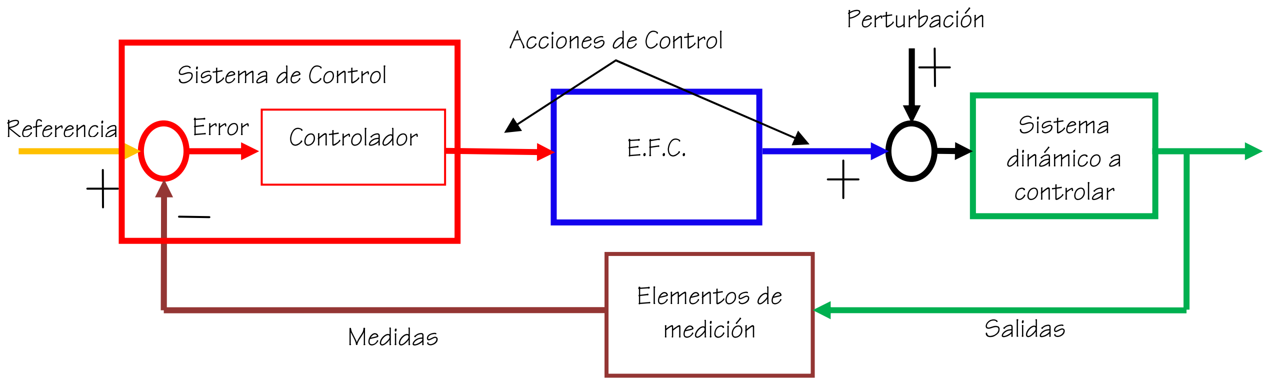
TEORÍA DE CONTROL

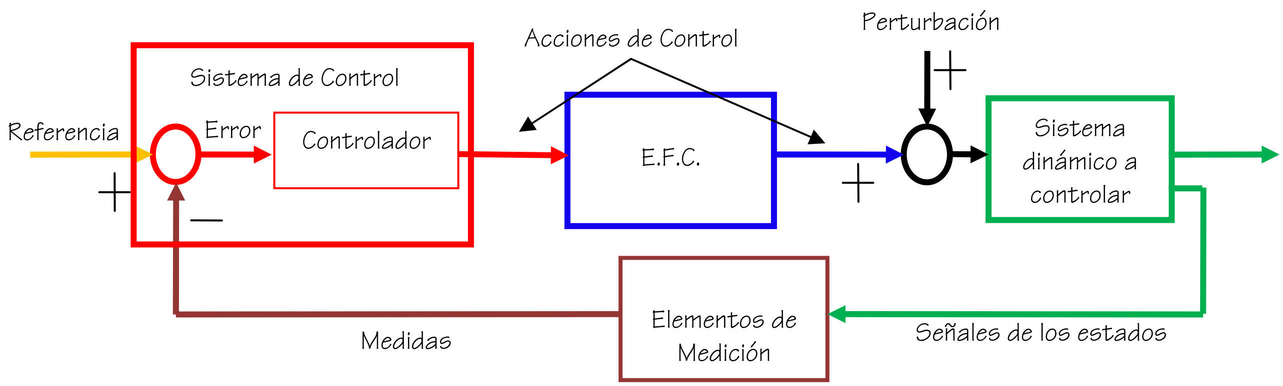
Tema 11. Control por Retorno de Estado

Retorno de estado lineal.

El principio básico del control en lazo cerrado clásico se muestra en la siguiente figura:



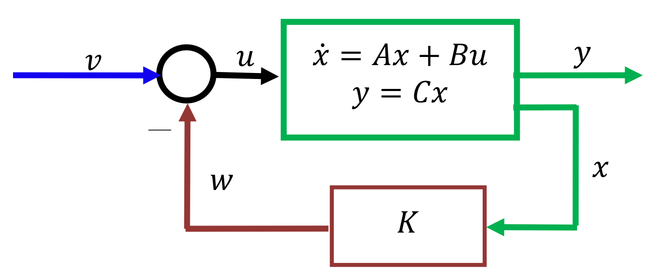
En este las acciones de control son calculadas por la medición de las salidas (variables controladas), este tipo de control suele denominarse control por retorno de salida.
Mientras que por su lado el principio básico del control por retorno de estado se basa en realizar las acciones de control en función de los valores medidos de los estados. Este se puede apreciar en la siguiente figura:



Este esquema se puede simplificar tal como aparece en la figura siguiente:

Donde K es una matriz (vector) línea v es una entrada nueva.

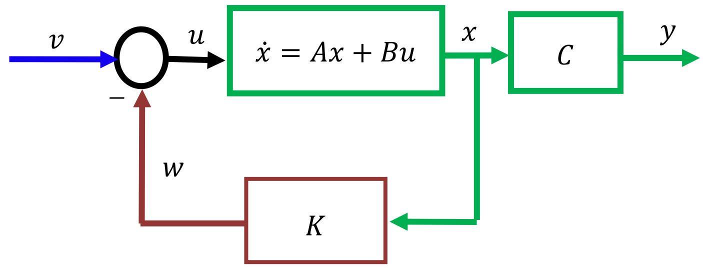
El objetivo es determinar la acción de control (K), de manera que los polos de la función de transferencia del sistema, en lazo cerrado, se ubiquen de forma conveniente en el plano complejo, para satisfacer estabilidad y especificaciones de amortiguamiento, velocidad, etc.



Como ya estudiamos anteriormente, en un sistema expresado en espacio de estado, los polos de la función de transferencia son los valores propios de la matriz de estado A, por lo tanto una retroalimentación sobre los estados con una matriz K, es equivalente a realizar una modificación de la matriz de estado del sistema, tal como se explica a continuación.

