dans le cas d'un système représenté par son modèle d'état, elle est donnée par :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

A partir de la donnée de la matrice de transition, il est possible de déterminer la solution de l'équation dynamique d'état qui correspond à la réponse complète du système par application du principe de superposition. C'est-à-dire la somme de la réponse libre plus la réponse forcée.

La solution de l'équation dynamique d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

et la sortie s'écrit alors :

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

CAS PARTICULIER DES SYSTEMES LTI. Solution dans le domaine temporel.
Soit le modèle LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

complètement caractérisé par le triplet (A, B, C, D), où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie.

On définie l'**ordre** (n) du modèle comme la dimension du vecteur d'état.

Si la matrice de transmission directe $D = 0$ alors le modèle est dit **strictement propre** dans un autre cas il est dit **propre**.

Le modèle LTI homogène (non commandé) de condition initiale $x(t_0) = x_0$,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

constitué par une matrice d'équations de premier ordre, a pour matrice de transition :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

où il est possible d'obtenir la solution par le développement en série de Taylor :

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^it^i}{i!}$$

Sa réponse libre est donc donnée par :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

Attention : A différence des scalaires ($a.b = b.a$) les opérations matricielles ne sont pas commutatives ($A.B \neq B.A$), donc :

$$e^{(a+b)t} \neq e^{at} + e^{bt}$$

Theoème de Cayley-Hamilton.

Permet de calculer l'exponentiel matriciel à partir d'un nombre fini d'opérations. Ce théorème exprime que toute matrice carrée A est solution de son équation caractéristique. On note $QA(s)$ le polynôme caractéristique de A : $QA(s) = det(sI - A)$. Si A est une matrice carrée de taille n, $QA(s)$ est un polynôme de degré n.

$$QA(s) = det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Le théorème de Cayley-Hamilton assure que A vérifie :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$$

En d'autres termes, A_n s'exprime comme une combinaison linéaire de puissances inférieures de A :

$$A_n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_0 I$$

Par conséquent, il est possible d'exprimer

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At} = \Phi(t)$$

en ne faisant intervenir que des puissances de A inférieures strictement à n, c'est-à-dire, qu'il existe un jeu de coefficients $(\alpha 0, \alpha 1 \ldots \alpha n - 1)$ tels que :

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I$$

La **réponse forcée** d'un système LTI est donnée par :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Le modèle LTI,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

A pour solution à l'Équation dynamique d'état :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Et la réponse du système est :

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)$$

CAS PARTICULIER DES SYSTEMES LTI. Solution dans le domaine de Laplace.

Il est aussi possible de déterminer la matrice de transition en passant par la transformée de Laplace du système.

Soit le modèle LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Si on considère les conditions initiales égales a zéro, ce qui est le cas pour les transformées de Laplace, la solution de l'équation d'état est de la forme :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Il est possible de démontrer que :

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{\Phi(t)\} = [sI - A]^{-1}$$

Il est donc possible d'obtenir la solution de l'équation d'état avec la transformée inverse de Laplace de $\Phi(s)$:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$$

Exemple : On veut obtenir la matrice de transition du système linéaire représenté par la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Il est donc possible d'obtenir :

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \left[s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta s} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(\mathrm{s}^2 + 3\mathrm{s} + 2)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & -\dfrac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la transformée inverse il faut décomposer les éléments en fractions, par exemple pour le premier élément de la matrice (A_{11}) :

$$\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Avec : $K_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$, donc :

$$K_1 = \left.\frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$$
$$K_{21} = \left.\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-2} = -1$$

La matrice s'écrit :

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

La matrice de transition du système est :

$$\Phi(\mathrm{t}) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Pour des conditions initiales connues, par exemple $x_1(0) = x_2(0) = 1$, il est possible de déterminer la valeur des états en tout temps :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(\mathrm{t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Stabilité des systèmes linéaires

La notion de stabilité est fondamentale dans le développement des systèmes de commande et particulièrement pour les architectures de commande à contre-réaction.

L’absence de cette propriété qualitative rend les systèmes inutilisables en pratique.