Consideremos el sistema representado en la figura y descrito por la ecuación de estado siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$



El retorno de estado introduce una modificación sobre la entrada del sistema de la forma:

$$u(t) = v(t) - w(t) = v(t) - Kx(t)$$

Las ecuaciones del sistema en lazo cerrado se escriben como:

$$\dot{x} = Ax(t) + B[v(t) - Kx(t)] = [A - BK]x(t) + Bv(t)$$

En consecuencia la matriz de estado del sistema en lazo cerrado es: $A_{LC} = A - BK$.

La dinámica del sistema en lazo cerrado estará determinada entonces por de los valores propios de la matriz (A_{LC})

Estos valores propios como bien sabemos son las raíces de la ecuación característica $\lambda_{A-BK(s)}$, que se obtienen con:

$$|\lambda I - A_{LC}| = 0$$

El control modal

También denominado control por ubicación de polos. Este se puede realizar en espacio de estado, o en forma algebraica con las funciones de transferencia.

Se denomina control modal al control que consiste en determinar una matriz de retroalimentación de estado K tal que los valores propios de la matriz A_{LC} se ubiquen en posiciones prefijadas arbitrariamente $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ (valores reales o complejos conjugados). La existencia de una solución depende de la controlabilidad del sistema y de la posibilidad de acceder a los estados del mismo.

Cálculo de la matriz K, caso de un sistema en forma cualquiera

En el caso que el sistema este representado por una forma cualquiera, el retorno de estado puede modificar de forma importante la matriz de estado del sistema en lazo cerrado respecto de su forma en lazo abierto. Las etapas para el cálculo del control (matriz K) son las siguientes:

1. Cálculo de la matriz ($A_{LC} = A - BK$)
2. Cálculo del polinomio característico de A_{LC}. Que se determina con $|sI - A_{LC}|$.
3. Resolución de la ecuación polinomial:
$$|sI - A_{LC}| = (s - \lambda_0)(s - \lambda_{01})\dots(s - \lambda_{n-1})$$
Donde $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$) son los polos que se quieren imponer al sistema en lazo cerrado.

Otra forma de calcular la matriz K consiste en efectuar un cambio de variable lineal al sistema para obtener una forma canónica de controlabilidad.

Notas:

- Para que el control se pueda realizar físicamente se deben escoger valores propios reales o complejos conjugados por pares, lo cual garantiza una función de transferencia de coeficientes reales.

- Como la estabilidad es la primera característica que se debe asegurar estos coeficientes deben tener su parte real estrictamente negativa.

Ejemplo 1:
Consideremos el sistema LTI definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Queremos realizar un control por retorno de estado para obtener un sistema en lazo cerrado cuyos polos se ubiquen en $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 - 2i, \lambda_3 = -1 + 2i$.

Esto es equivalente a obtener un sistema cuya ecuación característica sea:

$$Ec = (s+1)(s+1+2i)(s+1-2i) = (s+1)(s^2+2s+5) = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

La ecuación para la ubicación de los polos es:

$$|sI - A_{LC}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right| = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

$$\begin{vmatrix} s - 1 + 2k_1 & -4 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -6 + 3k_1 & s + 1 + 3k_2 & -3 + 3k_3 \\ -2\_ - k_1 & -2 - k_2 & s + 5 - k_3 \end{vmatrix} = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

$$s^3 + (2k_1 + 3k_2 - k_3 + 5)s^2 + (25k_1 + 21k_2 + 10k_3 - 29)s + (41k_1 + 72k_2 + 71k_3 - 129) = s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{bmatrix} \right)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.4227 & -0.9416 & 2.0206 \end{bmatrix}$$

Calculo de la matriz $\boldsymbol{K}$, caso de un sistema bajo la forma canónica de controlabilidad

Cuando el sistema se encuentra en la forma canónica de controlabilidad, las matrices A y B tienen formas particulares que permiten facilitar el cálculo de la matriz K:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$$

Como lo que se quiere determinar es una matriz $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}$, tal que:

$$A_{LC}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a_n-k_1 & -a_{n-1}-k_2 & \cdots & \cdots & -a_1-k_{n-1}\end{bmatrix}$$

Tenga valores propios $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$).

El control modal impone que el denominador de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado sea:

$$den\big(H_{BF}\,(s)\big)=(s-\lambda_0)(s-\lambda_1)\ldots(s-\lambda_{n-1})=s^n+a_1's^{n-1}+\ldots+a_{n-1}'s+a'_n$$

La ubicación de los polos en este caso no modifica la forma de la representación (sigue siendo en lazo cerrado de forma canónica de controlabilidad). En consecuencia, obtenemos dos escrituras distintas para la matriz de estado del sistema en lazo cerrado $(A-BK)$:

$$A_{LC}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a_n-k_1 & -a_{n-1}-k_2 & \cdots & \cdots & -a_1-k_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a'_n & -a'_{n-1} & \cdots & \cdots & -a'_1\end{bmatrix}$$

Y se obtiene el sistema de n ecuaciones con n incógnitas siguiente:

$$\begin{cases}a_n+k_1=a_n'\\ a_{n-1}+k_2=a_{n-1}'\\ \vdots\\ a_1+k_{n-1}=a_1'\end{cases}$$

Por lo tanto la operación de calcular la matriz $K=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$ es mucho más sencilla.