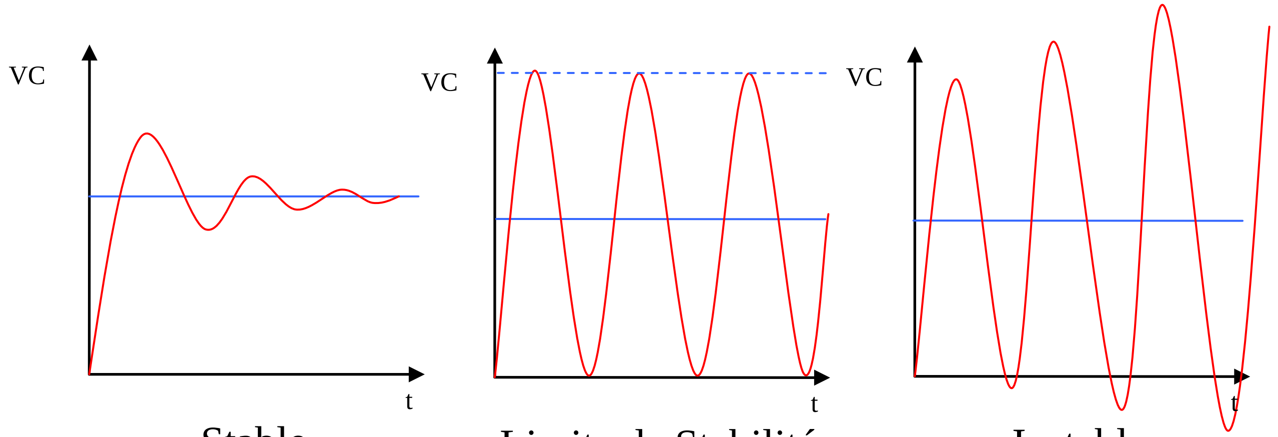
Il existe plusieurs notions de stabilité. Par exemple, la notion de stabilité pour l’étude d’un système autonome qui n’est pas identique dans le cas général à celle utilisée pour l’´etude d’un système soumis à des entrées (d’amplitude bornée ou d’énergie bornée...) de commande. La stabilité entrée-sortie n’implique pas nécessairement la stabilité interne. De même, la notion de stabilité intéressante à étudier peut être globale, locale ou semi-globale suivant le système (non linéaire) considéré

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la notion de stabilité utilisé pour certaines classes de systèmes dynamiques (LTI par exemple), et l’utilisation de la description entrée-sortie, ce qui conduit à la notion de stabilité entrée-sortie bornées, plus communément dénommée stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output).

STABILITE BIBO.

Définition 1: Un système est stable au sens BIBO si sa réponse a une entrée borné est bornée.

Définition 2 : Un système est stable si la réponse libre (transitoire) décroit, c'est-à-dire celle-ci diminue fur et à mesure que temps augmente.



Stable Limite de Stabilité Instable

Pour qu’un système puisse satisfaire cette condition il est nécessaire que les coefficients de t dans les exponentiels de la réponse du système, soient des numéros négatifs.

Pour que cela se produise il est donc nécessaire que les racines de l’équation caractéristique soient négatives ou avec sa partie réelle négative. On peu conclure de la condition antérieure que la stabilité BIBO est une caractéristique propre du système car elle dépend du système et en aucun cas de l’entrée.

Exemples :

- Pour un système linéaire monovariable du premier ordre, l'équation caractéristique est :
$$\tau s + 1 = 0$$
Qui a une seule racine : $s = -1/\tau$
La solution transitoire est de la forma:
$$y = Ce^{-t/\tau}$$
On observe bien que les transitoires diminuent avec t pour tout τ positif, donc le système sera stable pour toute valeur de τ positive.

- Pour un système linéaire monovariable du deuxième ordre, l'équation caractéristique est :
$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$
Quatre types de racines, donc quatre possibles solutions transitoires :

Si $\xi > 1$: $y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t}$ Stable

Si $\xi = 1$: $y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$ Stable

Si $0 < \xi < 1$: $y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$ Stable

Si $\xi = 0$: $y_T = C_1 \sin\omega_n t - C_2 \cos\omega_n t$ **Limite de stabilité**

Si $\xi < 0$: $y_T = e^{\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$ **Instable**

Limite de stabilité

C'est la frontière entre la stabilité et l'instabilité et elle se présente quand les racines de l'équation caractéristique on leur partie réelle égale a zéro.
Dans ce cas la réponse devient une oscillation permanente dont l'amplitude reste constante. C'est le cas par exemple que $\xi = 0$ pour un système de second ordre.

Conclusion

- Un système est stable (au sens BIBO) si toutes les racines de l'équation caractéristique son négatives ou avec leur partie réelle négative.
- Un système est instable, si au moins une des racines de l'équation caractéristique est positive ou avec sa partie réelle positive.
- Un système est a la limite de la stabilité si au moins une paires de racines de l'équation caractéristique sont des imaginaires conjugues purs (partie réelle égale a zéro).

Exemples :

$(D+1)(D+2)(D+3)=0$ Stable, toutes les racines négatives.

$(s+1)(s+2)(s-3)(s^2+4)=0$ Instable, une racine positive.

$(s+1)(s^2-4)=0$ Instable, une racine positive.

$(s^2+4)(s^2+16)=0$ Limite de stabilité, deux paires de racines imaginaires pures.

$(s^2+16)(s+1)=0$ Limite de stabilité, une paire de racines imaginaires pures.

$(s^2+2s-8)(s+2)(s^2+1)=0$ Égal a : $(s+4)(s-2)(s+2)(s^2+1)=0$ Instable, une racine positive.

ANALYSE DE STABILITE EN ESPACE D'ETAT

Pour un système LTI sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

La stabilité peu se déterminer en calculant les valeurs propres de la matrice A. Car c'est cette matrice que représente le système et contient l'information de l'équation caractéristique. De fait les valeurs propres d'une matrice sont les racines de l'équation caractéristique.

Le critère qui s'applique est donc :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont négatives alors le système est **stable**.
- S'il existe une paire de valeurs propres imaginaires pures le système est à la **limite de la stabilité**.

- S'il existe une valeur propre positive ou avec la partie réelle positive alors le système est **instable**.

Obtention des valeurs propres d'une matrice

Les valeurs propres d'une matrice sont les racines de l'équation caractéristique quelle représente, il faut donc en premier pas construire l'équation caractéristique, ce qui se fait avec :

$$|sI - A| = 0$$

Ensuite on détermine les racines de cette équation, qui seront les valeurs propres de la matrice.

Exemple :
Pour le système LTI représenté para la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique est : $|sI - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{bmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$

Les valeurs propres de la matrice A sont : $\lambda_1 = -1; \ \lambda_2 = -2; \ \lambda_3 = -3$

Le système est stable.

CRITERE DE ROUTH

Le critère de Routh est un algorithme permettant de déterminer si un polynôme d'ordre quelconque a des racines à partie réelle positive, sans avoir besoin de calculer la valeur exacte de ces racines.

Il s'applique à une équation caractéristique de la forme :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Par la construction du
Tableau de Routh :

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-3} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-4} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Avec :

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \;;\; b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \;;\; b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \;;\; c_1 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \;;\; \ldots$$

Le tableau se continue horizontal et verticalement jusqu'à obtenir $n+1$ files.

Le critère de Routh :

- Toutes les racines de l'équation caractéristique sont négatives ou leur partie réelle est négative si touts les coefficients de la première colonne du tableau de Routh ont le même signe. Donc le système sera stable.
- Dans le cas contraire, le nombre de racines du polynôme dont la partie réelle est positive est égal au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh. Donc le système sera instable.
- Si un élément de la première colonne est nul, pour continuer la construction du tableau on le remplace alors par $\varepsilon > 0$ et on continue la construction du tableau. Si l' élément au dessous de ε est positif, il existe une racine à partie réelle nulle. Si l'élément au dessous de ε est négatif, il y a changement de signe et donc il existe une racine à partie réelle positive.

Observations au critère de Routh

- Si un des coefficients de l'équation caractéristique est nul ou négatif, le système est instable et le tableau de Routh n'est pas nécessaire.
- Tous les éléments d'une file du tableau de Routh peuvent se multiplier para un coefficient positif sans modifier les propriétés du tableau.

Exemples. Déterminer la stabilité des systèmes représentes para les équations suivantes :

1. $s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$

   Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 6 & 8 & 0 \\ s & 32/3 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable.

2. $8s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 5 = 0$

   Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 8 & 6 & 5 \\ s^3 & 5 & 3 & 0 \\ s^2 & 6/5 & 5 & 0 \\ s & -107/6 & 0 & \\ s^0 & 5 & 0 & \end{array}$$

Le système est instable.