Ejemplo 2:
Para el sistema del ejemplo 1 la función de transferencia es:

$$G(s)=\frac{2s^2+25s+41}{s^3\,+\,5\,s^2\,-\,29\,s\,-\,129}$$

La representación de estado bajo la forma canónica de controlabilidad es:

$$A_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 129 & 29 & -5\end{bmatrix};B_C=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};C_C=[41 \quad 25 \quad 2]$$

Se quiere un control por retorno de estado para que el sistema en lazo cerrado tenga los polos en $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1-2i, \lambda_3=-1+2i$; lo cual es equivalente a tener un sistema cuya ecuación característica sea:

$$Ec=(s+1)(s+1+2i)(s+1-2i)=(s+1)(s^2+2s+5)=s^3+3s^2+7s+5$$

Por lo tanto la matriz K se obtiene con:

$$A_{LC}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 129-k_1 & 29-k_2 & -5-k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

$$K=[134 \quad 36 \quad -2]$$

Calculo de la matriz K con la ecuación de Ackermann

Se puede determinar los valores del control por retorno de estado utilizando una ecuación matricial denominada ecuación de Ackermann la cual expresa lo siguiente.

Para un control donde: $u=-Kx$

Et si se quiere imponer al sistema en lazo cerrado la ecuación característica de la forma:

$$q(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

La matriz de la ganancia del controlador (K) se puede calcular con la ecuación:

$$K = [0\ 0\ 0 \cdots 1]\mathcal{C}_c^{-1}q(A)$$

Donde $\mathcal{C}$ es la matriz de controlabilidad del sistema, y:

$$q(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

Nota: la presencia de la inversa de la matriz de controlabilidad implica que el sistema debe ser controlable.

Ejemplo 3:

Para el sistema de segundo orden siguiente:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Se quiere obtener mediante un control por ubicación de polos, un sistema en lazo cerrado cuyos polos se encuentren en: $\lambda = -1 \pm i$, es decir que su ecuación característica sea:

$$q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Se puede obtener una representación de estado del sistema escogiendo como estados a: $x_1 = y; x_2 = \dot{y}$, con los cuales obtenemos para la representación de estado las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$$

La matriz de controlabilidad es:

$$\mathcal{C} = [B\ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y su inversa:

$$\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado:

$$q(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz de la ganancia del controlador (K) se puede calcular entonces con la ecuación de Ackermann:

$$K = [0\ \ 1]\mathcal{C}_c^{-1}q(A) = [0\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [2\ \ 2]$$

Este puede calcularse con la función Acker de Matlab.

Control de salidas con valor constante no nulo

En el caso estudiado en la primera sección el sistema no tiene ninguna perturbación exterior, además el control estudiado solo permite hacer que el sistema vaya hacia un nuevo punto de equilibrio el cual no necesariamente corresponde con el valor deseado. Vemos entonces que el control por ubicación de polos simplemente permite satisfacer las dinámicas impuestas al sistema. Cuando se requiere imponer un valor específico a la salida del sistema o repeler perturbaciones se requieren aportes adicionales al controlador.

Inserción de un pre-compensador

Cuando el objetivo de control es obtener: $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_c$ donde y_c es el valor de la referencia (consigna o valor deseado), que supondremos constante en el tiempo (Escalón). Se requiere calcular el valor de la entrada necesaria v para obtener como salida ese valor deseado y_c.

Consideremos el sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = [A - BK]x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

En régimen estacionario estas ecuaciones son:

$$\begin{cases} 0 = [A - BK]x + Bv \\ y = y_c = Cx \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos una relación para x :

$$x = -[A - BK]^{-1}Bv$$

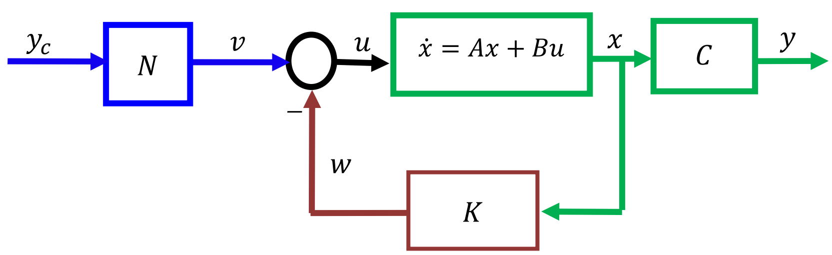
La cual sustituimos en la ecuación de salida del sistema obteniendo:

$$y_c = C(-[A - BK]^{-1}B)v$$

Por lo tanto requerimos aplicar la siguiente entrada al sistema:

$$v(t) = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1}y_c = Ny_c$$

Este resultado nos muestra que solo requerimos de agregar un bloque con una matriz que multiplique a la entrada real del sistema, es decir simplemente una corrección estática como la mostrada en la siguiente figura:



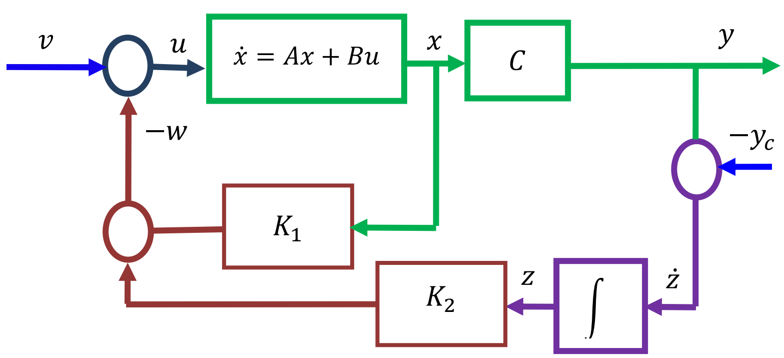
Solo requerimos entonces el cálculo de la pre-compensación N:

$$N = [C(-[A - BK]^{-1}B)]^{-1}$$

Control con acción Integral

Cuando existen perturbaciones que afectan la evolución del sistema requerimos, además del retorno de estado simple, una acción integral. La cual, al igual que en el caso de un control clásico, permite limitar el efecto de la influencia de las perturbaciones en las salidas del sistema. Se puede incluir en el lazo de retorno de estado un corrector integral cuya función es corregir el error estático de una respuesta al escalón

Para hacer esto se modifica el esquema del control a la forma presentada en la siguiente figura.