3. $s^5+3s^4+7s^3+20s^2+6s+15=0$

Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{c|cccc} s^5 & 1 & 7 & 6 & 0 \\ s^4 & 3 & 20 & 15 & 0 \\ s^3 & 1/3 & 1 & 0 & \\ s^2 & 11 & 15 & 0 & \\ s & 6/11 & 0 & & \\ s^0 & 15 & 0 & & \end{array}$$

Le système est stable.

4. $s^5+2s^4+3s^3+6s^2+5s+3=0$

Le tableau de Routh est :

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 5 \\ s^4 & 2 & 6 & 3 \\ s^3 & 0\rightarrow\varepsilon & 7/2 & 0 \\ s^2 & -\infty & 3 & 0 \\ s & 7/2 & 0 & \\ s^0 & 3 & 0 & \end{array}$$

Le système est instable.

Exercises :

1. Déterminer la valeur ou la plage de valeurs de K pour que les systèmes suivants soient stables :
   a. $3s^3 + 3s^2 + s + K + 2 = 0$
   b. $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$
   c. $s^3 + (4+K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$
   d. $3s^4 + 2s^3 + Ks^2 + s^2 + s + 2 + K = 0$
   e. $s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + Ks^3 + s + K = 0$
   f. $A = \begin{bmatrix} K+2 & 0 & 0 \\ 0 & K+1 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   g. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\left(\frac{K+2}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   h. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(4+K) & -6 & -8(2+K) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Commandabilité, observabilité, représentations minimales

La commandabilité et l'observabilité sont deux concepts développés pour la représentation d'état des systèmes qui permettent de caractériser respectivement la possibilité que la commande exerce une influence sur un des états et la possibilité d'obtenir une certaine information d'un des états. Cependant leur concept peut être utilisé dans d'autres représentations.

COMMANDABILITE

La commandabilité est une caractéristique d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique si une ou plusieurs de ces dynamiques peuvent être modifiées par les entrées.

Définition

Un état x_i est commandable en t_0 s'il est possible de d´eterminer $u(t)/[t_0 \ t_f\ ]$ conduisant tout état initial $x_i(t_0)$ vers 0 en $t_0 \leq t_1 \leq t_f$.

Si cette propriété est vraie $\forall\, t_0$ et $\forall\, i = 1,\cdot\cdot\cdot n$ alors le système est complètement commandable.

Remarques

- Si un système n'est pas complètement commandable alors pour certaines conditions initiales il n'existe pas d'entrée de commande pouvant ramener le système à l'origine.

- La commandabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état.

Critère De Commandabilité (Kalman)
C'est un critère qui permet de définir la commandabilité d'un système LTI avec l'information des matrices A et B.
Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

où $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, $\mathcal{C}$ est de rang n,

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rang}([B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]) = n$$

Remarque. La commandabilité d'un système de matrices caractéristiques (A,B) sera appelée commandabilité de la paire (A,B).

Rappel. Le rang d'une matrice A est: le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants, et peu se calculer par la taille du plus grand mineur non nul de A.

Exemple. pour le système mécanique étudié dans les cours précédents:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t)$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{M} \\ \dfrac{1}{M} & -\dfrac{C}{M^2} \end{bmatrix}$$

Comme :

$$\det \mathcal{C} = -\frac{C}{M^2} - \frac{1}{M^2} \neq 0 \;\Rightarrow \mathrm{rang}(\mathcal{C}) = 2$$

et $n = 2$, donc la représentation d'état est commandable.

Exemple 2 : pour le système thermique, étudié dans les cours précédents, avec :

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_C}-\frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V}-\frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pour simplifier le calcul on suppose que : $R_1 = R_2 = R_3 = 1; C_c = C_V = C_{Hg} = 1$

On obtient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme : $\det \mathcal{C} = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \mathrm{rang}(\mathcal{C}) = 3$ donc la représentation d'état du système est commandable.

Exemple 3 : Pour le système représenté par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour construire la matrice de commandabilité :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système est de rang 2 car les deux dernières lignes sont identiques, donc le système est : **non commandable**.

Remarque : il n'est pas nécessaire de construire la matrice $\mathcal{C}$ au delà de la taille $n \times n$.

OBSERVABILITE

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

Définition

Un état x_i est observable en t_0 s'il est possible de déterminer $x_i(t_0)$ connaissant $y(t)$ /$[t_0\ t_f]$.

Si cette propriété est vraie $\forall\ t_0$ et $\forall\ i\ =\ 1,\cdot\cdot\cdot,n$ alors le système est complètement observable.

Remarques : La notion d'observabilité est cruciale pour les systèmes où il est impossible de mesurer tout le vecteur d'état, et doit être estimé à partir des données fournies par la sortie.

Critère D'observabilité (Kalman)

La notion d' observabilité et fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C.

Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état, et de mesure

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

où $A \in R^{n\times n}$, $C \in R^{r\times n}$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité, $\mathcal{O}$ est de rang n :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

Exemple : pour le système mécanique étudié dans les cours précédents, avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$ le rang de $\mathcal{O} = 2$ donc le système est observable.

Exemple 2 : pour le système thermique, étudié dans les cours précédents, avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient les matrices :

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$ le rang de $\mathcal{O} = 3$ donc le système est observable.

NOTION DE DUALITE

Les notions d'observabilité et de commandabilité sont deux notions duales. Pour le montrer nous considérons les deux systèmes (S) et (S^*) définis par :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad \dot{x}^* = A^T x^*(t) + C^T u^*(t)$$
$$y = Cx(t) \qquad y^* = B^T x^*(t)$$

(S^*) est appelé système dual ou adjoint de (S).

Il est possible de démontrer que (S) est commandable si et seulement si (S^*) est observable et que (S) est observable si et seulement si (S^*) est commandable.

En effet, (S^*) est observable si et seulement si :

$$[\, B^T \vdots\ B^T A^T \vdots\ B^T (A^T)^2 \vdots \ldots \vdots B^T (A^T)^{n-1} \,]^T$$

est de rang n c'est-à-dire si et seulement si

$$[\, B \vdots\ AB \vdots\ A^2 B \vdots \ldots \vdots\ A^{n-1} B \,]^T$$

soit encore si et seulement si (S) est commandable.

THEORIE DE LA REALISATION

On appelle réalisation d'une matrice de transfert donnée $G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$, toute représentation d'état LTI (A, B, C, D) telle que :

$$G(s) = C(s1 - A)^{-1}B + D$$

La réalisation (A, B, C, D) d'ordre minimal $n\,(x \in R^n)$ est dite réalisation minimale ou réalisation irréductible.

L'exemple suivant, montre que le problème de réalisation est très étroitement lié aux notions de commandabilité et d'observabilité. Soit :

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Les quatre représentations d'état suivantes sont des réalisations de $G(s)$.

- Non observable et non commandable :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Observable et non commandable :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Commandable et non observable :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Observable et commandable :

$$A_4 = [-2] \quad B_4 = [1] \quad C_4 = [1]$$

On observe que la réalisation 4 est minimale alors que les trois premières ne le sont pas.

L’exemple montre d’une les part que représentations d’état de l’exemple ne sont pas équivalentes et d’autre part que la simplification entre un pôle et un zéro est directement lié aux propriétés d’observabilité et de commandabilité de la réalisation.

Enfin, on en déduit le résultat suivant.
Une réalisation d’état (A, B, C, D) de $G(s)$ est minimale (irréductible) si et seulement si elle est commandable et observable. Dans ce cas, on utilise la notation :

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

LES FORMES CANONIQUES D’ETAT

Le fait de disposer de différentes représentations d’état pour un même système, car le vecteur d’état n’est pas unique, est un avantage qui va permettre d’utiliser des formes particulières de la représentation d’état appelées les formes canoniques.

On distingue trois grands types de formes canoniques :

- La forme diagonale ou quasi-diagonale de Jordan.
- La forme compagne de commande.
- La forme compagne d’observation.

Forme Modale ou Diagonale de Jordan.

Dans le cas où le transfert d'ordre n, strictement propre, possède des pôles $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ réels distincts (matrice $A \in R^{n\times n}$ a n valeurs propres distinctes), il est possible de décomposer la fonction de transfert en éléments simples :

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \left[c_0 + \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)} = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

Il est possible d'obtenir une réalisation, avec la matrice A sous la forme diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad D = [c_0]$$

Dans le cas ou les pôles soient imaginaires, il est possible de faire la transformation suivante pour obtenir la matrice A réelle :

$$\begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Forme Quasi diagonale de Jordan

Dans le cas ou un transfert possède de pôles répétés $(1/(s-\lambda)^{n'})$, celui-ci est irréductible a un schéma parallèle car la décomposition en éléments simples est :