En este caso el objetivo es obtener: $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_c$ donde y_c es el valor de referencia considerado constante en este caso, y v se comporta como una perturbación.

Utilizamos la notación $\dot{z} = y - y_c$. Como queremos que $\dot{z} = 0$ en régimen estacionario, es decir cuando $t = +\infty$.

Considerando el estado del sistema aumentado con el estado z: $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$.

Las ecuaciones de estado del este sistema aumentado son:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} y_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y_c \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

Y en régimen estacionario se convierten en:

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y_c \end{bmatrix} \\ y_s = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

Lo que se busca es un control $u = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ que anule el error estático de la salida del sistema.
El sistema en lazo cerrado en régimen estacionario será:

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ y_c \end{bmatrix} \\ y_s = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ z_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

Para que este sistema aumentado tienda a un estado de equilibrio es suficiente y necesario que la matriz del sistema en lazo cerrado $A_{LC} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ sea estable. Razonamiento que es válido para toda entrada v.

Nota: En la práctica el control integral requiere la determinación de la ganancia de un retorno de estado K_2 sobre el estado añadido lo que es equivalente a un polo adicional para el sistema en lazo cerrado. Este polo se escoge de tal manera que no afecte la dinámica del sistema principal, es decir que el subsistema correspondiente a la parte integral debe converger mucho más rápido que el sistema principal.

Exemple 4:
Sea el sistema LTI definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se quiere realizar un control por retorno de estado para obtener un sistema en lazo cerrado cuyos polos se ubiquen en: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 - 2i, \lambda_3 = -1 + 2i$.
La matriz del sistema en lazo cerrado es:

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} k_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 1 - 2k_{11} & 4 - 2k_{12} & -1 - 2k_{13} & -2k_2 \\ 6 - 3k_{11} & -1 - 3k_{12} & 3 - 3k_{13} & -3k_2 \\ 2 + k_{11} & 2 + k_{12} & -5 + k_{13} & k_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que esta matriz sea estable es necesario y suficiente con escoger los K_{ij} tales que los valores propios de la matriz sean negativos o con parte real negativa, tres de estos valores propios están definidos por el enunciado del problema:

$$|sI - A_{LC}| = (s + 1)(s + 1 + 2i)(s + 1 - 2i)(s - \lambda_4) = (s^3 + 3s^2 + 7s + 5)(s - \lambda_4)$$
$$|sI - A_{LC}| = s^4 + (3 - \lambda_4)s^3 + (7 - 3\lambda_4)s^2 + (5 - 7\lambda_4)s + 5\lambda_4$$

Si por ejemplo escogemos como cuarto valor propio (el correspondiente a la parte integral) $\lambda_4 = -4$:

$$|sI - A_{LC}| = s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 33s + 20$$

Donde tendremos entonces:

$$|sI - A_{LC}| = \begin{vmatrix} s-1+2k_{11} & -4+2k_{12} & 1+2k_{13} & 2k_2 \\ -6+3k_{11} & s+1+3k_{12} & -3+3k_{13} & +3k_2 \\ -2-k_{11} & -2-k_{12} & s+5-k_{13} & -k_2 \\ -1 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

Calculamos entonces los valores correspondientes:

$$K_1 = [1.2084 \;\; 0.2479 \;\; 1.1607]\,;\; K_2 = 1.4878$$

Esto puede hacerse con la función Acker de Matlab para el sistema ampliado:

$$A_{amp} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad B_{amp} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_{amp} = [C \quad 0]$$

Control Parcial

Consideremos ahora un sistema que es solo parcialmente controlable, es decir $\mathrm{rango}(A) = r_A < n$. En este caso r_A designa el grado de controlabilidad del sistema, es decir el número de estados controlables que este posee. Para el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Seleccionamos como vector de estado x un vector propio del sistema. Y separamos el vector de estado en dos partes: la parte controlable con r_A variables de estado: x_1 y la parte no controlable con $(n - r_A)$ variables de estado: x_2.
Podemos entonces escribir la ecuación dinámica del sistema como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Los valores propios A (modos del sistema) son los valores propios de A_{11} junto a los valores propios de A_{22}.

$$|sI - A| = |sI - A11| \times |sI - A22|$$

El control por ubicación de polos se escribe:

$$u(t) = v(t) - Kx(t) = v - [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Cuya ecuación en lazo cerrado es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1K_1 & A_{12} - B_1K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Notas:

- Obsérvese que el control no tiene ningún efecto sobre la evolución de la parte no controlable del sistema pues:
$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2$$
Para un sistema con partes no controlables, solo los modos de la parte controlable (A_{11}) se pueden modificar mediante un control por retorno de estado.
- La parte K_2 de la matriz K se determina de una forma distinta. Se pueden considerar para ello criterios adicionales como por ejemplo el hecho de hacer que la salida del sistema sea independiente de la parte no controlable x_2.