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n}=\left[\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^{n'}}+\cdots+\frac{c_{n'}}{(s-\lambda_1)^{n'}}+\frac{c_{n'+1}}{s-\lambda_{n'+1}}+\cdots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^{n'}\prod_{i=n'+1}^{n}(s-\lambda_i)}=\sum_{i=1}^{n'}\frac{c_i}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{i=n'+1}^{n}\frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

Il est possible d'obtenir une réalisation, avec la matrice A sous la forme dite Quasi diagonale de Jordan:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 1 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & & \vdots\\ & & & \lambda_{n'+1} & & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \lambda_n\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & & \cdots & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

Forme compagne pour la commande

Dans le cas où le transfert d'ordre n, strictement propre :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Il est possible d'obtenir une représentation dite Compagne pour la Commande de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir cette représentation on va multiplier et diviser la fonction de transfert par une variable intermédiaire Z(s) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n) Z(s)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Z(s)}$$

Cette opération ne modifie pas les relations dans le système. On en déduit deux relations :

$$Y(s) = (b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n) Z(s)$$
$$U(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Z(s)$$

La transformé inverse de Laplace des deux relations est :

$$y = b_1 D^{n-1} z + \cdots + b_n z$$
$$u = D^n z + a_1 D^{n-1} z + \cdots + a_n z$$

Si on choisi les variables d'état comme :

$$x_1 = z$$
$$x_2 = Dz$$

$$x_n = D^{n-1} z$$

Avec ses variables d'état on obtient les équations d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_4 = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u$$

Et l'équation de sortie :

$$y = b_1 x_n + \cdots + b_n x_1$$

Forme compagne d'observation

Dans le cas où le transfert d'ordre n, strictement propre :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n}$$

Il est possible d'obtenir une représentation dite Compagne d'observation de la forme :

$$A=\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ -a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Pour cela on écrit l'équation différentielle que provient de la fonction de transfert :

$$D^n y+a_1 D^{n-1} y+\cdots+a_{n-1} D y+a_n y=b_1 D^{n-1} u+\cdots+b_{n-1} D u+b_n u$$

Qui peur se réorganiser de la forme :

$$D^n y+\left(a_1 D^{n-1} y-b_1 D^{n-1} u\right)+\cdots+\left(a_{n-1} D y-b_{n-1} D u\right)=b_n u-a_n y$$

Si on choisi comme variables d'état :

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1 + a_1 y - b_1 u$$
$$\vdots$$
$$x_n = \dot{x}_{n-1} + a_{n-1} y - b_{n-1}\, u$$

On obtient un une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - x_2 + b_1 u$$
$$\dot{x}_2 = \ -a_2 x_1 - x_3 + b_2 u$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} \ = -a_{n-1} y - x_n + b_{n-1}\, u$$
$$\dot{x}_n = D^n y + (a_1 D^{n-1} y - b_1 D^{n-1} u) + \cdots + (a_{n-1} D y - b_{n-1} D u) = -a_n x_1 + b_n u$$

Et l'équation de sortie :

$$y = x_1$$

Il est aussi possible d'obtenir la forme canonique ou de passer d'une forme à une autre avec un changement de variable linéaire.

Exemple : Pour le système représenté par l'équation différentielle suivante :

$$D^3y + 6D^2y + 11Dy + 6y = 6u$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+3}$$

Avec : $c_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$,

donc :

$$c_1 = \left.\frac{6(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = 3;\ c_2 = \left.\frac{6(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-2} = -6;\ c_3 = \left.\frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-3} = 3$$

La représentation d'état sous la forme canonique de Jordan est :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état sous la forme Compagne de Commande est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état sous la forme Compagne d'Observation est :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercices :

Obtenir des réalisations pour les fonctions de transfert suivantes, déterminer leur commandabilité et observabilité et présenter les réalisations sous les formes canoniques étudies.

1. $G(s) = \frac{s^2-s-2}{s^3+10s^2+29s+20}$

2. $G(s) = \frac{s^3+10s^2+29s+20}{s^4+8s^3+23s^2+28s+12}$

3. $G(s) = \frac{s+1}{s^4-5s^2+4}$

4. $G(s) = \frac{s+1}{s^3+11s^2+36s+36}$

5. $G(s) = \frac{s^2-s-2}{s^4-5s^2+4}$

6. $G(s) = \frac{s+1}{s^4+8s^3+23s^2+28s+12}$