Ejercicios:

Para los siguientes sistemas determine el control por retorno de estado requerido para estabilizarlos, un control directo para anular el error estático y un control integral.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$
$C = [1 \quad 2]$

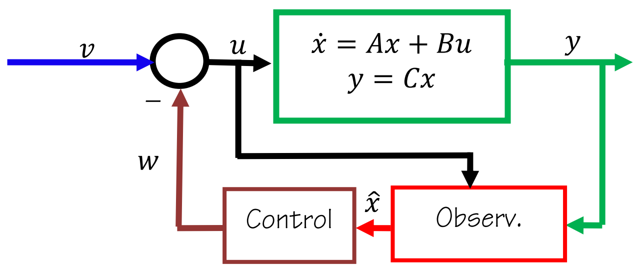
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$
$C = [0 \quad 1 \quad 2]$

Observadores

En algunos casos no es posible acceder a la totalidad de los estados, ya sea porque es imposible realizar una medición física de los mismos o porque colocar medidores para cada estado haría muy costoso o complejo el sistema. En este caso la implementación del control $\mathrm{u} = -\mathrm{Kx}$ no se puede realizar directamente. Y como la matriz C no es invertible en la mayoría de los casos, la ecuación de salida $\mathrm{y} = \mathrm{Cx}$ no permite determinar el valor de x.

Se requiere en este caso la reconstrucción de los estados x a partir de la información disponibles para la entrada u y la salida y para ello se utiliza un observador, el cual está constituido por un sistema dinámico que permite obtener una estimación aproximada $\hat{\mathrm{x}}$ de x. Este observador suele también denominarse reconstructor, estimador o filtro.

El esquema de control en este caso debe modificarse como se muestra en la figura siguiente.



Síntesis del Observador

Se denomina observador de un sistema a un operador que genera una aproximación $\hat{\mathrm{z}}$ de la variable $\mathrm{z} = \mathrm{Tx}$ de la forma:

$$\dot{\hat{\mathrm{z}}} = \mathrm{F}\hat{\mathrm{z}} + \mathrm{Ly} + \mathrm{Ju}$$

Donde u es el control o entrada e y es la salida.

– Si z y x tienen la misma dimensión, entonces se dice que el observador es completo (se estima todo el vector de estado). En ese caso $\mathrm{T} = \mathrm{I}$; por tanto $\mathrm{z} = \mathrm{x}$ y $\hat{\mathrm{z}} = \hat{\mathrm{x}}$.
– Si $\dim(\mathrm{z}) < dim(x)$, entonces se dice que el observador es de orden reducido.

Un observador debe satisfacer al menos las dos condiciones siguientes:

- Un observador debe ser estable.
- Un observador debe garantizar la convergencia de $\hat{\boldsymbol{z}}$ hacia $\boldsymbol{z}$ (estimación sin desvío):
  $\lim_{t\to\infty}\left(\hat{z}(t) - z(t)\right) = \lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \quad \forall u, \forall x(t_0)$
  Donde $\boldsymbol{e}(t)$ es el denominado error de reconstrucción.

Observador Identidad

Un observador identidad es un observador completo sin desvío ($\hat{\mathrm{z}}(\mathrm{t}) \to \mathrm{z}$ si $\mathrm{t} \to \infty$) donde $\mathrm{z} = \mathrm{x}$. Con este observador obtenemos las ecuaciones de la pareja sistema-observador siguientes:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathrm{x}}} = \mathrm{F}\hat{\mathrm{x}} + \mathrm{Ly} + \mathrm{Ju} \\ \mathrm{x} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu} \\ \mathrm{y} = \mathrm{Cx} \end{cases}$$

Si consideramos la derivada del error de estimación:

$$\dot{\mathrm{e}} = \dot{\mathrm{x}} - \dot{\hat{\mathrm{x}}} = (\mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}) - (\mathrm{F}\hat{\mathrm{x}} + \mathrm{Ly} + \mathrm{Ju}).$$

$$\dot{\mathrm{e}} = (\mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}) - (\mathrm{F}\hat{\mathrm{x}} + \mathrm{LCx} + \mathrm{Ju}) = (\mathrm{A} - \mathrm{LC})\mathrm{x} + (\mathrm{B} - \mathrm{J})\mathrm{u} - \mathrm{F}\hat{\mathrm{x}}$$

Donde $\hat{\mathrm{x}} = \mathrm{x} - \mathrm{e}$

$$\dot{\mathrm{e}} = (\mathrm{A} - \mathrm{LC} - \mathrm{F})\mathrm{x} + (\mathrm{B} - \mathrm{J})\mathrm{u} + \mathrm{Fe}$$

Para una estimación sin desvío es necesario que $\mathrm{e} = 0$ y que $\dot{\mathrm{e}} = 0$ $\forall \mathrm{x}, \forall \mathrm{u}$ y para ello se requiere satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \mathrm{A} - \mathrm{LC} - \mathrm{F} = 0 \\ \mathrm{B} - \mathrm{J} = 0 \\ \mathrm{F} \textit{ estable} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{F} = \mathrm{A} - \mathrm{LC} \\ \mathrm{J} = \mathrm{B} \\ (\mathrm{A} - \mathrm{LC}) \textit{ estable} \end{cases}$$

La ecuación del observador será en este caso:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

Esta puede reorganizarse de la forma, conocido bajo el nombre de observador de Luenberger:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

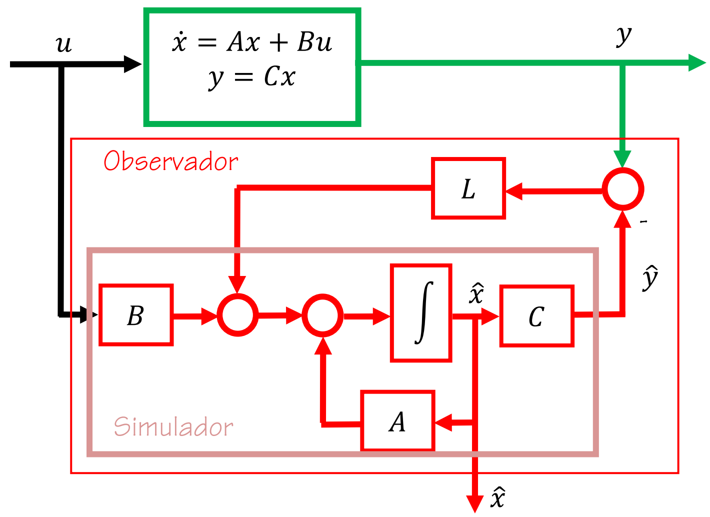
Si escribimos $\hat{y} = C\hat{x}$ la ecuación de este observador se convierte en:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

Esta relación que caracteriza al observador puede representarse por el siguiente diagrama de boques:

El observador está constituido de dos partes:

- Un simulador del sistema real, caracterizado por la matrices (A, B, C), cuyas entradas son u e y y cuya salida es $\hat{y}$.
- Un corrector que realiza una retroalimentación función de la diferencia entre la salida y y su valor estimado $\hat{y}$. Este corrector garantiza la convergencia de la estimación del estado $\hat{x}$ hacia el estado x. En el corrector L se conoce bajo el nombre de ganancia del observador. Se dice que el observador converge si e tiende a cero, y esto ocurre siempre que $(A - LC)$ sea estable. Por lo tanto $|\lambda I - (A - LC)| = 0$ debe tener raíces negativas o con parte real negativa.



El cálculo de un observador para un sistema LTI consiste entonces en calcular la matriz L, para obtener unos valores propios del sistema retroalimentado (observador) en una posición seleccionada arbitrariamente. Se dice entonces que se trata de un problema de control modal del sistema dual.

Ejemplo 5:

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que solo la salida $y = x_1$ puede medirse, requerimos de un observador para determinar el estado no medible x_2. En este caso aunque solo requerimos determinar uno de los dos estados, vamos a construir un observador que permite determinar todos los estados, es decir un observador completo. Sería posible sin embargo la construcción de un observador reducido, sin embargo con frecuencia es preferible construir un observador completo y utilizar los estados redundantes para corregir eventuales defectos de estimación causados por ruido u otras perturbaciones. Un ejemplo de esto sería el filtro de Kalman (observador optimo de tiempo variable) el cual permite la resolución de problemas de observación con ruido en la medición.

Lo primero que se debe hacer es determinar si el sistema es observable, pues de no serlo no podríamos construir el observador completo.

$$\text{rango}(\mathcal{O}) = \text{rango}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2 = n$$

por lo tanto el sistema es observable, y podemos entonces construir un observador para determinar los estados del sistema.

Para la construcción del observador vamos a seleccionar una dinámica tal que el comportamiento de éste sea equivalente a un sistema de segundo orden cuya ecuación característica sea:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$$

Donde: $\xi = 0.8$ y $\omega_n = 10$.
Estos valores nos permiten obtener un tiempo de estabilización del observador de $T_s = 0.5$ s

Repaso: El tiempo de estabilización es el tiempo necesario para que la salida de un sistema sea igual al 98% del valor de la respuesta en estado estable (2% de error) después de un cambio en escalón de la entrada, este se puede calcular para un sistema de primer orden con: $T_s = 4\tau$ y para un sistema de segundo orden con: $T_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$.
La ecuación característica del observador será:

$$p(\lambda) = |\lambda I - (A - LC)| = \left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right)\right|$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda - 2 + L_1 & -3\\ 1 + L_2 & \lambda - 4\end{vmatrix} = (\lambda - 2 + L_1)(\lambda - 4) - (-3)(1 + L_2)$$

Por lo tanto:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (L_1 - 6)\lambda - 4L_1 + 3L_2 + 11 = \lambda^2 + 16\omega_n\lambda + 100$$

Y podemos calcular la matriz de ganancia del observador L con las ecuaciones:

$$L_1 - 6 = 16$$
$$-4L_1 + 3L_2 + 11 = 100$$

La matriz L es:

$$L = \begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\59\end{bmatrix}$$

En conclusión el observador para nuestro sistema lineal es:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = \begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}22\\59\end{bmatrix}(y - \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\hat{x})$$

Ganancia del Observador con la ecuación de Ackermann

Se puede utilizar la ecuación de Ackermann para determinar la ganancia del observador, para ello se procede como sigue. Para que la dinámica del observador se comporte según una ecuación característica seleccionada arbitrariamente de la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0$$

Donde los coeficientes β se seleccionan para obtener especificaciones deseadas en el observador.

La matriz de ganancia del observador:

$$L = \begin{bmatrix}L_1 & L_2 & \cdots & L_n\end{bmatrix}^T$$

Se puede calcular con la expresión:

$$L = p(A)\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

Donde $\mathcal{O}$ es la matriz de observabilidad del sistema y:

$$p(A) = A^n + \beta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \beta_2A^2 + \beta_1A + \beta_0I$$

Ejemplo 6.
Para el sistema presentado en el ejemplo 5:

$$A = \begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Y seleccionando la misma ecuación característica deseada para la dinámica del observador:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 16\lambda + 100$$

Obtenemos:

$$p(A) = A^2 + 16A + 100I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 16\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix}$$

Siendo la matriz de observabilidad:

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y por lo tanto: $\mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

La ganancia del observador será entonces:

$$L = p(A)\mathcal{O}^{-1}[0 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 133 & 66 \\ -22 & 177 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Control por retorno de salida

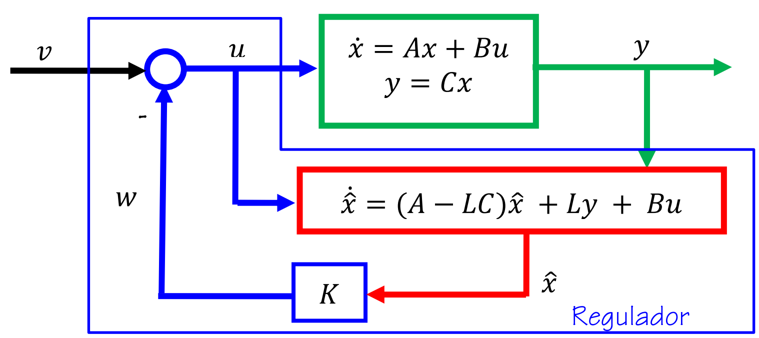
La puesta en práctica de un control por retroalimentación en espacio de estado en sistemas LTI, cuando todas las variables de estado no pueden medirse, supone la hipótesis que el sistema es controlable y observable.
Cuando el sistema no es totalmente controlable u observable, se debe dejar de lado las partes non controlables o no observables del sistema, es decir no tomarlas en cuenta. Pero se debe verificar para que el sistema de control pueda funcionar, aún en estas condiciones, que los estados no controlables sean estables y que los no observables no sean indispensables para el control. El problema de control se resuelve seguidamente en tres grandes etapas:

- Control por retorno de estado. Se calcula la ganancia del controlador suponiendo que todo el vector de estado x puede medirse. El control lineal es de la forma $u = -Kx$, donde K se determina imponiendo los polos que se quieren obtener en lazo cerrado.
- Reconstrucción de los estados. Si solo es posible medir y, se necesita determinar un observador, es decir se necesita calcular la ganancia L que asegure la estabilidad del observador y una observación sin desvío.
- Control por retorno de salida. El control del sistema se realiza finalmente a partir del estado estimado $u = -K\hat{x}$.

A pesar de que la ganancia K se calcula para garantizar la estabilidad y rendimiento del sistema, y para ello se escogieron de forma que las raíces de la ecuación característica $|\lambda I - (A - BK)| = 0$ sean negativas o con parte real negativa. Y por lo tanto $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Es necesario verificar que ésta condición se garantiza aún con los estados estimados $\hat{x}$.

Estructura del control

En esta nueva configuración el control toma la forma del diagrama de bloques siguiente:



El control en este caso será:

$$u = v - K\hat{x}$$

Supongamos en primer lugar que $v = 0$.

En este caso: $u = -K\hat{x}$

Y la ecuación del observador es: $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$

Para mostrar la estabilidad del sistema vamos a estudiar las dinámicas del error del sistema que se introduce con la sustitución de x por $\hat{x}$ en el cálculo del control.

Si reemplazamos el valor de la entrada u en la ecuación del observador obtenemos un sistema con entrada y y con salida u :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Ly \\ u = -K\hat{x} \end{cases}$$

Podemos calcular la dinámica del error de la estimación $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ con la expresión:

$$\dot{e} = Ax + Bu - (A - LC)\hat{x} - Ly - Bu$$

Lo que se traduce en:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) + L(C\hat{x} - y) = A(x - \hat{x}) + LC(\hat{x} - x) = (A - LC)e$$

Esta expresión muestra que la dinámica del error no depende de la entrada.

Por otro lado si volvemos al sistema que queremos controlar $\dot{x} = Ax + Bu;\ \ y = Cx$ y se substituye la ley de control en la ecuación dinámica obtenemos:

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x}$$

Como queremos estudiar la dinámica del error se substituye $\hat{x} = x - e$:

$$\dot{x} = Ax - BKx + BKe = (A - BK)x + BKe$$

Podemos ahora representar el sistema en lazo cerrado por las dinámicas de x y e :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} = (A - LC)e \end{cases}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Lo valores propios de la nueva matriz dinámica del sistema son por lo tanto las raíces de:

$$|\lambda I - (A - BK)||\lambda I - (A - LC)| = 0$$

Por lo tanto:

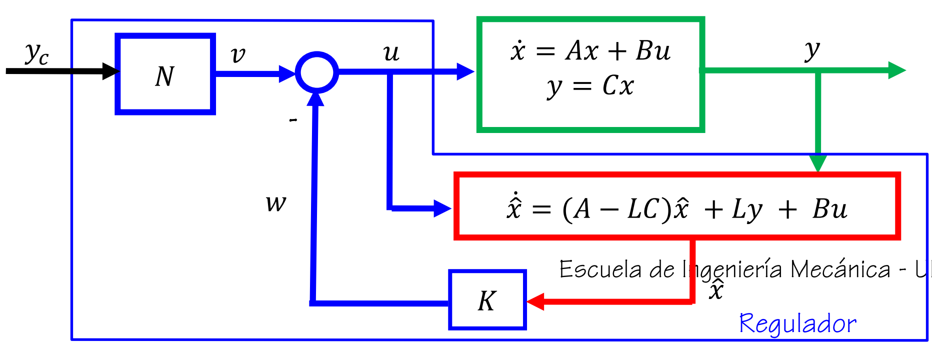
- si las raíces de $|\lambda I - (A - BK)| = 0$ son negativas o con parte real negativa, lo cual está garantizado pues se calculó el control para garantizar esa condición,
- y las raíces de $|\lambda I - (A - LC)| = 0$ son negativas o con parte real negativa, lo cual está garantizado pues el observador fue calculado para garantizar esa condición,
- entonces los valores propios de la matriz dinámica serán negativos o con parte reales negativas.

En conclusión los valores propios del sistema en lazo cerrado son los valores propios de $(A - BK)$, es decir las relativas al control del sistema, mas los valores propios de $(A - LC)$, es decir las del observador, y en consecuencia se observa que la sustitución de x por $\hat{x}$ no modifica los valores propios obtenidos en el cálculo del control. Solamente se superponen valores propios adicionales que provienen del observador. La estabilidad del sistema en lazo cerrado no es modificada por la presencia del observador, siempre que este sea estable y no tenga desvío. Esto es conocido bajo el nombre de principio de separación el cual se satisface para todos los sistemas lineales.

Para que el comportamiento del sistema en lazo cerrado no sea modificado de manera notable por la presencia del observador, es necesario que la reconstrucción del estado sea rápida respecto de la dinámica del sistema de lazo cerrado (polos de $(A - LC)$ de gran modulo respecto de $(A - BK)$).

Inserción de un pre-compensador

De igual forma que para el control por retorno de estado, el control por retorno de salida no garantiza que el vector de la señal de referencia v sea nulo. El estado del sistema x va a converger hacia 0 con una dinámica determinada por los polos ya ubicados. Cuando v ya no sea nulo, el estado converge hacia un valor que no es necesariamente nulo. Un pre-compensador es en este caso una matriz cuadrada N, que se ubica



justo después del vector de la referencia, tal como se observa en la figura.

Este pre-compensador no cambia los polos del sistema en lazo cerrado. Simplemente permite hacer corresponder ciertos componentes de la referencia con ciertas variables de estado previamente seleccionadas.
En este caso el control es:

$$u = v - K\hat{x}$$

Y la ecuación del sistema que tiene como entrada y y como salida u :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Podemos calcular la dinámica del error de estimación $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ como:

$$\dot{e} = Ax + Bu - (A - LC)\hat{x} - Ly - Bu$$

Lo cual es equivalente a:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) + L(C\hat{x} - y) = A(x - \hat{x}) + LC(\hat{x} - x) = (A - LC)e$$

Por otro lado si vamos al sistema que queremos controlar $\dot{x} = Ax + Bu;\ \ y = Cx$ y se sustituye la ley de control en la ecuación dinámica obtenemos:

$$\dot{x} = Ax + Bv - BK\hat{x}$$

Como lo que queremos es estudiar la dinámica del error sustituimos $\hat{x} = x - e$:

$$\dot{x} = Ax - BKx + BKe + Bv = (A - BK)x + BKe + Bv$$

Se puede entonces representar el sistema en lazo cerrado por las dinámicas de x y e:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BKe + Bv \\ \dot{e} = (A - LC)e \\ y = Cx \end{cases}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$
$$y = Cx$$

Si y_c es constante, una vez que se alcance el régimen estacionario, para que el valor de y tienda a y_c tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$
$$y = y_c = Cx$$

Como $|A - LC| \neq 0$ pues la matriz L fue seleccionada para que el observador sea estable, es decir con polos estrictamente inferiores a cero, entonces obligatoriamente $e = 0$ (error de observación nulo en régimen estacionario).

La ecuación se convierte en: $$(A - BK)x + Bv = 0$$
Y por lo tanto:

$$x = -(A - BK)^{-1}Bv$$

La cual al ser sustituida en la ecuación de salida obtenemos:

$$y = y_c = Cx = C(-(A - BK)^{-1}B)v$$

Por tanto finalmente:

$$v = [C(-(A - BK)^{-1}B)]^{-1}y_c = Ny_c$$

La cual es idéntica a la ecuación de control por retorno de estado directo. Por lo tanto la salida y tiende hacia la referencia y_c si calculamos la matriz N con la expresión:

$$N = [C(-(A - BK)^{-1}B)]^{-1}$$

Ejemplo 7:

Para el sistema presentado en el ejemplo 6, representado por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se quiere realizar un control por retorno de salida, ya que el estado x_2 no se puede medir físicamente, con el objetivo de obtener un sistema en lazo cerrado con polos en $\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i$.

Para este sistema en el ejercicio 6 fue calculada la ganancia de un observador que recordamos aquí:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Para el control por retorno de salida se requiere calcular la ganancia del controlador, igual como si fuese un retorno de estado simple:

$$|sI - A + BK| = \left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| = \left\| \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 1+k_1 & s-4+k_2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 1+k_1 & s-4+k_2 \end{bmatrix} \right\| = (s-2)(s-4+k_2) - (-3)(1+k_1) = (s+1+2i)(s+1-2i)$$

$$s^2 + (k_2 - 6)s + (3k_1 - 2k_2 + 11) = s^2 + 2s + 5$$

Lo cual se traduce en dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_2 - 6 = 2 \\ 3k_1 - 2k_2 + 11 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} k_2 = 8 \\ k_1 = 10/3 \end{matrix} \rightarrow K = \begin{bmatrix} 10/3 & 8 \end{bmatrix}$$

Paras realizar el control por retorno de salida es suficiente con realizar un retorno de estado:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ u = v - K\hat{x} \end{cases}$$

Donde K y L fueron calculados en los pasos anteriores.

Si adicionalmente requerimos que la salida tienda hacia un valor deseado $y_c = Nv$ (consigna) se requiere agregar un pre-compensador, el cual se calcula independientemente del observador:

$$N = [C(-(A - BK)^{-1}B)]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(-\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10/3 & 8 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1}$$

$$N = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(-\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -13/3 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(-\begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 \\ 0.8667 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1}$$

$$N = -1{,}6667$$

Ejercicios.

Para los siguientes sistemas calcular un observador para la estimación de los estados que se suponen no medidos, y determinar un control por retorno de salida para estabilizar los sistemas, agregando adicionalmente un pre-compensador para anular el error.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$
   $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$